

# روشهای گسسته سازی معادلات در شبیه سازی حرکت امواج در سیال دولایه به روش اجزای مرزی

منا رحمانی<sup>i</sup>؛ میرمصدق جمالی<sup>ii</sup>

## چکیده

شبیه سازی عددی مسائلی که دارای دو دامنه با معادلات مرتبط و جدایی ناپذیرند، اخیراً مورد توجه زیادی قرار گرفته است. شبیه سازی سیالات دولایه به روش اجزای مرزی، یکی از این نوع مسائل است و تحقیقات کمی در این زمینه انجام شده است. روشهای مختلفی برای گسسته سازی معادلات حاکم بر مساله سیال دولایه و نحوه مرتبط ساختن معادلات دو دامنه وجود دارد. یافتن روشی که با وجود سادگی و صرف حداقل زمان، از دقت بالایی برای شبیه سازی مسائل سیال دولایه برخوردار باشد، دارای اهمیت زیادی است. در این تحقیق، دو روش برای گسسته سازی معادلات سیال دولایه ارائه و با روشهای محققان قبلی مقایسه می شود. با استفاده از روش اجزای مرزی حرکت امواج در سیال دو لایه با به کارگیری هر کدام از این دو روش شبیه سازی شده، نتایج دو روش با هم و با حل تحلیلی خطی مقایسه می شوند. روشهای ارائه شده از نظر پایداری و زمان اجرای برنامه نسبت به روشهای قبلی برترند و اختلاف کمی با حل تحلیلی خطی دارند.

## کلمات کلیدی

سیال دولایه، موج درونی، موج سطحی، روش اجزای مرزی، روش حل معادلات.

## *Methods of Discretization of Equations in Simulation of Wave Evolution in a Two Layer Flow Using Boundary Element Method*

Mona Rahmani; Mirmosadegh Jamali

### ABSTRACT

Numerical simulation of problems with two domains of dependent and coupled equations has been the subject of much research recently. Numerical simulation of a two layer flow using boundary element method is an example of these kind of problems, which has received less attention. There exist different methods for discretizing the governing equations of a two layer flow and handling the coupled equations of layers. However, development of a method which has high accuracy and economical efficiency simultaneously, is still of great importance. In this study two methods have been proposed to discretize the governing equations of a two layer flow and conceptually compared to other existing methods. Using boundary element method, e

volution of waves in a two layer flow have been simulated employing each of the proposed methods and the results have been compared together and to the linear analytical solution. Results show that the newly proposed methods are more stable and economical than previously existing ones and produce results which are slightly different from linear analytical solution.

<sup>i</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف.  
<sup>ii</sup> دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف؛ jamali@sharif.edu

## KEYWORDS

Two layer flow, internal wave, surface wave, boundary element method, method of discretization of equations.

مرجع [۷] روابطی برای شبیه سازی جریانهای پتانسیل دارای سطح آزاد با شرایط مرزی غیرخطی به روش اجزای مرزی ارائه می‌کند. در زمینه سیال دولایه، شبیه سازی جریان هایی که حرکت سطح آزاد آنها تحت تاثیر سیالی با دانسیته کم است، به روش اجزای مرزی انجام شده است [۲]. در مرجع [۱۲] روشی برای شبیه‌سازی حرکت سطح تماس دو سیال با چگالی‌های مختلف به روش اجزای مرزی ارائه شده است. تا کنون شبیه سازی امواج در سیال دو لایه به روش اجزای مرزی انجام نشده است. هدف از انجام این تحقیق، تدوین روشی برای گسسته سازی معادلات غیر خطی حاکم بر سیال دو لایه و شبیه سازی حرکت امواج در سیال دو لایه در دو بعد با استفاده از روش اجزای مرزی است.

## ۲- معادلات حاکم بر مساله

سیستمی متشکل از سیال دولایه با چگالی  $\rho_1$  و  $\rho_2$  مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. در هر لایه فرض می‌شود جریان غیر لزج و تراکم ناپذیر باشد. همچنین از فرض نفوذ ناپذیر بودن کف استفاده می‌شود.

از فرض غیر لزج و تراکم ناپذیر بودن جریان می‌توان نتیجه گرفت که جریان غیرچرخشی است. در این صورت می‌توان سرعتها را بر حسب تابع پتانسیل تعریف کرد و معادلات پیوستگی به فرم معادله لاپلاس در می‌آیند:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0; \quad \eta < z < h + \xi \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = 0; \quad -d < z < \eta \quad (2)$$

که در آن  $\phi_1$  و  $\phi_2$  به ترتیب تابع پتانسیل لایه اول و دوم است و سایر پارامترها در شکل (۱) نشان داده شده اند. شرط مرزی دینامیک در سطح آزاد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + gz + \frac{V_1^2}{2} \right) = K(t); \quad z = h + \xi \quad (3)$$

که در آن  $V_1$  بردار سرعت لایه بالایی است و  $K$  مقداری ثابت در زمان است. شرط مرزی سینماتیک در سطح آزاد عبارتست از:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}; \quad z = h + \xi \quad (4)$$

که در آن منظور از  $\frac{D}{Dt}$  مشتق مادی است. شرط مرزی دینامیک در محل تماس دو سیال به صورت زیر است:

## ۱- مقدمه

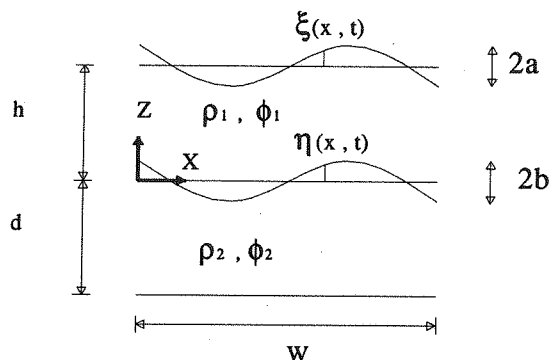
بدنه‌های طبیعی سیال مانند اتمسفر، اقیانوس‌ها و دریاچه‌ها به دلیل تغییرات دما، شوری و مواد معلق دارای تغییرات چگالی در راستای عمودی‌اند. بسته به شرایط مرزی، دینامیک سیال و خصوصیات عامل ایجاد کننده تغییرات چگالی، ممکن است تغییرات عمودی چگالی به اشکال مختلف اتفاق بیفتد. به عنوان مثال، تأثیر عوامل جوی فقط تا عمقی از دریاچه نفوذ می‌کند و باعث اختلاط سیال تا این عمق و شکل گیری یک لایه همگن بر روی لایه زیرین که دارای چگالی متفاوت است می‌شود. همچنین در مواردی که جریان ورودی به دریاچه همگن است و چگالی کمتر دارد، جریان ورودی بدون اختلاط قابل توجه با آب دریاچه بر روی آن قرار می‌گیرد و لایه‌ای از سیال با چگالی متفاوت بر روی دریاچه تشکیل می‌دهد. برای هر دو حالت ذکر شده که احتمال وقوع آنها در دریاچه‌ها زیاد است تغییرات چگالی در مرز دولایه ناگهانی و لایه دیفیوز کاملاً نازک است. در این حالت دریاچه را می‌توان به صورت سیستم سیال دولایه در نظر گرفت.

حل معادلات حاکم بر سیستم سیال دو لایه نشان می‌دهد شکل گیری امواج در سیال دولایه در دو حالت امواج سطحی و درونی ممکن است [۹]. همچنین اندازه گیریهای میدانی تغییر مکان قائم خطوط هم دما در نزدیکی لایه دیفیوز وجود امواج درونی را تأیید می‌کنند [۸]، [۱۰]. بر خلاف امواج سطحی که دارای بیشترین تغییر مکان قائم در سطح آزادند، امواج درونی در مقایسه با سطح تماس تغییر مکانهای قائم کوچکی بر سطح آب ایجاد می‌کنند و فرکانس امواج درونی در مقایسه با امواج سطحی بسیار کوچک تر است [۸]، [۹]. مطالعه امواج درونی به دلیل نقش مهمی که در انتقال ممتنم و اختلاط در دریاچه‌ها و اقیانوس‌ها ایفا می‌کنند، مورد توجه قرار گرفته است [۵]، [۸].

حل تحلیلی معادلات حاکم بر سیال دولایه برای شرایط مرزی خطی شده موجود است [۴]. با استفاده از روش‌های عددی می‌توان حرکت امواج در حالت سطحی و درونی را برای شرایط مرزی کاملاً غیر خطی، که دارای حل تحلیلی نیست، شبیه سازی کرد. روش عددی مورد استفاده در این تحقیق روش اجزای مرزی است که یکی از روشهای عددی مهم در شبیه سازی جریانات دارای سطح آزاد است. شبیه سازی حرکت موج در سیال تک لایه به روش اجزای مرزی برای امواج پیش رونده [۱] و برای امواج ایستاده [۳] انجام شده است.

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + gz + \frac{V_1^2}{2} \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + gz + \frac{V_2^2}{2} \right) \quad (5)$$

;  $z = \eta$



شکل (۱): نمایش سیستم سیال دولایه در نظر گرفته شده و تعریف پارامترها

قضیه سوم گرین به صورت زیر در می‌آید [۱۳]:

$$\int_{\Gamma} u^* \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - C(p) \cdot \phi(p) = 0 \quad (9)$$

در رابطه فوق  $\phi$  تابع پتانسیل،  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  شار،  $p$  نقطه مبدا محل قرارگیری بار واحد،  $n$  بردار یکه عمود بر سطح و  $\Gamma$  مرز دامنه است.  $u^*$  حل بنیادین معادله لاپلاس است که برای حالت دو بعدی  $u^* = \frac{-1}{2\pi} \ln|\vec{r}|$  است (  $\vec{r}$  بردار متصل کننده گره مبدا به گره مقصد روی مرز) و  $C$  ضریبی است که مقدار آن به موقعیت گره مقصد نسبت به مرز دامنه وابسته است.

مرز دامنه به  $N$  المان خطی به صورت  $\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$

گسسته سازی می‌شود، به طوری که دو گره در انتهای یک المان قرار می‌گیرد. مقادیر شار و تابع پتانسیل به صورت خطی و مطابق رابطه زیر در طول المان تغییر می‌کند:

$$\phi = \frac{1-\xi}{2} \phi_j + \frac{1+\xi}{2} \phi_{j+1} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1-\xi}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j + \frac{1+\xi}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1}$$

با قرار دادن منبع در گره  $i$  استفاده از تعریف  $Q = \frac{\partial \phi}{\partial n}$  و  $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$  و قرار دادن  $\psi_1$  و  $\psi_2$  به ترتیب به جای توابع شکلی  $(1-\xi)/2$  و  $(1+\xi)/2$  از رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

شرایط مرزی سینماتیک در محل تماس دو سیال عبارتست از:

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}; \quad z = \eta \quad (6)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}; \quad z = \eta \quad (7)$$

و با توجه به نفوذناپذیر بودن کف خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0; \quad z = -d \quad (8)$$

در دو دیواره جانبی  $x=0$  و  $x=w$  شرط مرزی صفر بودن سرعت افقی اعمال می‌شود. برای شرایط اولیه نیز از جوابهای تحلیلی خطی استفاده شده است.

### ۳- گسسته سازی و حل معادلات

#### ۳-۱- روش اجزای مرزی

روش اجزای مرزی بر پایه معادلات انتگرالی است. بیان ریاضی مسائل مقدار مرزی به صورت معادله انتگرالی، مستلزم تبدیل معادله دیفرانسیل پاره ای حاکم بر دامنه و مرز آن به معادله ای انتگرالی است که فقط با مقادیر روی مرز مرتبط باشد. معادله دیفرانسیل پاره ای اصلی فقط بر حسب پارامترهای اصلی بیان می‌شود. در حالی که معادله انتگرالی ارتباطی بین پارامترهای اصلی و مشتقات آنهاست. بیان مساله مقدار مرزی به صورت معادله انتگرالی نیاز به یک حل بنیادین از معادله دیفرانسیل اصلی دارد. این حل بنیادین در واقع حل مسأله برای یک بار یا منبع نقطه ای در یک فضای بی نهایت است. برای معادله لاپلاس این حل بنیادین برابر با تابع پتانسیل ناشی از منبع یک بار واحد است. معادله انتگرالی با استفاده از

این روش وقتی اختلاف چگالی دو سیال کم می‌شود، دقت نتایج و پایداری روش کاهش می‌یابد.

در روش مرجع [۱۲] در هر گام زمانی ابتدا برای مقادیر تابع پتانسیل در هر لایه روی سطح تماس مقداری تخمینی در نظر گرفته می‌شود و حل دستگاه معادلات متشکل از ترکیب معادلات انتگرالی هر زیردامنه و شرط سینماتیکی سطح تماس تا همگرا شدن نتایج ادامه می‌یابد. به عبارت دیگر، برای سطح تماس همان یک درجه آزادی در نظر گرفته می‌شود ولی برای هر گام زمانی لازم است دستگاه معادلات  $N \times N$  چندین بار حل شود که منجر به صرف زمان زیادی می‌شود.

در این تحقیق دو روش جدید برای حل معادلات ارائه شده است. روش اول معادلات حاکم بر دو لایه را جداسازی می‌کند؛ به طوری که در هر گام معادلات حاکم بر هر لایه به صورت جداگانه حل می‌شود. این روش شباهت زیادی به روش مرجع [۲] دارد، با این تفاوت که ترتیب به دست آوردن متغیرها متفاوت است. در این روش در هر گام زمانی طی شش گام تمام مجهولات به دست می‌آیند. روش حل معادلات در این شش گام به شرح زیر است:

گام اول: ابتدا هندسه مساله در گام جدید با گسسته سازی معادلات (۴) و (۶) به دست می‌آید. برای گسسته سازی از روش تفاضل محدود پس رونده استفاده شده است.

گام دوم: مقادیر تابع پتانسیل روی سطح آزاد با گسسته سازی رابطه (۳) به دست می‌آید.

گام سوم: از ترکیب دو رابطه (۶) و (۷) رابطه

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_1 = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_2$$

می‌توان مقادیر شار روی سطح تماس را برای لایه بالا با توجه مقادیر شار در لایه پایین در گام زمانی قبل به دست آورد.

گام چهارم: با استفاده از روش اجزای مرزی معادله لاپلاس در لایه بالا برای به دست آوردن مقادیر شار روی سطح آزاد و مقادیر تابع پتانسیل روی سطح تماس و دیواره‌ها حل می‌شود. گام پنجم: با گسسته سازی رابطه (۵) مقادیر تابع پتانسیل در سطح تماس برای لایه پایین به دست می‌آید.

گام ششم: با استفاده از روش اجزای مرزی معادله لاپلاس در لایه پایین برای به دست آوردن مقادیر شار روی سطح تماس و مقادیر تابع پتانسیل روی دیواره‌ها و کف حل می‌شود. در روش دوم مقادیر تابع پتانسیل و شار در سطح تماس هر دو مجهول فرض شده و از حل همزمان معادلات دو لایه به دست می‌آیند. این روش از نظر حل همزمان معادلات مشابه روش مرجع [۱۲] است. مجهولات در سه گام زیر به دست می‌آیند:

$$C_i \phi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\psi_1 \phi_j + \psi_2 \phi_{j+1}) q^* d\Gamma \quad (11)$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\psi_1 Q_j + \psi_2 Q_{j+1}) u^* d\Gamma$$

با استفاده از تعاریف زیر:

$$H^1_{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_1^i q^* d\Gamma, H^2_{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_2^i q^* d\Gamma \quad (12)$$

$$H_{ij} = H^1_{ij} + H^2_{ij-1}$$

$$G^2_{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_2^i u^* d\Gamma, G^1_{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi_1^i u^* d\Gamma \quad (13)$$

$$G_{ij} = G^1_{ij} + G^2_{ij-1}$$

رابطه (۱۱) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$C_i \phi_i + \sum_{j=1}^N \phi_j \bar{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N Q_j G_{ij} \quad (14)$$

اگر گره منبع  $i$  روی  $N$  گره مرزی قرار داده شود،  $N$  معادله حاصل خواهد شد که به صورت دستگاه زیر نمایش داده می‌شوند:

$$[H][\phi] = [G][Q] \quad (15)$$

در رابطه فوق درایه های ماتریس  $H$  از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$H_{ij} = \begin{cases} \bar{H}_{ij} & i \neq j \\ \bar{H}_{ij} + C_i & i = j \end{cases} \quad (16)$$

با استفاده از شرایط مرزی مقدار تابع پتانسیل یا شار در هر گره معلوم است؛ بنابراین  $N$  معادله برای به دست آوردن  $N$  مجهول حاصل می‌شود.

از مزایای روش اجزای مرزی، نحوه گسسته سازی دامنه است که فقط بر روی مرزها انجام شده و منجر به سادگی و کاهش حجم اطلاعات می‌شود. علاوه بر این، در مقایسه با روشهای اجزای محدود و تفاضل محدود با فواصل گره‌های یکسان، روش اجزای مرزی دقت بیشتری دارد [۱۳].

### ۳-۲- روش های ارائه شده برای گسسته سازی معادلات

مرجع [۲] و [۱۲] هر یک روشی برای حل معادلات حاکم بر سیال دو لایه ارائه کرده‌اند. در روش مرجع [۲] که برای سیال دولایه متشکل از گاز و مایع به کار برده شده است، معادلات هر لایه پس از جداسازی به صورت جداگانه حل می‌شود. در

#### ع- نتایج شبیه سازی

برای شبیه سازی حرکت امواج، مخزنی حاوی سیال دولایه با مشخصات زیر با توجه به شکل (۱) در نظر گرفته شده است:  $h=d=1.0\text{ m}$ ,  $w=1.0\text{ m}$

$$\rho_1=1.0\text{ gr/cm}^3, \rho_2=1.05\text{ gr/cm}^3$$

برای این مثال امواج درونی بادامنه موج  $b=0.05\text{ m}$  و امواج سطحی با دامنه موج  $a=0.05\text{ m}$  شبیه سازی شده است. در هر دو حالت مود اول موج ایستاده در نظر گرفته شده است؛ بنابراین طول موج  $L=2\text{ m}$  است. رابطه تحلیلی dispersion در سیال دو لایه به صورت زیر است [۲]:

$$\frac{\rho_1(\omega^4 - g^2 k^2) \tanh(kh)}{\rho_2(gk \tanh(kh) - \omega^2)} + gk - \omega^2 \coth(kd) = 0 \quad (17)$$

که در آن  $k$  عدد موج و  $\omega$  فرکانس زاویه ای موج است. با استفاده از این رابطه، پریود موج درونی  $T=7.26\text{ s}$  و پریود موج سطحی  $T=1.13\text{ s}$  به دست می آید. رابطه تحلیلی بین دامنه موج در سطح آزاد و تماس به صورت زیر بیان می شود:

$$b = a \left( \cosh(kh) - \frac{gk \sinh(kh)}{\omega^2} \right) \quad (18)$$

با استفاده از رابطه (۱۸) می توان نشان داد برای موج سطحی و درونی دامنه موج در سطح تماس و سطح آزاد به ترتیب  $b=0.0042\text{ m}$  و  $a=-0.000108\text{ m}$  خواهد بود. زمان شروع شبیه سازی  $t_0=T/4$  در نظر گرفته شده است که در آن سطح آزاد و تماس افقی هستند. مقادیر تحلیلی خطی تابع پتانسیل و شار به عنوان مقادیر اولیه به کار رفته اند.

برای بررسی حساسیت مدل نسبت به تعداد گره ها و مقدار گام زمانی، امواج درونی با ۲۰ و ۴۰ گره روی سطح آزاد و سطح تماس و دو مقدار گام زمانی  $\Delta t=0.001\text{ s}$  و  $\Delta t=0.002\text{ s}$  برای هر دو روش شبیه سازی شده اند. مقادیر گام زمانی به گونه ای انتخاب شده اند که بزرگ ترین مقدار ممکن بدون ایجاد ناپایداری در نتایج باشند. با کوچک تر شدن فاصله گره ها مقدار گام زمانی نیز به منظور جلوگیری از بروز ناپایداری باید کاهش یابد. تاریخچه زمانی حرکت گره سمت راست برای سه ترکیب مختلف تعداد گره و مقدار گام زمانی شبیه سازی شده با استفاده از روش اول و دوم به ترتیب در شکل (۲) و شکل (۳) باهم مقایسه شده اند. از این دو شکل می توان نتیجه گرفت که اختلاف

گام اول: هندسه مساله در گام زمانی جدید با استفاده از روابط (۴) و (۶) به دست می آید.

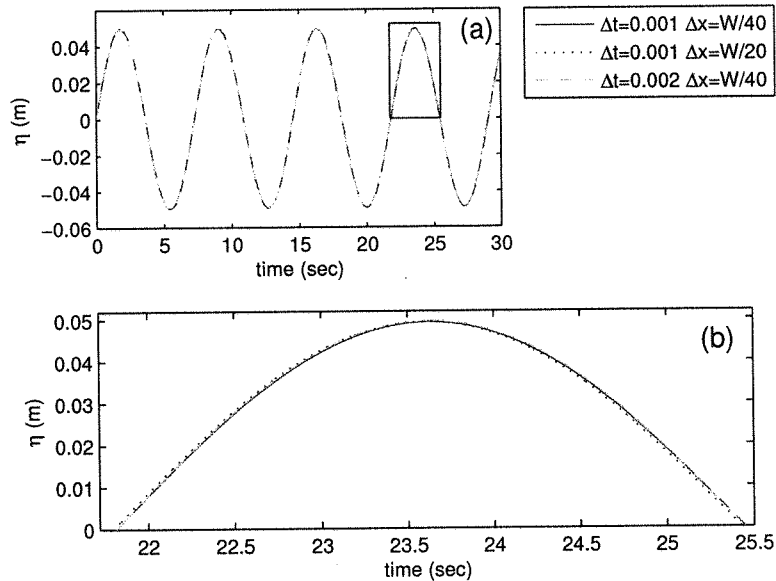
گام دوم: مقادیر تابع پتانسیل در گام زمانی جدید با استفاده از رابطه (۳) تعیین می شود.

گام سوم: معادلات انتگرالی به همراه شرایط مرزی دینامیک و سینماتیک سطح تماس، دستگاه معادلاتی تشکیل می دهند که از حل آن سایر مجهولات تعیین نشده شامل مقادیر شار روی سطح آزاد، مقادیر شار و تابع پتانسیل در سطح تماس در هر دو لایه، و مقادیر تابع پتانسیل روی دیواره ها و کف به دست می آید. ماتریس ضرایب دستگاه مذکور دارای ابعاد  $2N \times 2N$  است.

#### ۳-۳- مدل عددی

برای هر کدام از دو روش گسسته سازی برنامه ای به زبان فرترن در محیط Visual Fortran نوشته شده است. گره های روی سطح تماس به روش نیمه لاگرانژی و در جهت قائم حرکت داده می شوند. استفاده از این روش برای حرکت گره ها باعث به وجود آمدن ناپایداریهای زیگزاگی در سطح آزاد و سطح تماس می شود که در شبیه سازیهای قبلی نیز گزارش شده است [۶]. در صورت استفاده از روش لاگرانژی، لازم است در هر گام زمانی یک منحنی از گره ها عبور داده شده، مش بندی مجددا انجام شود [۲]، [۱۲]. چنین مراحل باعث حذف ناپایداریهای زیگزاگی می شود. در این تحقیق در هر گام زمانی برای جلوگیری از ایجاد ناپایداریهای زیگزاگی، جمله لزجت مصنوعی  $\mathcal{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  به سمت راست روابط دینامیک سطح آزاد و سطح تماس (معادلات (۳) و (۵)) و جمله لزجت مصنوعی  $\mathcal{E} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  به سمت راست روابط سینماتیک سطح تماس و سطح آزاد (معادلات (۴)، (۶) و (۷)) اضافه شده اند. ضریب ثابت کوچکی است که مقدار آن از مرتبه بزرگی  $10^{-3}$  انتخاب شده است. اضافه کردن این جملات تنها باعث جلوگیری از ناپایداریها می شود و تغییری در جواب مساله ایجاد نمی کند.

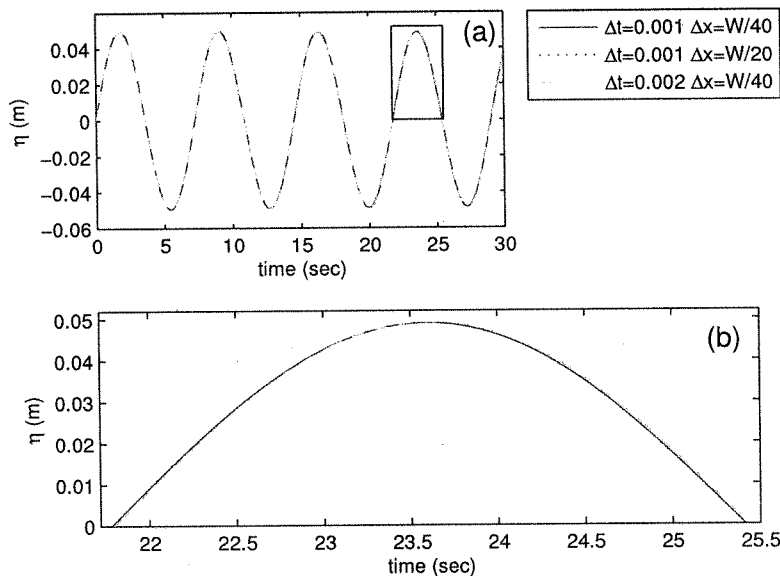
در هر گام زمانی گره های روی دیواره با توجه به ارتفاع جدید موج دوباره مش بندی می شوند. و برای حل مشکل گره های گوشه روش گره های دوتایی در گوشه ها به کار برده شده است [۱۲].



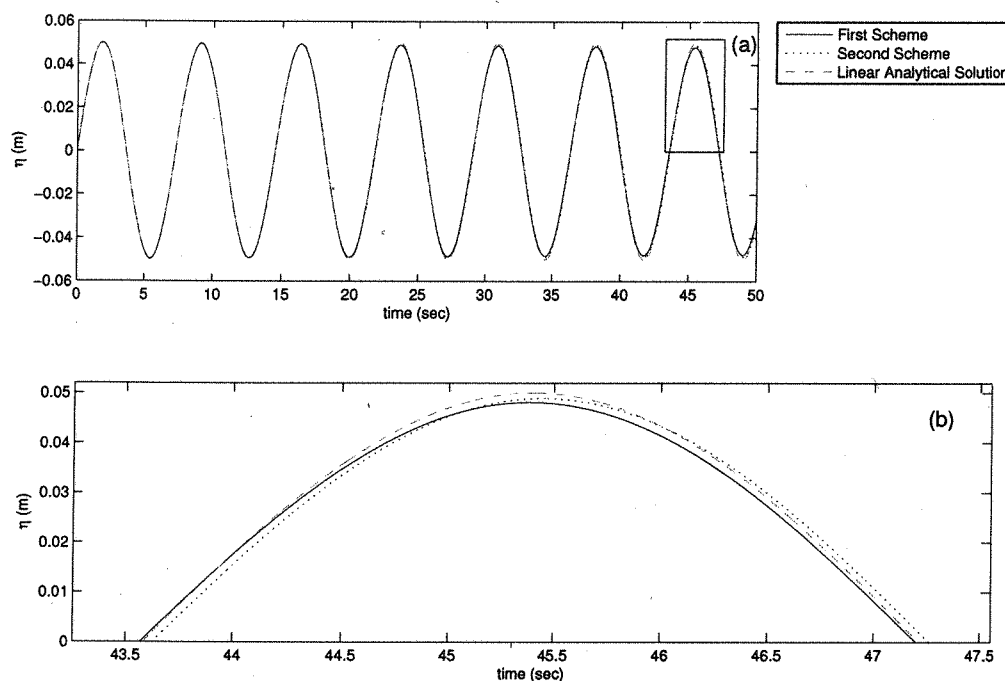
شکل (۲) - (a) تاریخچه زمانی حرکت قائم گره گوشه سمت راست شبیه سازی شده با استفاده از روش اول برای سه ترکیب مختلف مقدار گام زمانی و تعداد گره روی سطح آزاد، (b) شکل بزرگ شده قسمت مشخص شده در قسمت (a)

نتایج برای ترکیب‌های مختلف در هر دو روش ناچیز و کمتر از ۲٪ است؛ بنابراین نتایج مدل همگرا است و ناپایداری در نتایج نیز مشاهده نمی‌شود.

شکل (۴) تاریخچه زمانی حرکت قائم گره گوشه سمت راست در سطح تماس را برای موج درونی با استفاده از  $\Delta t = 0.001s$  و ۴۰ گره روی سطح تماس و سطح آزاد نشان می‌دهد. در این شکل نتایج شبیه سازی با استفاده از هر دو روش و حل تحلیلی خطی آورده شده اند. از این شکل نتیجه می‌شود اختلاف نتایج روش اول و حل تحلیلی عمدتاً در مقادیر ماکزیمم و مینیمم است؛ در حالی که با استفاده از روش دوم مقدار کوچکی اختلاف فاز نیز در نتایج به وجود می‌آید. مقادیر ماکزیمم و مینیمم منحنی با استفاده از روش دوم به مقادیر حل تحلیلی نزدیک‌تر است. حداکثر اختلاف بین نتایج روش اول و نتایج تحلیلی خطی تا انتهای زمان



شکل (۳) - (a) تاریخچه زمانی حرکت قائم گره گوشه سمت راست شبیه سازی شده با استفاده از روش دوم برای سه ترکیب مختلف مقدار گام زمانی و تعداد گره روی سطح آزاد، (b) شکل بزرگ شده قسمت مشخص شده در قسمت (a)



شکل (۴) - (a) نتایج شبیه سازی تاریخچه زمانی حرکت قائم گره گوشه سمت راست در سطح تماس برای موج درونی با استفاده از دو روش و حل تحلیلی خطی، (b) شکل بزرگ شده قسمت مشخص شده در قسمت (a)

معادلات ارائه شده است. نتایج به دست آمده از شبیه سازی امواج ایستاده با به کارگیری هر یک از این دو روش را می توان به صورت زیر خلاصه نمود:

۱- تا انتهای زمان شبیه سازی، نتایج دو روش برای امواج درونی دارای اختلافی کمتر از ۴٪ و برای امواج سطحی دارای اختلافی کمتر از ۲٪ است. دلیل وجود اختلاف کمتر در امواج سطحی تفاوت عمده دو روش در نحوه حل معادلات سطح تماس می باشد، که تاثیر آن در نتایج شبیه سازی امواج بیشتر مشاهده می شود.

۲- اختلاف نتایج عددی و تحلیلی خطی در شبیه سازی امواج درونی و سطحی به ترتیب به ۴٪ و ۱۵٪ می رسد.

۳- در صورت استفاده از روش مرجع [۱۲] زمان لازم برای اجرای برنامه به دلیل وجود مراحل سعی و خطا بیشتر از روش دوم خواهد بود.

۴- نتایج روش اول بر خلاف نتایج مرجع [۲] برای اختلاف چگالی کم (۵٪) نیز قابل قبول بوده، برنامه پایدار می ماند.

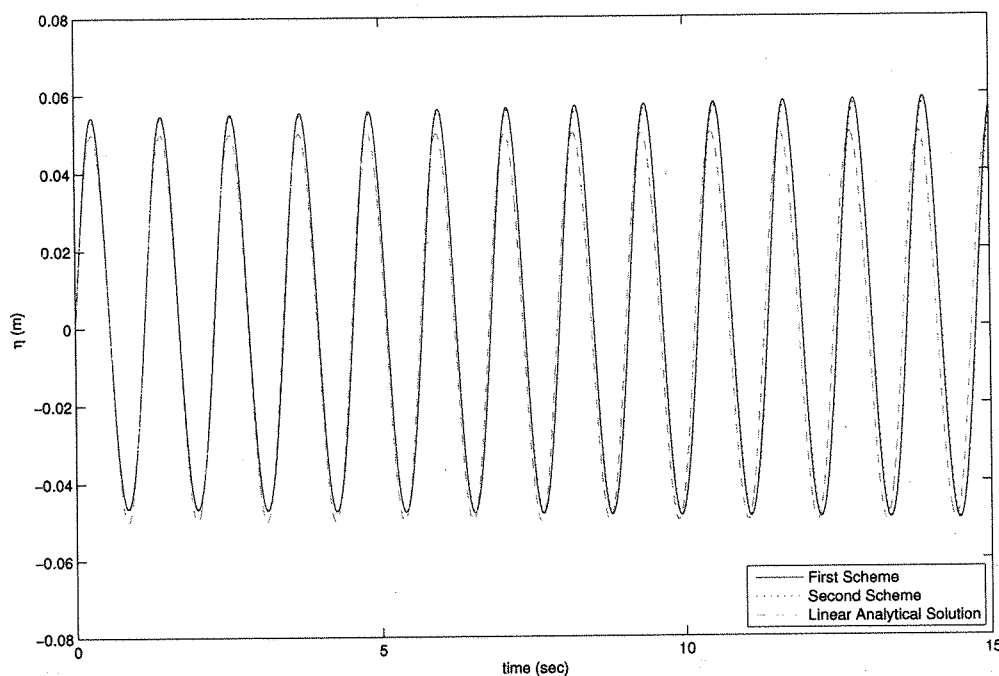
۵- زمان اجرای روش دوم حدوداً دو برابر زمان اجرای روش اول است؛ بنابراین با توجه به اختلاف اندک نتایج، استفاده از روش اول اقتصادی تر است.

شبیه سازی ۴٪ است. این مقدار برای روش دوم ۳٪ است. باید توجه داشت که حل تحلیلی خطی جواب دقیق مساله نیست و تنها برای مقایسه به کار رفته است.

شکل (۵) تاریخچه زمانی حرکت قائم گره گوشه سمت راست در سطح آزاد شبیه سازی شده با استفاده از هر دو روش و مقایسه آن با حل تحلیلی خطی را نشان می دهد. در این شبیه سازیها نیز از  $\Delta t = 0.001s$  و ۴۰ گره روی سطح آزاد و تماس استفاده شده است. گرچه اختلاف نتایج دو روش کمتر از ۲٪ است، اختلاف نتایج تحلیلی و عددی به ۱۵٪ نیز در مقادیر ماکزیمم منحنی می رسد. همچنین با گذشت زمان اختلاف فاز در نتایج تحلیلی و عددی به وجود می آید. با توجه به غیرخطی بودن شبیه سازی عددی و خطی بودن نتایج تحلیلی، این اختلاف قابل توجیه بوده، در شبیه سازیهای غیرخطی انجام شده در تحقیقات قبل نیز مشاهده شده است [۱۱].

## ۵- خلاصه و نتیجه گیری

در سیال دولایه ارتباط مقادیر پتانسیل و شار مربوط به هر لایه در سطح تماس از طریق روابط دینامیک و سینماتیک سطح تماس، باعث می شود حل معادلات در هر لایه به صورت جداگانه ممکن نباشد. دو روش برای گسسته سازی و حل



شکل (۵) - نتایج شبیه سازی تاریخچه زمانی حرکت قائم گره گوشه سمت راست در سطح آزاد برای موج سطحی با استفاده از دو روش و حل تحلیلی خطی

Miropol'sky, Y.Z.; Dynamics of Internal gravity Waves in the Ocean, Kluwer Academic Publishers, 2001. [۸]

Philips, O.M.; The Dynamics of the Upper Ocean, 2<sup>nd</sup> Edition, Cambridge, Cambridge University Press, 1977. [۹]

Reid, J. L.; " Observation of internal tides in October 1950", Trans. Amer. Geophys. Un., vol. 37, p.p. 278-286, 1956. [۱۰]

Ryu, S., Kim, M.H., Lynett, P.J., : " Fully nonlinear wave-current interactions and kinematics by a BEM-based numerical wave tank" , J. Computational Mech., vol 32, p.p. 336-346, 2003. [۱۱]

Sugino, R.; Imai, H.; Tosaka, N.; " Boundary Element Scheme with Domain Decomposition Approach for Moving Interface Phenomenon", 12<sup>th</sup> International Conference on Domain Decomposition Methods, p.p. 208-214, 2001. [۱۲]

Wrobel, L.C.; The Boundary Element Methods, Vol. 1, John Wiley & Sons, 2002. [۱۳]

#### ۶- مراجع

Grilli, S.T.; Horrillo, J.; "Numerical Generation and Absorption of Fully Nonlinear Periodic Waves", J. Eng. Mech., vol. 123 (10), p.p. 1060-1069, 1997. [۱]

Heister, S.D.; " Boundary Element Methods for Two-Fluid Free Surface Flows ", J. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 19, p.p. 309-317, 1997. [۲]

Hamano, K.; Murashige, S.; Hayamai, K.; " Boundary Element Simulation of Large Amplitude Standing Waves in Vessels ", J. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 27, p.p. 565-574, 2003. [۳]

Jamali, M.; Surface Wave Interaction with Oblique internal waves, Ph.D Thesis, University of British Columbia, 1998. [۴]

Laurent, L. S.; Garret, C.; " The role of internal tides in mixing the deep ocean" , J. Phys. Oceanogr., vol. 32, p.p. 2882-2892, 2002. [۵]

Longuet-Higgins, M.S.; Cokelet, E.D.; " The Deformation of Steep Surface Waves on Water. I. A Numerical Method of Computation ", Proc. R. Soc. London, A 350, p.p. 1- 26, 1976. [۶]

Medina, D. E.; Ligget, J.A.; Birchwood, R.A.; Torrance, K.E.; " A Consistent Boundary Element Method For Free Surface Hydrodynamic Calculations ", J. Numerical Methods in Fluids, vol. 12, p.p. 835-857, 1991. [۷]