

# تعیین مسیر حرکت بهینه فضاپیما با استفاده از روش اجزای محدود در دامنه زمان

سید احمد فاضل زاده حقیقی<sup>i</sup>؛ غلامعلی ورزندیان<sup>ii</sup>

## چکیده

در این مقاله، مسیر بهینه حرکت یک فضاپیما به کمک روش اجزای محدود در دامنه زمانی تعیین شده است. معادلات مسیر حرکت در مختصات قطبی با استفاده از معادله گرانش نیوتون و به صورت معادلات فضای حالت ارایه شده است. با در نظر گرفتن تابع عملکردی حداقل تلاش کنترلی و زمان انتهای ثابت معادلات حاکم بر مسأله به دست آمده است. با گسسته سازی مسأله در محدوده زمانی و استفاده از روش حساب تغییرات فرم اجزای محدود معادلات استخراج می‌شود. نهایتاً پس از تنظیم معادلات گسسته شده، یک دستگاه معادلات جبری غیر خطی حاصل می‌شود. شرایط مرزی در آغاز و پایان به گونه‌ای است که انجام حل به یک روش سعی و خطا نیاز دارد. با روش سعی و خطای نیوتن رافسون پاسخ بهینه به دست آمده است. مسیر بهینه حرکت به همراه متغیرهای حالت و کنترلی مربوطه محاسبه و ارایه شده که با نتایج روش خطی سازی گام به گام مطابقت خوبی را نشان می‌دهد.

## کلمات کلیدی

مسیر فضاپیما، کنترل بهینه، اجزای محدود زمانی، حساب تغییرات

## *Determination of Optimal Spacecraft Trajectory Using Time Domain Finite Element Method*

S.Ahmad Fazelzadeh ; Gh.Ali Varzandian

### ABSTRACT

In this paper, the methodology of time-domain finite element is utilized to determine the optimal spacecraft trajectory. The problem has been formulated through the variational approach. The time-domain finite element discretized form of the performance index, state equation constraints and the related boundary conditions are presented. The capability of the method is examined and to verify its accuracy, the results are compared with those of the step-by-step linearization method where excellent agreements are observed. The effects of the number of time segments on the performance index are examined.

### KEYWORDS

spacecraft trajectory – optimal control – time domain finite element – calculus of variations

<sup>i</sup> استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز: Fazelzad@shirazu.ac.ir

<sup>ii</sup> دانشجوی دوره کارشناسی ارشد مهندسی هوا فضا، دانشگاه شیراز: varzandian@gmail.com



بودن طول مسیر را به کار می‌گیرند [۲]، [۱۱]. انجام مانور ملاقات دو سفینه؛ که هر دو حرکت فعال و پویا با اعمال نیرو دارند [۱۲] و انجام مانور گریز ضربه‌ای با برگشت به وسیله نیروی رانش به پایین به صورت انجام ملاقات [۱۳]، مسائل حل شده از این دست می‌باشند. با استفاده از روش‌های حل تقریبی و برنامه ریزی غیر خطی مسائل مسیر حرکت بهینه شبیه سازی شده است [۱۴]-[۱۷]. کاربرد حساب تغییرات در بررسی مسأله کنترل بهینه به یک سری معادله‌های غیر خطی با شرایط مرزی دو نقطه‌ای برای متغیرهای حالت و وابسته حالت می‌انجامد و می‌توان با استفاده از روش اجزای محدود در دامنه زمان به حل مسائل پیچیده اقدام کرد [۱۸]، [۱۹]. به طور کلی برای حل مسائل کنترل بهینه دو دسته از روش‌ها رایج هستند که عبارتند از روش‌های مستقیم و روش‌های غیر مستقیم [۲۰]. در روش مستقیم، معادلات دیفرانسیل سیستم، گسسته شده و با یک سری از معادلات جبری غیر خطی تقریب زده می‌شوند و بدین ترتیب، یک مسأله بهینه سازی پارامتری جبری به دست می‌آید. چنین روشی روش مستقیم نام دارد. در روش‌های غیر مستقیم، معادلات سیستم بر اساس تئوری حساب تغییرات به دست می‌آیند و با روش‌هایی مانند کاهش سریع، شبه خطی سازی و تغییر اکستریم‌ها حل می‌شوند.

در این مقاله، با استفاده از قوانین نیوتن برای مسائل دو جسمی و در نظر گرفتن مدل پیش‌رانه ثابت با زاویه اثر متغیر برای فضا پیمای و استفاده از تئوری کنترل بهینه با شاخص عملکرد حداقل تلاش کنترلی، مسأله انتقال به مدارهایی با فاصله نسبتاً کم مورد توجه قرار گرفته و سپس معادلات حاصله با روش اجزای محدود در دامنه زمان، به عنوان یک روش غیر مستقیم، گسسته سازی شده است. ارتباط زنجیروار معادلات گسسته شده به یکدیگر و ایجاد مجموعه معادلاتی که بیانگر مجهولات نقاط مرزی ابتدا و انتهاست، دستگاه معادلاتی غیر خطی را نتیجه داده است؛ و نهایتاً با کاربرد روش نیوتن-رافسون در حل دستگاه‌های معادلات جبری غیر خطی پاسخ بهینه معادلات ارائه شده است.

## ۲- مدل دینامیکی مسأله

در بررسی حرکت انتقالی ماهواره‌ها و سفینه‌های فضایی از فرض نقطه مادی و جرم متمرکز در آنها استفاده و دینامیک حرکت به صورت دینامیک نره؛ که بیان حرکت مرکز جرم سیستم است، استفاده می‌شود. همچنین فرض بر این است که در طول انجام مانور حرکت انتقالی سیاره به دور خورشید تأثیری در دینامیک سیستم نمی‌گذارد که با توجه به زمان کوتاه بسیاری از مانورها منطقی است؛ اما در انجام سفرهای بین

پیشرفت و گسترش ارتباطات ماهواره‌ای، پیش بینی شرایط جوی، هدایت و ناوبری هواپیماها و کشتی‌ها و موارد مشابه از یک سو و از سوی دیگر گسترش روزافزون دانش بشری و دسترسی وی به جهان خارج و کرات دیگر مسائل بسیاری را مطرح می‌سازند که حل هر کدام گامی در راستای نیل به آرمان‌های انسان امروزی است. یک سری از این مسائل در خصوص انتقال بهینه فضاپیماها از یک مدار به مداری دیگر است که می‌تواند در چارچوب سفری بین سیاره‌ای یا اطراف یک سیاره صورت پذیرد. ملاقات فضاپیمای آتلانتیس و ایستگاه فضایی میر، سرویس تلسکوپ فضایی هابل و همچنین برنامه ساخت ایستگاه فضایی بین‌المللی نمونه‌هایی از این گونه مسائل هستند [۱]، [۲].

برای انجام مانورهای مداری به انرژی و نیروی کنترل شده نیاز است که نتیجه آن تغییر بردار سرعت و در نتیجه تعویض مدار است. به این منظور مدل‌های ضربه‌ای در موتورهای ماهواره‌ها و سفینه‌های فضایی برای مدت‌ها مورد استفاده بودند که در حقیقت، اعمال تغییر بردار سرعت در زمانی کوتاه می‌باشد. به دلیل خطا در رسیدن به مدار هدف در جهت گیری اشتباه نیروی رانش موتور و همچنین صدمه دیدن سیستم‌های درونی ماهواره در اثر نیروی ضربه‌ای زیاد، مدل‌های موتور با نیروی رانش پایین مورد توجه قرار گرفته‌اند که در آنها اندازه نیروی رانش ناچیز؛ ولی زمان اعمال آنها طولانی است. در نتیجه می‌توان با انجام کنترل روی جهت گیری نیرو، دقت مورد نیاز را در رسیدن به مدارهای مقصد به دست آورد. مسائل بهینه سازی زیادی در مانورهای ماهواره‌ها مطرح و حل شده‌اند که کاربردهای دوبعدی داشته‌اند [۲]-[۱۳].

مسأله انتقال بین دو مدار بیضوی هم صفحه به وسیله نیروی ضربه‌ای [۳]، [۴]، انتقال به مدار سنکرون زمین [۵]، قرار دادن ماهواره در مداری حول مریخ [۶]، ملاقات بین مدارهای دایره‌ای هم صفحه با زمان پایان مشخص با استفاده از روش‌های چند ضربه‌ای [۷]، ملاقات بهینه بین مدارهای بیضوی به وسیله بادبان‌های خورشیدی و کنترل جهت گیری آنها [۸] و انجام مانورهای گریز دوبعدی در صورت احتمال برخورد با جرم‌های سرگردان آسمانی [۹] بررسی رفتار دینامیکی فضاپیماها بر اساس المان‌های مداری نسبی [۱۰] از جمله نمونه‌هایی هستند که در کنترل بهینه حرکت دوبعدی سفینه‌های فضایی به چشم می‌خورند.

بسیاری از پژوهشگران به دلیل رفتار غیر خطی معادلات حرکت، معمولاً روش‌های خطی ساده با فرض کوتاه

شتاب در جهت‌های  $r$  و  $\theta$  هستند. ضریب  $\mu$  نیز بیانگر ثابت گرانشی سیاره است. مؤلفه‌های  $u_r$  و  $u_\theta$  شتاب‌های ناشی از سیستم پیش‌رانش فضاییما به عنوان پارامتر کنترلی سیستم بوده و برابرند با:

$$u_r = \frac{T}{m} \sin \beta(t) \quad (5)$$

$$u_\theta = \frac{T}{m} \cos \beta(t) \quad (6)$$

برای بیان معادله‌های (۱) تا (۴) به صورت معادله‌های حالت سیستم، متغیرهای حالت  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \dot{r}, x_4 = r\dot{\theta} \quad (7)$$

که در شکل (۱-ب)، جهت مثبت متغیرهای حالت و کنترلی مسأله نشان داده شده است؛ بنابراین می‌توان معادلات حرکت (۱) تا (۴) را در مختصات فضای حالت به صورت معادلات غیر خطی زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_4}{x_1} \\ \dot{x}_3 &= -\frac{\mu}{x_1^2} + \frac{x_4^2}{x_1} + u_r \\ \dot{x}_4 &= -\frac{x_3 x_4}{x_1} + u_\theta \end{aligned} \quad (8)$$

### ۳- فرم تضعیف شده معادلات کنترل بهینه به کمک حساب تغییرات

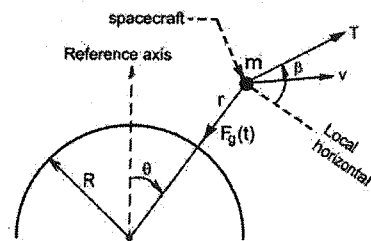
سیستمی شامل  $n$  متغیر حالت  $x$  و  $m$  کنترل  $u$  را در نظر می‌گیریم. همچنین معادله حالت سیستم به صورت  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  نوشته می‌شود. اجزای تشکیل دهنده شاخص عملکردی  $J_0$  را با یک انتگرال گیر  $L(x, u, t)$  و توابع گسسته  $\phi(x(t), t)$  (تعریف شده در ابتدا و انتهای بازه زمانی) تعریف می‌کنیم. علاوه بر این، هر قیدی که در ابتدا و انتهای بازه زمانی بر روی متغیرهای حالت و زمان وجود داشته باشد با مجموعه توابع  $\psi(x(t), t)$  معرفی می‌شود. این قیود و معادلات حالت سیستم به ترتیب با ضرایب لاگرانژ  $v$  (تعریف شده در ابتدا و انتهای بازه زمانی) و  $p(t)$  به رابطه مربوط به شاخص عملکردی افزوده می‌شود. در نهایت، شاخص عملکردی به فرم زیر در خواهد آمد [۲۰]:

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_f} [L(x, u, t) + p^T (f - \dot{x})] dt + \Phi \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (9)$$

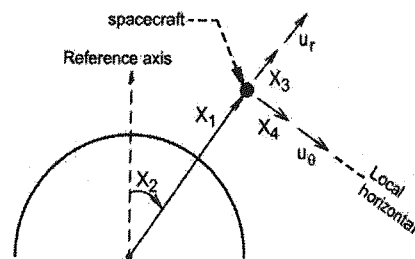
که  $\Phi = \phi(x(t), t) + v^T \psi(x(t), t)$  می‌باشد. با تعریف:

$$\hat{x}|_{t_0} = x(t_0), \quad \hat{x}|_{t_f} = x(t_f) \quad (10)$$

سیاره‌ای بایستی دستگاه مختصات اینرسی به جای مرکز سیاره در مرکز خورشید قرار داده شود که بدین ترتیب، حرکت سیاره نیز در معادله‌ها وارد می‌شود [۱]. این پژوهش بر پایه مسأله دو جسم نیوتونی بنا نهاده شده است. از این رو مبدأ مختصات همواره به عنوان مرکز سیاره در نظر گرفته می‌شود. مطابق شکل (۱-الف)، دیاگرام آزاد نیروهای وارده بر فضاییما در دستگاه مختصات قطبی متعامد نشان داده شده است. در این شکل،  $m, r, R, \theta$ ، به ترتیب نشان دهنده جرم فضاییما، شعاع سیاره، شعاع مدار حرکت و موقعیت زاویه ای فضاییما نسبت به دستگاه مرجع است. همچنین در مختصات موضعی، سرعت لحظه ای، دامنه ثابت نیروی رانش فضاییما، زاویه متغیر نیروی رانش و نیروی وارده از طرف میدان جاذبه سیاره به ترتیب با  $F_g, \beta, T, v$  نشان داده شده است [۲۰].



(الف)



(ب)

شکل (۱): (الف) دیاگرام آزاد نیروها، (ب) متغیرهای حالت و کنترل مسأله

با استفاده از معادلات تعادل دینامیکی در جهت شعاعی و زاویه‌ای و صرفنظر کردن از تغییرات جرم فضاییما، نهایتاً معادلات سرعت و شتاب فضاییما در سیستم مختصات قطبی به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$v_r = \dot{r} \quad (1)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad (2)$$

$$a_r = -\frac{\mu}{r^2} + r\dot{\theta}^2 + u_r \quad (3)$$

$$a_\theta = -\dot{r}\dot{\theta} + u_\theta \quad (4)$$

مؤلفه‌های  $v_r, v_\theta, a_r, a_\theta$  به ترتیب بیانگر سرعت و

و افزودن لاگرانژ گسسته نامعین تعریف شده در  $t_0$  و  $t_f$  است، شاخص عملکردی جدیدی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [L(x, u, t) + p^T (f - \dot{x})] dt + \Phi \Big|_{t_0}^{t_f} + \alpha^T (x - \hat{x}) \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (11)$$

در مسأله مورد بررسی، زمان انتها ثابت در نظر گرفته می‌شود و بنابراین،  $\delta t_f = 0$  می‌باشد و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \{ \delta p^T (f - \dot{x}) - \delta \dot{x}^T p \\ & + \delta x^T [(\frac{\partial L}{\partial x})^T + (\frac{\partial f}{\partial x})^T p] \\ & + \delta u^T [(\frac{\partial L}{\partial u})^T + (\frac{\partial f}{\partial u})^T p] \} dt \\ & + \delta v^T \psi \Big|_{t_0}^{t_f} + \Delta x^T (\frac{\partial \Phi}{\partial x}) \Big|_{t_0}^{t_f} \\ & + \delta \alpha^T (x - \hat{x}) \Big|_{t_0}^{t_f} + \alpha^T (\Delta x - \Delta \hat{x}) \Big|_{t_0}^{t_f} \end{aligned} \quad (12)$$

شرط لازم برای کمینه شدن  $J$  این است که  $\delta J = 0$  باشد. با تعریف:

$$\hat{p} \Big|_{t_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_0} \quad \text{and} \quad \hat{p} \Big|_{t_f} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_f} \quad (13)$$

و با انجام انتگرال گیری جزء به جزء و آماده سازی معادلات فرم نهایی تضعیف شده همراه با شرایط مرزی به صورت معادله (۱۴) به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \{ \delta \hat{p}^T x - \delta \dot{x}^T p + \delta x^T [(\frac{\partial L}{\partial x})^T + \\ & (\frac{\partial f}{\partial x})^T p + \delta p^T f + \delta u^T [(\frac{\partial L}{\partial u})^T + \\ & (\frac{\partial f}{\partial u})^T p] \} dt + \delta v^T \psi \Big|_{t_f} + \\ & \delta x^T \hat{p} \Big|_{t_0}^{t_f} - \delta p^T \hat{x} \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

#### ۴- روش های حل مسأله کنترل بهینه

عموماً معادلات حاکمه بر یک مسأله کنترل بهینه، به یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای منجر می‌شود که با روش‌های

مختلفی قابل حل است. این روش‌ها به طور کلی به دو دسته مستقیم و غیر مستقیم تقسیم بندی می‌شوند:

#### ۴-۱- روش های مستقیم بهینه سازی

در روش مستقیم، یک مسأله سیستم پیوسته به وسیله یک سیستم معادلات جبری غیر خطی تقریب زده می‌شود که نهایتاً به حل یک مسأله بهینه سازی پارامتری منجر می‌شود. روش‌هایی مثل روش برنامه ریزی غیر خطی بتز و هوفمن [۱۶] روش پهلوی هم گذاری انزایت و کنوی [۱۷] روش خطی سازی گام به گام پورتاکدوست و همکاران [۲] از این جمله‌اند. افراد دیگری مثل میل و منکوسو [۱۲] از روش‌های مشابهی بهره گرفته‌اند. در روش‌های مستقیم، مسأله پیوسته به وسیله یک مسأله بهینه سازی پارامتری تقریب زده می‌شود و از روش‌های برنامه ریزی ریاضی برای حل استفاده می‌شود. این پارامتری کردن می‌تواند تنها روی متغیرهای کنترلی اعمال شود و معادله‌های حالت به طور جداگانه انتگرال گیری شده و یا متغیرهای حالت و کنترلی با هم پارامتری شوند و سپس از روش انتگرال گیری همزمان حل شوند. روش‌های مستقیم بهینه سازی معمولاً به حدس اولیه حساس هستند و بررسی حساسیت سیستم به پارامترهای اولیه در آنها کاری دشوار است. این روش‌ها براساس تجربه طراح می‌توانند به کار گرفته شوند و بررسی امکان بود یا نبود پاسخ تقریباً ممکن نیست.

روش مکان سازی دیکمانز [۱۴] با مربع‌های هرمیت می‌باشد که برای تبدیل مسأله کنترل بهینه به برنامه ریزی غیر خطی استفاده می‌شود. همچنین هارگریوز و جانسون [۱۵] تاریخچه زمانی کنترل‌ها و حالت‌ها را بر حسب چند جمله‌ای چیبیشف بیان کرده و از تابع انتگرال خطا برای محدود ساختن معادله‌های حرکتی استفاده کردند.

#### ۴-۲- روش‌های غیر مستقیم بهینه سازی

در روش غیر مستقیم، با استفاده از حساب تغییرات یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای تحلیل می‌شود. روش‌هایی همچون تصویر گرادیان، تغییر اکسترم‌ها، کاهش سریع و خطی سازی ناقص از این جمله‌اند که برخی روش غیر صریح و برخی روش صریح می‌باشند. نقطه اشتراک تمام این روش‌ها غیر مستقیم بودن آنهاست. در حقیقت، معادله‌هایی که نتیجه یک بهینه یابی تابعی هستند بایستی با روشی حل شوند که هیچ گونه وابستگی به مرحله‌های بهینه سازی نداشته باشند. مشکل همگرایی و پایداری در تمام این روش‌ها وجود دارد و رسیدن به یک جواب بهینه معمولاً کاری دشوار است. نیاز به حدس اولیه خود حساسیت مسأله را پیش می‌آورد و به نوبه خود ایجاد مشکل می‌کند. هاجز و همکارانش [۱۸]، [۱۹] برای حل

## ۵- روش اجزای محدود در دامنه زمان و گسسته سازی مسأله

در این مقاله، برای حل مسأله از روش اجزای محدود یک روش غیر مستقیم است به شرح زیر استفاده می‌کنیم. بازه زمانی مسأله از  $t_0$  تا  $t_f$  را به  $N$  المان تقسیم بندی می‌کنیم و زمان بی بعد شده المانی به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{t - t_i}{\Delta t_i} \quad (15)$$

برای ساده تر شدن محاسبات بازه‌های زمانی  $p$  و  $x$  را یک اندازه در نظر می‌گیریم.  $\Delta t_i, i=1,2,\dots,N+1$  به ترتیب معرف متغیرهای حالت و وابسته حالت هستند و توابع شکل قطعه‌ای ثابت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$p = \begin{cases} \hat{p}_i, \tau = 0 \\ \bar{p}_i, 0 < \tau < 1 \\ \hat{p}_{i+1}, \tau = 1 \end{cases}, \quad x = \begin{cases} \hat{x}_i, \tau = 0 \\ \bar{x}_i, 0 < \tau < 1 \\ \hat{x}_{i+1}, \tau = 1 \end{cases} \quad (16)$$

با توجه به این که مشتقات  $u$  و  $\delta u$  در فرمول بندی ظاهر نمی‌شوند، یک تابع شکل ثابت برای آنها به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = \bar{u}_i, \quad \delta u = \delta \bar{u}_i \quad (17)$$

نهایتاً با اعمال توابع شکل  $x, p, u$  فرم تضعیف شده کلی برای مسأله کنترل بهینه سازی انتهای زمانی ثابت را می‌توان بر حسب پارامترهای فوق و رابطه (۱۴) استخراج کرد که فرم نهایی آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \delta x_i^T \left[ \bar{p}_i + \frac{\Delta t_i}{2} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)_i^T \bar{p}_i + \frac{\Delta t_i}{2} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}} \right)_i^T \right] - \delta p_i^T \left( \bar{x}_i - \frac{\Delta t_i}{2} \bar{f}_i \right) - \delta x_{i+1}^T \left[ \bar{p}_i - \frac{\Delta t_i}{2} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)_i^T \bar{p}_i - \frac{\Delta t_i}{2} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}} \right)_i^T \right] + \delta p_{i+1}^T \right. \quad (18)$$

$$\left. \left( \bar{x}_i + \frac{\Delta t_i}{2} \bar{f}_i \right) + \delta \bar{u}_i \left\{ \Delta t_i \left[ \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial u} \right)_i^T + \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \right)_i^T \right] \right\} \right\rangle + \delta v^T \psi \Big|_{t_f} - \delta x_i^T \hat{p}_0 + \delta p_1^T \hat{x}_0 + \delta x_{N+1}^T \hat{p}_f - \delta p_{N+1}^T \hat{x}_f = 0$$

برای استخراج دستگاه معادلات حاکمه بایستی ضریب ترم‌های دارای نماد تغییراتی مساوی صفر باشد تا شرایط بهینه شدن برقرار باشد. در این صورت با بسط رابطه (۱۸) و جدا کردن ضرایب به دسته معادلات زیر خواهیم رسید:

ضریب  $\delta x_i^T$ :

$$\bar{p}_1 + \frac{\Delta t_1}{2} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)_1^T \bar{p}_1 + \frac{\Delta t_1}{2} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}} \right)_1^T - \hat{p}_0 = 0 \quad (19)$$

ضریب  $\delta p_i^T$ :

$$\hat{x}_0 - \bar{x}_1 + \frac{\Delta t_1}{2} \bar{f}_1 = 0 \quad (20)$$

ضریب  $\delta x_k^T$  ( $k=2,3,\dots,N$ ):

$$\bar{p}_k + \frac{\Delta t_k}{2} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)_k^T \bar{p}_k + \frac{\Delta t_k}{2} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}} \right)_k^T - \bar{p}_{k-1} \quad (21)$$

$$+ \frac{\Delta t_{k-1}}{2} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)_{k-1}^T \bar{p}_{k-1} + \frac{\Delta t_{k-1}}{2} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}} \right)_{k-1}^T = 0$$

ضریب  $\delta p_k^T$  ( $k=2,3,\dots,N$ ):

$$\bar{x}_{k-1} + \frac{\Delta t_{k-1}}{2} \bar{f}_{k-1} - \bar{x}_k + \frac{\Delta t_k}{2} \bar{f}_k = 0 \quad (22)$$

ضریب  $\delta \bar{u}_k^T$  ( $k=1,2,\dots,N$ ):

$$\left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial u} \right)_k^T + \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \right)_k^T \bar{p}_k = 0 \quad (23)$$

ضریب  $\delta x_{N+1}^T$ :

$$\hat{p}_f - \bar{p}_N + \frac{\Delta t_N}{2} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)_N^T \bar{p}_N \quad (24)$$

$$+ \frac{\Delta t_N}{2} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}} \right)_N^T = 0$$

ضریب  $\delta p_{N+1}^T$ :

$$\bar{x}_N + \frac{\Delta t_N}{2} \bar{f}_N - \hat{x}_f = 0 \quad (25)$$

ضریب  $\delta v^T$ :

$$\psi \Big|_{t_f} = 0 \quad (26)$$

این هشت دسته معادله بایستی به طور همزمان حل شوند.

## ۶- شاخص عملکرد، معادلات قید و شرایط

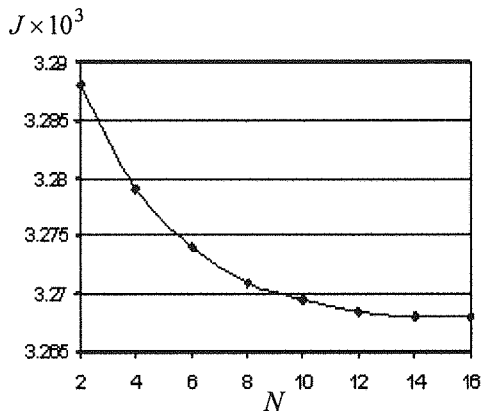
### مرزی

مسأله کنترلی بهینه مورد نظر در این مقاله کمینه کردن تلاش کنترلی است که شاخص عملکردی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^T R u dt \quad (27)$$

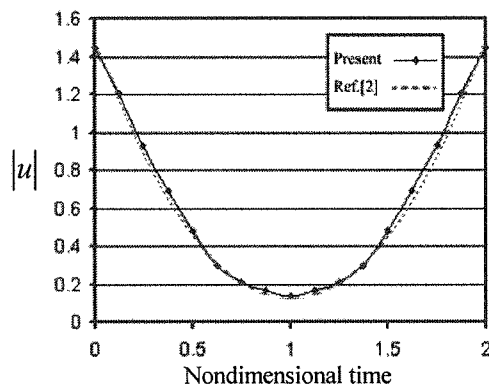
ماتریس  $R$  ضریب وزنی نام داشته و یک ماتریس مثبت معین می‌باشد. اهمیت این ماتریس هنگامی که هدف بهینه سازی چند پارامتر مختلف نمایان شده در تابع معیار عملکرد باشد آشکار می‌شود که در اینجا مقدار این ماتریس واحد فرض شده است. تعداد جواب‌های امکان پذیر بهینه می‌تواند بیش از یکی

بعد  $t_f = 2$  و تعداد تقسیمات زمانی  $N = 2, 4, \dots, 16$  با الگوریتم نیوتن-رافسون حل و شاخص عملکرد طبق معادله (۲۷) در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل (۲): تغییرات شاخص عملکردی نسبت به تعداد بازه های زمانی

با مقایسه شاخص عملکردی بازای تقسیمات زمانی مسأله مشاهده می شود که این شاخص یک روند نزولی را طی می کند و بازای تعداد تقسیمات بیش از  $N \geq 14$  حل مسأله همگرا شده است؛ لذا برای ارایه نتایج در این مقاله  $N = 16$  انتخاب شده است.



شکل (۳): تاریخچه زمانی اندازه کنترل (بر حسب متر بر مجذور ثانیه) نسبت به زمان بدون بعد

شکل (۳)، قدر مطلق متغیر کنترلی  $|u| = \sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}$  را نسبت به زمان بدون بعد مشخص می کند. در شکل (۴) مؤلفه سرعت شعاعی فضاپیما نسبت به زمان بی بعد نشان داده شده است. شکل (۵)، تغییرات زاویه کنترلی بر حسب رادیان را نشان می دهد که شامل یک تغییر ناگهانی خواهد بود که برای مانورهای کوتاه مدت قابل انتظار است. نهایتاً در شکل (۶)، با استفاده از اعمال کنترل بهینه، مسیر بهینه حرکت فضاپیما از یک مدار اولیه به مدار هدف رسم شده است.

باشد که در این حالت خانواده ای از پاسخها به دست می آید. انتخاب یک جواب بر اساس سلیقه طراح و معیارهای ذهنی وی شکل می گیرد؛ ولی در هر صورت پاسخ مطلوب در اینجا بایستی کمترین مقدار تابع معیار عملکرد را به دست دهد.

در زمان پایانی  $t = t_f$  تعدادی از متغیرها شامل متغیرهای حالت معلوم بوده و متغیرهای وابسته حالت مجهول می باشند. به همین خاطر، این نوع مسأله کنترل بهینه با توجه به شرایط مرزی ابتدا و انتها، مسأله مرزی دو نقطه ای نامیده می شود. حل این گونه مسائل نیز نسبت به حالتی که شرایط مرزی در ابتدا یا انتها همگی معلوم باشند، دشوارتر است. متغیرهای حالت این مسأله شامل مؤلفه های سرعت و بردار مکان ماهواره هستند که به طور کلی محدودیتی روی آنها وجود ندارد و چون از نظر فیزیکی بی نهایت نمی شوند وارد کردن آنها به عنوان قید ضروری نیست.

## ۷- ارایه نتایج

در مسأله مورد بررسی، هدف بهینه کردن مسیر حرکت فضاپیما در یک مانور کوتاه مدت است. برای اعتبار سنجی، نتایج حاصله با حل نتایج روش خطی سازی گام به گام مقایسه شده است [۲] که مطابقت خوبی را نشان می دهد. ذکر این نکته لازم است که ثابت گرانشی سیاره  $\mu = 1$  فرض شده و مقادیر شعاع مدار اولیه و مدار هدف به ترتیب برابر است با  $r_o = 1$  و  $r_f = 2$ ؛ همچنین می توان شرایط مرزی ابتدایی و نهایی را به صورت زیر بیان کرد:

$$x_o = [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad (28)$$

$$x_f = [2 \ \text{free} \ 0 \ 0.447]^T$$

از آنجایی که هیچ گونه قیدی روی زاویه  $x_2$  وجود ندارد، این متغیر در زمان انتها آزاد فرض شده است. در مورد شرایط مرزی متغیرهای وابسته حالت، می توان  $\hat{p}_f$  را بر حسب سایر پارامترهای مجهول مسأله بیان کرد. برای مسأله حاضر با اعمال معادلات لازم خواهیم داشت:

$$\phi = 0, \psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_f - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.447 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\hat{p}_f = [v_1 \ 0 \ v_2 \ v_3]^T$$

نتایج متغیرها و کنترل بهینه بر حسب واحد زمان بدون بعد؛ که برابر با زمان مورد نیاز برای گردش زاویه ای  $2\pi$  در مدار پایه مسأله می باشد، در شکل های (۳) تا (۵) ارایه شده است؛ همچنین دستگاه معادلات غیر خطی حاصله بازای زمان بدون

برای حل در هر مرحله نسبت به مرحله قبلی بهبود می‌یابد و سرعت همگرایی حل با افزایش تقسیمات زمانی مناسب‌تر می‌شود. اگرچه با افزایش تعداد تقسیمات زمانی مسأله، زمان حل طولانی‌تر می‌شود؛ ولی دقت جواب‌های مسأله بهبود قابل توجهی می‌یابد. این روش حل برای مسائل مربوط به مانورهای بلند مدت نیز قابل اعمال است.

## ۹- مراجع

[۱] Kaplan, M. H.; *Modern Spacecraft Dynamics and Control*, Wiley, New York, 1976.

[۲] Pourtakdoust, S.H., Jalali, M.A., Saberian, J.R.; "Determination of Optimal Spacecraft Trajectories Using a Step-by-Step Linearization Method", AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Huntsville, Alabama, 1997.

[۳] Lawden, D. F.; "Time-Closed Optimal Transfer by Two Impulses Between Coplanar Elliptical Orbits", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No 3, pp 585-587, 1993

[۴] Lawden, D. F.; "Optimal Transfers Between Coplanar Elliptical Orbits", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15 No 3, pp 787-791, 1992.

[۵] Redding, D C., and Breakwall, J. V.; "Optimal Low Thrust Transfers to Synchronous Orbit", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 7, No 2, pp 148-155, 1984

[۶] Parvez, S. A., and Holman, J. M. L.; "Thrust Insertion into Orbit Around Mars", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 11 No 5, pp. 475-477, 1988.

[۷] Prussing, S. A., and Chiu, J. H.; "Optimal Multiple-Impulse Time Fixed Rendezvous Between Circular Orbits", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 9, No 1, pp 17-22 1986

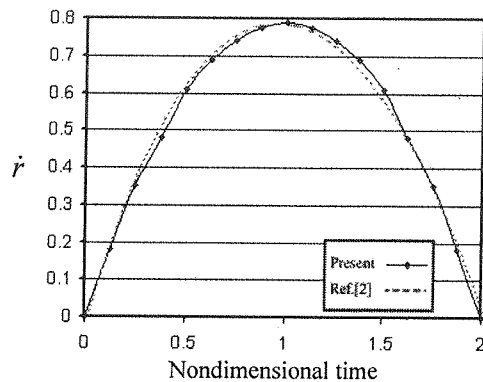
[۸] Rao, P. V. S., and Ramanan, R. V.; "Optimum Rendezvous Transfer Between Coplanar Heliocentric Elliptic Orbits Using Solar Sail", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, No 6, pp 1507-1509 1992

[۹] Widhalm, J. W., and Heise, S. A.; "Optimal In-Plane Orbital Evasive Maneuvers Using Continuous Low-Thrust Propulsion", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14 No 6, pp. 1323-1326 Vol. 14 No 6, pp 1323-1326, 1991.

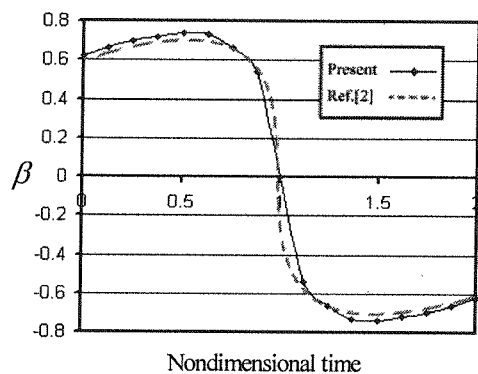
[۱۰] H. Baoyin, Li Junfeng and Gao Yunfeng; "Dynamical behaviors and relative trajectories of the spacecraft formation flying", *Aerospace Science and Technology*, Volume 6, Issue 4, pp. 295-301, 2002

[۱۱] Coverstone - Carrol, V., and Prussing, J. E.; "Optimal Cooperative Power-Limited Rendezvous Between Neighboring Circular Orbits", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16 No 6, pp. 1045-1054 1993

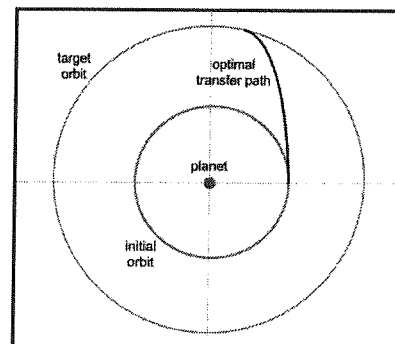
[۱۲] Lembeck, C. A., and Prussing, J. E.; "Optimal Impulsive Intercept With Low-Thrust Rendezvous Return", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16 No 3, pp. 426-433, 1993



شکل (۴): مؤلفه سرعت در جهت شعاع (بر حسب متر بر ثانیه) نسبت به زمان بدون بعد



شکل (۵): زاویه کنترلی (بر حسب رادیان) نسبت به زمان بدون بعد



شکل (۶): مسیر بهینه حرکت فضاپیما

## ۸- نتیجه گیری

مسأله مسیر بهینه فضاپیما با روش اجزای محدود در دامنه زمان مدل سازی و حل شده است. نتایج حاصله با روش خطی سازی گام به گام مطابقت بسیار خوبی داشته است. روش به کارگرفته شده یک روش سیستماتیک است و برحسب نوع تابع عملکرد، معادلات سیستم، قیدها و شرایط مرزی گسسته شده قابل برنامه نویسی می‌باشد و هیچ گونه محدودیتی برای مسائل خطی و غیر خطی ندارد. از آنجا که تعداد تقسیمات زمانی مرحله به مرحله قابل افزایش است؛ لذا دقت حدس اولیه

- A. Miele and S. Mancuso; "*Optimal Trajectories For Earth-Moon-Earth Flight*", Acta Astronautica, Volume 49, Issue 2, pp.597-601 2001. [۱۲]
- Dickmanns, E. D., and Well, H.; "*Approximate Solution of Optimal Control Problems Using Third-Order Hermite Polynomial Functions*", Proceedings of the 6th Technical Conference on Optimization Techniques, Springer-Verlag, New York, 1975 [۱۳]
- Hargraves, C. R., Johnson, F., Paris, S., and Retti, I.; "*Numerical Computation of Optimal Atmospheric Trajectories*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 4, No 4, pp 406-414, 1981. [۱۵]
- Betts, J. T., Huffman, W.; "*Application of Sparse Nonlinear Programming to Trajectory Optimization*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 15 pp 198-206, 1992 [۱۶]
- Enright, P. J., and Conway, B. A.; "*Optimal Finite Thrust Spacecraft Trajectories Using Collocation and Nonlinear Programming*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, pp. 5558, ASME 1994. [۱۷]
- Dewey H. Hodges, Robert R. Bless; "*Weak Hamiltonian Finite Element Method for Optimal Control Problems*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 14 No.1, pp 148-156, 1990. [۱۸]
- Robert R. Bless, Dewey H. Hodges, Hans Seywald; "*Finite Element Method for the Solution of state-constrained optimal control problem*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 18, No.5, pp.1036-1043 1995 [۱۹]
- Kirk, D. E.; *Optimal Control Theory (An Introduction)*, Prentice-Hall, New Jersey, 1970. [۲۰]