ترانهاده دوم یک مشتق روی یک جبر باناخ

مجید اسحقی گرجی [i]؛ علی غفاری [ii]

چکیده

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A- مدول باناخ باشد. اگر $D: A \to X^*$ یک مشتق باشد آنگاه شرایطی را روی A و D می‌یابیم که ترانهاده دوم D؛ یعنی $D'': A^{**} \to (X^{**})^*$ یک مشتق باشد. دیلز -رودیگوئز و ولاسکو در سال ۲۰۰۱ میلادی مسأله فوق را در حالت خاص وقتی $X = A$، حل کرده اند. در این مقاله، مسأله فوق با راه بسیار کوتاهی اثبات و سپس کاربردهایی از آن ذکر شده است.

کلمات کلیدی

جبر باناخ، میانگین پذیری ضعیف، ضرب آرنز، منظم آرنز.

The Second Transepose of a Derivation

M. Eshaghi-Gordji, A. Ghaffari

ABSTRACT

Let A be a Banach algebra and let X be a Banach A-bimodule. Let $D: A \to X^*$ be a derivation. By some conditions on A and X, we show that $D'': A^{**} \to (X^{**})^*$ is a derivation. Dales, Rodrigues and Velasco proved the special case of our result for X=A. We prove the generalization of their result by a shorter proof.

KEYWORDS

Banach algebra, Derivation, Amenability, Weak amenability, Arens product, Arens regular.

۱- مقدمه

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A- مدول باناخ باشد. در این صورت دوگان X^* از X ، با ضرب‌های مدولی زیر A- مدول باناخ است.

$$<ax',b>=<x',ba>,<x'a,b> =<x',ab> \quad (x' \in X^*, a,b \in A). \quad (۱)$$

به عنوان مثال، اگر A را یک A-مدول باناخ در نظر بگیریم آنگاه A^* هم یک A-مدول باناخ است.

اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه A^{**} دوگان دوم A با ضرب زیر؛ که ضرب آرنز نوع اول است، یک جبر باناخ است.

$$<FG,f>=<F,Gf>(F,G \in A^{**}, f \in A^*) \quad (۲)$$

که $Gf \in A^*$ صورت زیر تعریف می‌شود:

$$<Gf,a>=<G,fa> \quad (a \in A). \quad (۳)$$

[i] استادیار دانشگاه سمنان، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه سمنان، سمنان: Email:maj_ess@yahoo.com madjid.eshaghi@gmail.com

[ii] استادیار دانشگاه سمنان، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه سمنان، سمنان: Email:ghaffari1380@yahoo.com

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد ضرب آرنز می توانید به [۱] و[۵] مراجعه کنید.

فرض کنیم X یک A- مدول باناخ باشد؛ نگاشت خطی $D:A\rightarrow X$ را یک مشتق می‌نامیم؛ هرگاه برای هر $a,b\in A$، $D(ab)=D(a)b+aD(b)$.

در این مقاله تمام مشتق‌ها را کراندار در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال، اگر $x\in X$، آنگاه $\delta_x:A\rightarrow X$ با ضابطه $\delta_x(a)=ax-xa$ یک مشتق است. این نوع مشتق‌ها را مشتق‌های درونی از A به X می‌نامیم. اگر X یک A-مدول باناخ باشد آنگاه X^{**} دوگان دوم X با ضرب‌های مدولی زیر یک A^{**}-مدول باناخ است.

$$a''x''=w^*-\lim_{\alpha} w^*-\lim_{\beta}\hat{a}_\alpha\hat{x}_\beta \ , \qquad (۴)$$

$$x''a''=w^*-\lim_{\beta} w^*-\lim_{\alpha}\hat{x}_\beta\hat{a}_\alpha .$$

که در آن، $a''\in A^{**}$, $x''\in X^{**}$ بصورت زیر است:

$$x''=w^*-\lim_{\beta}\hat{x}_\beta \ in\ X^{**}, \qquad (۵)$$

$$a''=w^*-\lim_{\alpha}\hat{a}_\alpha in\ A^{**}$$

فرض کنیم X یک A- مدول باناخ باشد. اگر ابتدا از رابطه (۴) و سپس از رابطه (۱) استفاده کنیم به سادگی می‌توان دید که $(X^{**})^*$ یک A^{**} -مدول باناخ است؛ اما از رابطه (۱) می‌توان دید که X^* یک A^* - مدول باناخ است و بنا به (۴)، $(X^*)^{**}$ یک A^{**} - مدول باناخ است. با توجه به توضیحات فوق X^{***} دارای دو ساختار A^{**} - مدولی است. گوردو در سال ۱۹۹۷ در این خصوص قضیه زیر را ثابت کرده است [۹].

۱—۱ قضیه: اگر $D:A\rightarrow X$ یک مشتق باشد آنگاه $D'':A^{**}\rightarrow X^{**}$ یک مشتق است.

با توجه به قضیه فوق اگر X یک A -مدول باناخ و $D:A\rightarrow X^*$ یک مشتق باشد آنگاه $D'':A^{**}\rightarrow (X^*)^{**}$ یک مشتق است. از طرفی بنا به توضیحات فوق، ضرب‌های مدولی $(X^*)^{**}$ و $(X^{**})^*$ به عنوان A^{**} - مدول، یکسان نیستند؛ در نتیجه، اگر D'' را به عنوان یک نگاشت از A^{**} به $(X^{**})^*$ در نظر بگیریم، نمی‌توان قضیه ۱-۱ را برای اثبات اینکه $D'':A^{**}\rightarrow (X^{**})^*$ یک مشتق است، به کار برد. در این مقاله شرایطی را می‌یابیم که با وجود این شرایط، $D'':A^{**}\rightarrow (X^{**})^*$ یک مشتق باشد و سپس از این مطلب در میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ استفاده می‌کنیم. در اینجا لازم می‌دانیم تاریخچه ای از مسأله فوق را بیاوریم.

۲—۱ تعریف: جبر باناخ A را میانگین پذیر گوییم هرگاه برای هر A – مدول باناخ X ، هر مشتق از A به X^* درونی باشد.

۳—۱ تعریف: جبر باناخ A را میانگین پذیر ضعیف گوییم هر گاه هر مشتق از A به A^* درونی باشد.

مفهوم میانگین پذیری جبرهای باناخ را اولین بار جانسون در سال ۱۹۷۲ میلادی مطرح کرد [۱۰] و مفهوم میانگین پذیری ضعیف را اولین بار در سال ۱۹۸۹ میلادی باده – کورتیس و دیلز برای جبرهای باناخ جابجایی مطرح کردند و سپس آن را توسط جانسون برای تمام جبرهای باناخ تعمیم داد [۲]، [۱۱].

بدیهی است که هر جبر باناخ میانگین پذیر، میانگین پذیر ضعیف است و عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال، اگر G یک گروه موضعاً فشرده و هاسدورف باشد آنگاه $L^1(G)$ میانگین پذیر است اگر و فقط اگر G میانگین پذیر (به مفهوم گروهی)باشد[۱۰].

در حالی که جانسون در سال ۱۹۹۰ ثابت کرده است که برای هر گروه موضعاً فشرده و هاسدورف G ، جبر $L^1(G)$ میانگین پذیر ضعیف است [۱۱]. در نتیجه، اگر G را گروهی در نظر بگیریم که میانگین پذیر نباشد (مثلاً $G=F_2$ گروه آزاد تولید شده به وسیله دو عضو) آنگاه $L^1(G)$ میانگین پذیر ضعیف است و میانگین پذیر نیست.

به عنوان مثالی دیگر از جبرهایی که میانگین پذیر نیستند و میانگین پذیر ضعیف هستند می‌توان C^*- جبرهای غیر هسته‌ای را نام برد [۳].

سؤالاتی که به طور طبیعی در مورد وجود ارتباط بین میانگین پذیری (میانگین پذیری ضعیف) جبر باناخ A با میانگین پذیری (میانگین پذیری ضعیف) A^{**} با ضرب اول آرنز می‌توان مطرح کرد بصورت زیر است:

سؤال (۱): آیا میانگین پذیری A^{**} میانگین پذیری A را نتیجه می دهد؟

سؤال (۲): آیا میانگین پذیری ضعیف A^{**} میانگین پذیری ضعیف A را نتیجه می‌دهد؟

قابل ذکر است که عکس سؤالات فوق باارایه مثال‌های ساده‌ای رد می‌شوند. مثلاً اگر A را برابر جبر گروهی $L^1(R)$ بگیریم آنگاه A میانگین پذیر ضعیف (و میانگین پذیر) است در حالی که A^{**} میانگین پذیر ضعیف (و میانگین پذیر) نیست.

مثبت بودن جواب سؤال (۱) را گوردو در سال ۱۹۹۷ میلادی و قهرمانی – لوی و ویلیس در سال ۱۹۹۸ میلادی با دو روش مختلف ثابت کرده‌اند [۸]، [۹]؛

اما سؤال (۲) با وجود شرایط خاص در چند مقاله بررسی شده و همچنان یک مسئله باز است.

قهرمانی – لوی و ویلیس در سال ۱۹۹۸ میلادی سؤال (۲) را، با شرط اینکه A یک ایده آل چپ A^{**} باشد، ثابت کرده‌اند [۸].

دیلز –رودیگوئز و ولاسکو در سال ۲۰۰۱ میلادی با فرض اینکه A منظم آرنز است و هر مشتق از A به A^* به طور ضعیف فشرده باشد سؤال (۲) را حل کرده اند[۴]. قهرمانی و لآلی در سال ۲۰۰۲ میلادی مسأله فوق را، با شرط اینکه A یک جبر دوگان باشد، ثابت کرده‌اند [۷].

اسحاقی و فیلالی قضیه دیلز – رودریگوز و ولاسکو را با اثباتی ساده‌تر حل و همچنین در حالتی که A یک ایده آل راست A^{**} باشد، سؤال (۲)را حل کرده‌اند[۶].

در این مقاله، تعمیمی از قضیه دیلز- رودریگوز و ولاسکورا ارایه می‌دهیم و سپس در میانگین پذیری ضعیف دوگان دوم جبرهای باناخ از این مطلب استفاده می‌کنیم.

۲- نتایج اصلی

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A- مدول باناخ باشد. اگر $D:A\to X^*$ یک مشتق باشد آنگاه ترانهاده دوم D؛ یعنی $D'':A^{**}\to X^{***}$ یک نگاشت خطی است. فرض کنیم $a'',b''\in A^{**}$ و $(b_\beta),(a_\alpha)$ نتهایی در A باشند که:

$$a''=w^*-\lim_\alpha \hat{a}_\alpha, b''=w^*-\lim_\beta \hat{b}_\beta$$

در این صورت، چون D''، w^*-w^* پیوسته است پس داریم:

$$D''(a''b'')=D''(w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta \hat{a}_\alpha \hat{b}_\beta)= w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta D(a_\alpha b_\beta)=w^*-\lim_\alpha w^* -\lim_\beta D(a_\alpha)b_\beta+w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta a_\alpha D(b_\beta) +D''(a'')b''+w^*-\lim_\alpha a_\alpha D''(b''). \quad (۶)$$

با توجه به رابطه (۶) ، D'' یک مشتق است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$a''D''(b'')=w^*-\lim_\alpha \hat{a}_\alpha D''(b'') \quad (۷)$$

برای هر a'' و b'' در A'' که $a''=w^*-\lim_\alpha \hat{a}_\alpha$.

رابطه (۷) برقرار است اگر و فقط اگر برای هر $x''\in X^{**}$ ،

$$<D''(b'')x'',a''> = <a''D''(b''),x''> \quad (۸)$$
$$=\lim_\alpha <\hat{a}_\alpha D''(b''),x''>$$
$$=\lim_\alpha <D''(b'')x'',\hat{a}_\alpha>$$

و رابطه (۸) برقرار است اگر و فقط اگر نگاشت:

$$D''(b'').x'':A^{**}\to\mathbb{C}$$

w^*-w^*- پیوسته باشد و این معادل است با اینکه $D''(b'').x''\subseteq(\hat{A^*})$ در نتیجه قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

۲—۱ قضیه: فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A- مدول باناخ باشد. اگر $D:A\to A^*$ یک مشتق باشد آنگاه $D'':A^{**}\to(X^{**})^*$ یک مشتق است اگر و فقط اگر $D''(A^*).X^{**}\subseteq(\hat{A^*})$.

۲—۲ نتیجه (قضیه ۷-۱[۴]): فرض کنیم A جبر باناخ و $D:A\to A^*$ یک مشتق باشد در این صورت D'' یک مشتق از A^{**} به $(A^{**})^*$ است اگر و فقط اگر $D''(A^{**}).A^{**}\subseteq(\hat{A^*})$.

۲—۳نتیجه: فرض کنیم A یک جبر و X یک A- مدول باناخ باشد. اگر X انعکاسی باشد و $D:A\to X^*$ یک مشتق باشد آنگاه $D'':A^{**}\to(X^{**})^*$ یک مشتق است.

با استفاده از نتیجه ۲-۲- به سادگی می‌توان دید که اگر جبر باناخ A منظم آرنز باشد و هر مشتق از A به A^* به طور ضعیف فشرده باشد آنگاه میانگین پذیری ضعیف A^{**} ، میانگین پذیری ضعیف A را نتیجه می‌دهد.

فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\varphi:A\to\mathbb{C}$ یک تابعک خطی ضربی غیر صفر باشد در این صورت $\mathbb{C}$ با عمل‌های مدولی زیر یک A- مدول باناخ است.

$$a.c=\varphi(a)c\ ,\ c.a=c\varphi(a)(a\in A,c\in\mathbb{C}).$$

A- مدول فوق را با $\mathbb{C}_\varphi$ نمایش می‌دهیم و هر مشتق از A به چنین مدول‌هایی را یک مشتق نقطه‌ای روی A می‌نامیم. اثبات قضیه زیر را می‌توانید در [۳] ببینید.

۲—۴ قضیه: اگر جبر باناخ A میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه تنها مشتق نقطه‌ای روی A برابر صفر است.

فرض کنیم $\varphi\in\Omega_A$ یک تابعک صفر ضربی غیر صفر روی A باشد و $d_\varphi:A\to\mathbb{C}_\varphi$ یک مشتق نقطه‌ای روی A

باشد در این صورت، نگاشت $D=d_\varphi\otimes\varphi:A\to A^*$ با ضابطه $(d_\varphi\otimes\varphi)(a)=d_\varphi(a)\varphi$ یک مشتق از A به A^* است.

برای جبر باناخ A، فضای برداری تولید شده به وسیله مجموعه $\{ab:a,b\in A\}$ را با A^2 نمایش می‌دهیم. با استفاده از قضیه ۴-۲- می‌توان قضیه زیر را نیز ثابت کرد.

۵—۲ قضیه: اگر جبر باناخ A میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه A^2 در A چگال است.

بنابراین چگال بودن A^2 در A و صفر بودن تمام مشتق‌های نقطه‌ای روی A دو شرط لازم برای میانگین پذیری ضعیف A هستند.

اگر چه مسأله (۲) همچنان حل نشده است؛ اما در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر A^{**} میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه A دو شرط لازم برای میانگین پذیری ضعیف را که در بالا ذکر شده‌اند، دارد.

۶—۲ قضیه: فرض کنیم $n\in N$ و A یک جبر باناخ باشد. اگر $A^{(2n)}$ (دوگان $2n$ ام A) با ضرب اول آرنز میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه:

(۱) هر مشتق نقطه ای روی A صفر است.

(۲) A^2 در A چگال است.

(۳) اگر $\{d_\varphi\otimes\varphi:\varphi\in\Omega_A\}$ در مجموعه تمام مشتق‌ها از A به A^* چگال باشد آنگاه A جابجایی و میانگین پذیر ضعیف است.

برهان: با توجه به قضیه ۴-۲ ، می‌دانیم هر مشتق نقطه‌ای روی $A^{(2n)}$ صفر است برای اثبات (۱) کافی است که گزاره زیر را ثابت کنیم:

▲: فرض کنیم B یک جبر باناخ باشد. اگر هر مشتق نقطه‌ای روی B^{**} درونی باشد آنگاه هر مشتق نقطه‌ای روی A درونی است.

برای اثبات ▲ فرض می‌کنیم $\varphi:A\to\mathbb{C}$ یک تابعک خطی ضربی پیوسته باشد در این صورت ترانهاده دوم آن یک نگاشت خطی ضربی پیوسته از A^{**} به $\mathbb{C}$ است؛ زیرا برای هر $a'',b''\in A^{**}$ اگر

$$w^*-\lim_\beta \hat{b}_\beta=b'',\ w^*-\lim_\alpha \hat{a}_\alpha=a''$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\varphi''(a''b'')&=\varphi''(w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta \hat a_\alpha\hat b_\beta)\\&=w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta\varphi''(\hat a_\alpha \hat b_\beta)\\&=w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta\varphi(a_\alpha b_\beta)\\&=w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta\varphi(a_\alpha)\delta(b_\beta)\\&=w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta\varphi''(\hat a_\alpha)\delta''(\hat b_\beta)\\&=\varphi''(a'')\varphi''(b'').\end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}(d_\varphi)''(a''b'')&=(d_\varphi)''(w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta \hat a_\alpha\hat b_\beta)\\&=w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta d_\varphi''(\hat a_\alpha\hat b_\beta)\\&=w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta d_\varphi(a_\alpha b_\beta)\\&=w^*-\lim_\alpha w^*-\lim_\beta(d_\varphi(a_\alpha)(b_\beta)\\&\quad+\varphi(a_\alpha)d_\varphi(b_\beta))\\&=(d_\varphi)''(a'')''\varphi(b)''+\varphi(a)''(b'')\end{aligned}$$

در نتیجه، $(d_\varphi)''$ یک مشتق از A'' به $\mathbb{C}_{\varphi''}$ است. لذا برابر صفر است . از طرفی $(d_\varphi)''$ توسیع d_φ بر A'' است پس داریم $d_\varphi=0$.

برای اثبات (۲) از قضیه ۴-۲ استفاده می‌کنیم؛ در واقع؛ کافی است که ثابت کنیم اگر $(A^{(2n)})^2$ در $A^{(2n)}$ چگال باشد آنگاه A^2 در A چگال است.

بدین منظور کافی است ثابت کنیم اگر $(A^{**})^2$ در A^{**} چگال باشد آنگاه A^2 در A چگال است و برای $n\ge 2$ ، اثبات به استقرا روی n انجام می‌شود.

حال فرض کنیم $(A^{**})^2$ در A^{**} چگال باشد و $a\in A$؛ در این صورت دنباله‌ای مانند $\{\varsigma_n\}$ در A^{**} موجود است که:

$$\varsigma_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \hat a,\ \varsigma_n=\sum_{k=1}^{k(n)} M_{n,k}N_{n,k}$$

از طرفی برای هر n,k نتهای $(a_{n,k,i})_{i\in I},(b_{n,k,j})_{j\in J}$ در A موجودند که در A^{**} داشته باشیم:

$$w^*-\lim_i a_{n,k,i}=M_{n,k}\ ,\quad w^*-\lim_j b_{n,k,i}=N_{n,k}$$

لذا داریم:

$$\hat a=\lim_n w^*-\lim_i w^*-\lim_j \sum_{k=1}^{k(n)} M_{n,k,i}N_{n,k,j}=M_{n,k}$$

در نتیجه:

$\hat a\in\overline{(\hat A\hat A)}^{w^*}$ و داریم $\hat a\in\overline{(AA)}^{weak}$؛ در نتیجه با استفاده از قضیه تجزیه سازی کوهن – هویت، داریم $a\in A^2$ و حکم نتیجه می‌شود.

برای اثبات (۳) ابتدا با توجه به (۱) می‌توان دید که تنها مشتق از A به A^* صفر است پس A میانگین پذیر ضعیف است. از طرفی برای هر $f \in A^*$ و $a,b \in A$ داریم:

$$0 =< \delta_f(a), b >=< f.a - a.f, b >=< f, ab - ba >$$

لذا بنا به قضیه هان-باناخ A جابجایی است.

۳- تقدیر و تشکر

مؤلفان از داوران محترم به خاطر نظرات ارزشمند آنها سپاسگزارند.

٤- مراجع

[۱] R. Arens, *The adjoint of a bilinear operation,* Proc. Amer. Math. Soc. 2(1951), 839-848.

[۲] W. G. Bade, P. C. Curtis and H. G. Dales, *Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras,* Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 359-377.

[۳] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity,* Oxford, New York, 2000.

[۴] H. G. Dales, A. Rodriguez-Palacios and M. V. Velasco, *The second transpose of a derivation,* J. London Math. Soc. (2) 64(2001), 707-721.

[۵] J. Duncan and S. A. R. Hosseiniun, *The second dual of Banach algebra,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Set. A 84(1979, 309-325.

[۶] M. Eshaghi-Gordji and M. Filali, *Weak amenability of the second dual of a Banach algebra,* Studia Math., 182, (2007, No. 3, 205-213.

[۷] F. Ghahramani, J. Laali, *Amenability and topological centers of the second duals of Banach algebras,* Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 6(2002), 191-197.

[۸] F. Ghahramani, R. J. Loy and G. A. Willis, *Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 124, no 5 (1996), 1489-1497.

[۹] F. Gourdeau, *Amenability and the second dual of a Banach algebra.* Studia Math. 125, 1997 no 1, 75 81.

[۱۰] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras,* Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1972).

[۱۱] B. E. Johnson, *Weak amenability of group algebras,* Bull. London Math. Soc. 23(1991), 281-284.