کاربرد هندسه فینسلر در مسأله تکمیلی غیرخطی تعادل ترافیک

بهروز بیدآباد [i]؛ اعظم آسنجرانی [ii]

چکیده

در این مقاله، ابتدا مسأله ترافیک را از دیدگاه هندسه فینسلر بررسی کرده و نشان می‌دهیم که متریک وابسته به آن یک متریک فینسلر از نوع راندرزی است. بنابراین، مسیرهای بهینه زمانی برای مسأله ترافیک، ژئودزیک‌های این متریک راندرز هستند. یک مثال واقعی با استفاده از برنامه میپل ارائه می‌کنیم، سپس یکی از روش‌های حل مسأله تعادل ترافیک کاربر را که به حل یک مسأله تکمیلی غیرخطی منجر می‌شود، بررسی و نشان می‌دهیم که یک متریک راندرز شرایط تابع فاصله برای حل این مسأله را دارد. این مسأله تکمیلی غیرخطی برای یک سیستم پویا تعمیم داده شده است. از نتایج حاصل می‌توان در مسائل مختلف تعادل استفاده کرد.

کلمات کلیدی

هندسه فینسلر، مسأله تکمیلی غیر خطی، مسأله تعادل ترافیک، متریک راندرز

Application of Finsler Geometry in the Nonlinear Complementarity Problem of Traffic Equilibrium

B.Bidabad,A.Asanjarani

ABSTRACT

In this paper, first, the traffic problem is studied from the Finsler geometric point of view and it is shown that the related metric is a Finsler metric of Randers type. Therefore, the time optimal paths of traffic problem are geodesics of this Randers metric. A real example is given by using the Maple program. Then a nonlinear complementary problem for traffic equilibrium problem is studied and it is shown that a Randers metric can be considered as a gap function in the nonlinear complementarity problem. Next, we extend the nonlinear complementarity problem of traffic equilibrium for a dynamical network. These results may be used in the different equilibrium problems.

KEYWORDS

Finsler geometry, nonlinear complementarity problem, traffic equilibrium problem, Randers metric.

[i] استادیار دانشگاه صنعتی امیر کبیر: bidabad@aut.ac.ir

[ii] دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی امیر کبیر: asanjarani@aut.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه مقدار چشمگیری از فعالیت‌ها در بخش شهری، حرکت مردم و انتقال کالا بین مسیرهای مختلف در شبکه‌های حمل و نقل است. در این راستا، برقراری سیستمی مناسب و هموار برای صرفه جویی اقتصادی وبهبود کیفیت زندگی در مناطق شهری ضروری به نظر می‌رسد. طراحی، ساخت، کنترل و مدیریت شبکه از ارکان لازم برای سرویس دهی در یک سیستم حمل و نقل شهری است. هدف اصلی در سیستم حمل و نقل، حل مسأله ترافیک، یا به دست آوردن میزان جریان و توزیع آن در شبکه است؛ به طوری که یک تعادل نسبی بین جریان‌های شبکه و تقاضاهای مسافرت برقرار و از ایجاد ترافیک در قسمتی از شبکه جلوگیری شود. مفهوم ترافیک هنگامی بیان می‌شود که در شبکه تراکم همراه با کندی حرکت جریان، به بالا رفتن زمان مسافرت به طور تصاعدی منجر می‌شود و بعد از مدتی جریان در شبکه متوقف و شبکه به پارکینگ بزرگی برای وسایل نقلیه تبدیل می‌شود.

در این مقاله، مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلر را در بخش ۲ ذکر کرده و در بخش ۳ نشان می‌دهیم که از دیدگاه هندسی، مسیر بهینه زمانی ژئودزیک های یک متر فینسلر از نوع راندرز است. یکی از روش‌های متداول برای برقراری تعادل در شبکه حمل و نقل؛ که تقریبا مورد تأیید تمام محققان و طراحان سیستم‌های شهری است، استفاده از اصل تعادل کاربر واردروپ است [۳]. مدل تکمیلی غیر خطی یکی از بهترین مدل‌های ارائه شده بر اساس این اصل است که در بخش ۴ به شرح آن می‌پردازیم. درحالت کلی، یکی از روش‌های حل مسأله تکمیلی غیر خطی؛ که در ریاضی کاربردی مطرح است، استفاده از الگوریتم‌هایی است که براساس توابع فاصله تعریف می‌شوند که از روش‌های کارا یی است که در عمل برای مسأله تعادل ترافیک نیز بخوبی جواب داده است. در بخش ۵ یکی از این توابع فاصله پیشنهادی را معرفی می‌کنیم و در بخش ۶ به ارتباط هندسه فینسلر با مسأله تعادل ترافیک می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که تابع فاصله تعریف شده در بخش ۵، حالت خاصی از تابع متریک کلی به دست آمده با استفاده از هندسه فینسلر در بخش ۳ است. به این ترتیب، با استفاده از هندسه فینسلر یک روش آسان برای حل مسأله تکمیلی غیر خطی ارائه می‌کنیم.

در بسیاری از مدل‌های ارائه شده، از جمله در مدل تکمیلی غیر خطی فرض می‌شود که جریان، با زمان تغییر نمی‌کند؛ یعنی حالت ایستا داریم، در مقابل حالت پویا که جریان و بقیه عوامل در شبکه می‌توانند با زمان تغییر کنند. در بخش ۷ جواب مسأله تکمیلی غیرخطی به دست آمده در بخش قبل را به حالت پویا تعمیم می‌دهیم. از تلفیق نتایج به دست آمده در بخش‌های قبل، یک مدل هندسه فینسلری پویا برای مسأله تعادل ترافیک کاربر حاصل می‌شود که به کلی‌ترین حالت ممکن این مسأله را تعمیم داده است. در بخش ۸ این مدل ریاضی را ارائه می‌کنیم.

۲- مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلر

فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n بعدی، T_xM فضای مماس در $x \in M$ و $TM := \bigcup_{x \in M} T_xM$ کلاف مماس روی M باشد[۱]. هر عضو TM به صورت زوج مرتب (x^i, y^i) نمایش داده می‌شود که در آن $x \in M$ و $y \in T_xM$. یک ساختار فینسلر[۱] روی M عبارت از یک تابع $\overline{F}$ با خواص زیر است:

۱) $\overline{F}$ روی $TM_0 := TM \setminus 0$ دیفرانسیل پذیر است.

۲) به ازای هر $\lambda > 0$، داریم: $\overline{F}(x, \lambda y) = \lambda \overline{F}(x, y)$.

۳) ماتریس هسین تابع $\overline{F}$؛ یعنی $g_{ij} = \dfrac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y^i \partial y^j}$ مخاالف صفر است.

منیفلد M همراه با یک ساختار فینسلر $\overline{F}$ روی آن را یک فضای فینسلر[۲] می گوییم و با $(M, \overline{F})$ نمایش می‌دهیم.

مثال: فرض کنیم که $(M, \overline{g})$ یک منیفلد ریمانی دارای دستگاه مختصات موضعی $\{U, (x^i)\}$ و ω یک ۱- فرمی دیفرانسیل پذیر روی آن باشد. در این صورت، تابع زیر:

$$\overline{F} : U \times R^3 \to R$$
$$(x^i, y^i) \to \omega_i y^i + (\overline{g}_{ij} y^i y^j)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱)$$

یک تابع اساسی فینسلر و $(M, \overline{F})$ یک فضای فینسلر معـروف به فضای راندرز[۳] است [۴] یا [۲].

۲-۱- ژئودزیک ها[۴]

هر متریک فینسلر $\overline{F}$ روی منیفلد M یک ساختار طول L_F را روی خم‌های جهت دار در M تعریف می‌کند. فرض کنیم که $C : [a, b] \to M$ یک خم به طور قطعه‌ای هموار[۵] روی M باشد. طول C به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{\overline{F}}(C) := \int_a^b \overline{F}(C(t), C'(t))dt \qquad (۲)$$

و برای هر دو نقطه دلخواه $p, q \in M$ قرار می‌دهیم:

$d_{\overline{F}}(p,q) := \inf_C L_{\overline{F}}(C)$

که در آن اینفیمم روی همه خم‌های هموار C از p تا q گرفته شده است. توجه کنید که $d_{\overline{F}}$ خواص تابع متر را داراست. فرض کنید دو نقطه $p,q \in M$ داده شده است، خم $\gamma:[a,b]\to M$ از $p=\gamma(a)$ تا $q=\gamma(b)$ مینیمم گفته می‌شود، اگر $L_{\overline{F}}(\gamma)=d_{\overline{F}}(p,q)$.

تعریف: یک خم هموار $\gamma(t)$ را؛ که در آن $t\in I=[a,b]$، ژئودزیک می‌گوییم؛ اگر دارای سرعت ثابت بوده؛ یعنی $\overline{F}(\gamma(t),\gamma'(t))=cte$ و به طور موضعی مینیمم باشد.

۳- یک روش حل هندسی برای مسأله ترافیک

در این بخش با استفاده از هندسه فینسلر یک مدل ریاضی برای به دست آوردن کوتاه ترین (سریع ترین) مسیر در شبکه حمل و نقل ارائه می‌دهیم. در مدل ارائه شده ما ترافیک را به عنوان یک عامل خارجی؛ که روی عبور و مرور روان ماشین‌ها تأثیر می‌گذارد، در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که مسیر بهینه ژئودزیک های یک متر فینسلر از نوع راندرز است.

برای ارائه مدل ریاضی برای شبکه حمل و نقل فرض‌های زیر را در نظر می‌گیریم: ۱. مبدأ- مقصدهای مسافرت مشخص هستند. ۲. شبکه اکیداً همبند است (بین هر مبدأ- مقصد حداقل یک مسیر وجود دارد). ۳. تقاضا برای مسافرت بین مبدأء-مقصدها مشخص است (تقاضا می‌تواند ثابت فرض شود یا در حالت واقعی‌تر تابعی از زمان مسافرت باشد). ۴. مسافرین (از طریق دوربین‌های کنترل ترافیک و سیستم‌های ماهواره‌ای) اطلاعات کافی در مورد شبکه دارند. (یک مدل قطعی داریم در مقابل حالت تصادفی که مسافرین در مورد شبکه اطلاعات دقیقی ندارند و تصمیم‌های شخصی شان به طور تصادفی در انتخاب مسیرها مؤثر است.)

بین هر مبدأ- مقصد، مسیرهای مختلفی را می‌توان در نظر گرفت که از پشت سر هم قرار گرفتن خیابان‌ها و تقاطع‌ها به دست آمده‌اند. عبور از هر مسیر، به زمان مشخصی نیاز دارد که این زمان، وابسته به عواملی چون وسعت (ظرفیت) خیابان‌ها، توقف در تقاطع‌ها و میزان مسافرت هاست و مفهوم ترافیک هنگامی بیان می‌شود که در شبکه تراکم همراه با کندی حرکت جریان، به بالا رفتن زمان مسافرت به طور تصاعدی منجر می‌شود و بعد از مدتی، جریان در شبکه متوقف و شبکه به پارکینگ بزرگی برای وسایل نقلیه تبدیل می‌شود.

برای ارائه یک مدل هندسی فرض می‌کنیم: $\overline{g}$ یک متر ریمانی روی صفحه R^2 باشد و $y\in T_xR^2$ که اندازه آن یعنی $\|y\|$ که از رابطه $\|y\|^2 := \overline{g}(y,y)$ حاصل می‌شود برابر با مدت زمانی است که یک ماشین با مقدار نیروی حرکت ثابت لازم دارد تا از ابتدا به انتهای بردار y برود. اگر $u\in T_xR^2$ یک بردار یکه باشد، یعنی $\|u\|=1$ ، با در نظر گرفتن هر عامل خارجی در شبکه حمل و نقل؛ که موجب ترافیک در مسیر حرکت شود، (مثلا تصادف در طول مسیر، آب گرفتگی سطح خیابان، افزایش میزان تقاضای عبور در بخشی از مسیر و...) به عنوان یک بردار $w\in T_xR^2$ با این فرض که $\|w\|<1$، می‌بینیم که در مدت یک واحد زمان به جای بردار u بردار $v=u-w$ پیموده می‌شود؛ زیرا بردار ترافیک، برداری در راستای بردار جریان(مسیر حرکت) است که در خلاف جهت آن اثر می‌کند. حال اگر مجدداً اندازه بردار حاصل را با متر g اندازه بگیریم، ممکن است به عدد ۱ نرسیم $(\|v\|\neq 1)$. این تغییر در اندازه بردار به عبارتی تغییر در هندسه حرکت است که به دلیل وجود عامل خارجی ایجاد شده است. در حالت اول، متریک استفاده شده از نوع ریمانی است؛ اما در حالت دوم؛ همان طور که در ادامه ثابت می‌شود، متریک حاصل از نوع فینسلری است. در اینجا با در نظر گرفتن اثر ترافیک (بردار w) متری را معرفی می‌کنیم که تحت آن اندازه بردار حاصل($\|v\|$) برابر ۱ باشد و از روی آن متریک فینسلر مربوطه را محاسبه می‌کنیم:

قضیه۱- فرض کنیم $(R^2,\overline{g})$ یک منیفلد ریمانی و w یک میدان برداری روی R^2 باشد، به طوری که $\|w\|\langle 1$. اگر w را به عنوان بردار ترافیک در نظر بگیریم، زمان گذر روی هر مسیر برای یک ماشین با مقدار نیروی حرکت ثابت، توسط متریک راندرز $\overline{F}(x,y)=\dfrac{\|y\|}{1-\|w\|}$ اندازه گیری می‌شود

اثبات : با در نظر گرفتن $v=u-w$ می‌بینیم که $\|v\|=1-\|w\|$. حال فرض می کنیم $\overline{F}$ یک متر جدید باشد که تحت آن $\overline{F}(v)=1$ است. در این صورت $\overline{F}(v)=1=\dfrac{\|v\|}{1-\|w\|}$.

در حالت کلی برای یک بردار دلخواه $y\in T_xR^2$ ، $\overline{F}(x,y)=\dfrac{\|y\|}{1-\|w\|}$ با ضرب صورت و مخرج کسر فوق در $1+\|w\|$ و قراردادن $\lambda=1-\|w\|^2$ می‌بینیم:

$$F(x,y)=\frac{\|y\|}{\lambda}+\frac{\|w\|\|y\|}{\lambda}=\frac{\sqrt{\overline{g}_{ij}y^iy^j}}{\lambda}+\frac{\overline{g}_{ij}w^iy^j}{\lambda} \tag{۳}$$

و با قرار دادن $w_j=\overline{g}_{ij}w^i$ داریم:

$$\overline{F}(x,y)=\frac{\sqrt{\overline{g}_{ij}y^iy^j}}{\lambda}+\frac{w_j}{\lambda}y^j \tag{۴}$$

که درآن $b_j y^j = \dfrac{w_j}{\lambda} y^j$ یک ۱- فرمی دیفرانسیل پذیر است که در آن $\|b_j\| \langle 1$. بنابراین $\overline{F}$ یک $(\alpha+\beta)$- متریک یا متریک راندرز است که درآن $\alpha = \dfrac{\sqrt{\overline{g}_{ij} y^i y^j}}{\lambda}$ یک متر ریمانی و $\beta = b_j y^j$ یک ۱- فرمی دیفرانسیل پذیر است.

نتیجه ۱- معادله مسیر با کوتاهترین زمان با در نظر گرفتن ترافیک به عنوان یک عامل خارجی با رابطه زیر داده می‌شود:

$$E_i(r) = L_{ij}(x,y)\frac{dy^j}{d\tau} + \frac{\partial L_i}{\partial x^j} y^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad (۵)$$

اثبات : با مشخص شدن متریک فضای مسأله می‌توان کوتاه ترین (سریع ترین) مسیر را که همان ژئودزیک‌های متریک فضا است، به دست آورد؛ بنابراین مسیر بهینه با در نظر گرفتن ترافیک به عنوان یک عامل خارجی عبارت است از ژئودزیک‌های متریک راندرز به دست آمده یا در واقع مینیمم‌های انتگرال زیر:

$$L_F(C) = \int_0^1 \overline{F}(x(t), y(t))dt \qquad (۶)$$

که درآن، فرض شده است که وسیله نقلیه با نیروی حرکت ثابت حرکت می‌کند $t \to x(t)$ که $C:[0,1] \to R^2$ روی خم هموار به ترتیب ابتدا و انتهای مسیر $x(1)=b$ و $x(0)=a$ که در آن) را نشان می‌دهند. حال اگر قرار r حرکت (جواب معادله دیفرانسل زیر، یا معادله $L = \overline{F}^2/2$ دهیم، ژئودزیک ها، مینیمم های انتگرال (۶) را نتیجه می‌دهند [۲]:

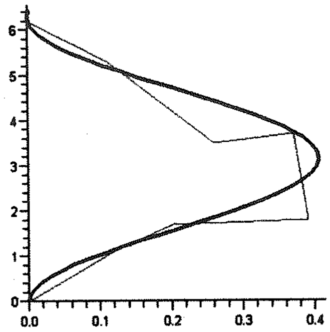
$$E_i(r) = L_{ij}(x,y)\frac{dy^j}{d\tau} + \frac{\partial L_i}{\partial x^j} y^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

که در آن $L_i = \dfrac{\partial L}{\partial y^i}$ و $L_{ij} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}$ و $\tau := \int_0^t \overline{F}(x,y)dt$ است.

در اینجا به ارائه مثال ساده‌ای برای تعیین مسیر بهینه زمانی در شهر تهران می‌پردازیم.

مثال: فرض کنید اتومبیلی قصد دارد فاصله بین دانشگاه صنعتی امیرکبیر به مختصات $(0,0)$ و سازمان انرژی اتمی به مختصات $(0,6.2)$ را طی کند اگر در هر نقطه به مختصات $(x=(x_1,x_2), y=(x_3,x_4))$ که در آن x معرف مکان و y معرف جهت حرکت است، عامل ترافیک توسط بردار $W=(1/5)(\sin x_2)x_3\vec{i}$ تأثیر کند، آنگاه مسیر بهینه زمانی این اتومبیل با برنامه Maple زیر داده می‌شود. در شکل (۱) منحنی، مسیر بهینه و خط شکسته مسیر واقعی حرکت را؛ که با کمی تقریب قابل انطباق با مسیرهای واقعی روی نقشه است، نشان می‌دهد.

```
> restart:
  with(plottools):
  with(plots):
  nrme := proc(X)
   sqrt(X[3]^2+X[4]^2)-
 (sin(X[2])*X[3]*(1/5));
  end:
  for i from 1 to 2 do:
  F[i]:=diff(diff(nrme(x(t)),x(t)[i+2]
,t)-diff(nrme(x(t)),x(t)[i]):
  for j from 1 to 2 do
  F[i]:=subs(x(t)[j+2]=diff(x(t)[j],t)
,F[i]);
  od:
  od:
  for i from 1 to 2 do
  for j from 1 to 2 do
  F[i]:=subs(x(t)[j]=x[j](t),F[i]);
  Od:
  od:
  dsole:=dsolve({F[1],F[2],x[1](0)=0,x
[2](0)=0,D(x[1])(0)=0,D(x[2])(0)=1},{x
[1](t),x[2](t)},type=numeric,output=li
stprocedure):
  d[1]:=subs(dsole,x[1](t));d[2]:=subs
(dsole,x[2](t)):
  plot1:=plot([d[1](t),d[2](t),t=0..6.
5],color=black,thickness=2):
  plot2:=plot([[0,0],[0.12,1.1],[0.2,1
.7],[0.39,1.8],[0.37,3.7],[0.26,3.5],[
0.11,5.3],[0,6.2]],color=[red,red,red,
red,red,red,red,red]):
  display({plot1,plot2});
```



شکل(۱): مسیر بهینه زمانی با توجه به ترافیک در منطقه

٤- مسأله تکمیلی غیر خطی

مسأله تکمیلی غیرخطی به صورت زیر بیان می‌شود: فرض کنید تابع غیرخطی $F:R^n \to R^n$ تعریف شده باشد. می‌خواهیم $x \in R^n$ را طوری بیابیم که داشته باشیم:

$$x \geq 0, \ \ F(x) \geq 0, \ \ F(x)^T \cdot x = 0 \qquad (۷)$$

برای حل مسأله فوق روش‌های متفاوتی ارائه شده است. فیشر[6] و برمیستر[7] مسأله فوق را به یک دستگاه معادلات تبدیل کردند که حل آن به ژاکوبین تعمیم یافته نیاز دارد، کلارک[8] و کی[9] ژاکوبین تعمیم یافته را ارائه کردند [۶]. افرادی مانندیاماشیتا[10]، جیانگ[11]، فاچینی[12]، کانزو[13] و لیائو[14] نیز الگوریتم‌هایی تحت عنوان الگوریتم‌های نیوتنی ارائه کرده‌اند [۹]-[۱۱]. و در سال ۲۰۰۱، لیائو و کی الگوریتم شبکه‌های عصبی را برای حل این مسأله ارائه دادند [۱۲].

از بین الگوریتم نیوتنی نوع اول و دوم و شبکه‌های عصبی ارائه شده، الگوریتم نیوتنی نوع دوم به علت امتیازات خاصی که دارد، ترجیح داده شده است. الگوریتم نوع دوم نیوتن با تبدیل دستگاه معادلات حاصل از (۷) به یک مسأله بهینه سازی نامقید مطرح می‌شود که تحت شرایطی خاص همگرا می‌شود [۵].

تعریف : تابع فیشر- برمیستر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &\phi: R^2 \to R \\ &\phi(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - (a+b) \end{aligned} \qquad (۸)$$

تابع فوق را فیشر در روش‌های نوعاً نیوتنی در مسائل بهینه سازی مقید به کار گرفت و بعدها در حل مسأله تکمیلی غیرخطی استفاده شد. تابع ϕ دارای خاصیت زیر است:

$$\phi(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

که با توجه به آن مسأله تکمیلی غیرخطی می‌تواند به صورت زیر تبدیل شود:

$$\phi(x_i, F(x_i)) = 0, \quad \forall i = 1,2,\dots,n$$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \phi(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix} = 0 \qquad (۹)$$

یعنی x_0 جواب مسأله تکمیلی غیرخطی است اگر و تنها اگر (۹) جواب داشته باشد. توجه داریم که تابع ϕ در همه جا پیوسته لیپ شیتس موضعی است. بنابراین ژاکوبین تعمیم یافته کلارک به ازای هر نقطه آن وجود دارد [۳]. اکنون تابع $G: R^n \to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i, F_i(x))^2 = \frac{1}{2}\|\phi(x)\|^2 \qquad (۱۰)$$

جیجر[15] و کانزو نشان دادند که هرگاه F به طور پیوسته مشتق پذیر و یکنوا باشد، مسأله تکمیلی غیرخطی قابل حل و در واقع جواب آن معادل با جواب مسأله زیر است:

$$\min_{x \in R^n} G(x) \qquad (۱۱)$$

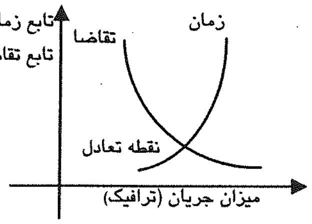
الگوریتم نوع دوم نیوتنی ترکیبی از روش تندترین شیب در حل (۱۰) و روش نیوتن تعمیم یافته در حل (۱۱) است [۵].

کاربردهایی از مسأله تکمیلی غیرخطی

دو کاربرد مهم زیر را می‌توان برای مسأله تکمیلی غیرخطی ذکر کرد: ۱. مسأله تعادل ترافیکی (که در این مقاله به آن می‌پردازیم) . ۲.شرایط KKT (Karush-Kuhn-Tuker) در مسأله بهینه سازی[۵]؛ که هر دو به یک مسأله تکمیلی غیرخطی تبدیل می‌شوند.

۵- مسأله تعادل ترافیک

در مدل سازی ریاضی، مفهوم تعادل یک ابزار مفید است که در مسائل مختلف به صورت تعادل در عرضه و تقاضای بازار، تعادل در نظریه بازی‌ها، تعادل در شبکه‌های توزیع برق و تعادل در شبکه‌های حمل و نقل ظاهر می‌شود. هدف اصلی در سیستم حمل و نقل، حل مسأله ترافیک، یا به دست آوردن و توزیع جریان در شبکه است، به طوری که یک تعادل نسبی بین جریان‌های شبکه و تقاضاهای مسافرت برقرار شود و از ایجاد تراکم در قسمتی از شبکه جلوگیری شود. مسافرینی که قصد حرکت در شبکه را دارند، می‌خواهند در کوتاه‌ترین زمان به مقصد برسند و با افزایش زمان مسافرت، بوضوح تقاضا برای مسافرت کاهش و زمان مسافرت با افزایش جریان (حجم مسافرت) افزایش می‌یابد. پس عملا تقاضا تابعی نزولی از جریان است و مسأله تعادل ترافیک در پی یافتن جریانی است که بین تقاضا و زمان مسافرت تعادل برقرار کند.



شکل (۲): نمودار تابع تقاضا و زمان بر حسب ترافیک

برای ارائه مدل ریاضی برای مسأله تعادل ترافیک روش‌های مختلفی به کار گرفته شده است. مثلا برخی از این حقیقت استفاده کرده‌اند که متوسط زمان مسافرت بین یک مبدأ- مقصد مشخص، برای تمام مسیرهای استفاده شده برابر باشد (بهینه کاربر) و بعضی سعی در مینیمم کردن زمان مسافرت کل با توجه به این حقیقت که هزینه‌های مسافرت جانبی برای تمام مسیرهای استفاده شده بین مبدأ و مقصد،

برابر باشد، کرده اند (بهینه سیستم). [۱۴]، [۱۶].

واردروپ[۱۶] در سال ۱۹۵۲ برای تعادل اصولی را مطرح کرد که مورد توجه و قبول تمام محققین قرار گرفته است: **اصل اول واردروپ**: زمان مسافرت روی همه مسیرهای استفاده شده، بین مبدأ- مقصد برابر و کمتر از زمانی است که برای مسیرهای به کاربرده نشده، نیاز است (مینیمم کردن زمان مسافرت کاربر) . **اصل دوم واردروپ**: متوسط زمان مسافرت مینیمم است. (مینیمم کردن زمان‌های مسافرت کل در شبکه). تحلیل شبکه‌ها نشان می‌دهد که در شبکه‌های حمل و نقل، حالت تعادل کاربر (اصل اول واردروپ) بیشتر روی می‌دهد.

با فرض اینکه جریان با زمان تغییر نمی‌کند؛ شرایط تعادل کاربر واردروپ به صورت ریاضی زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}&1.\quad h^T\left(c(h)-\pi\right)=0\\&2.\quad c(h)-\pi\ge 0\\&3.\quad h=d(\pi)\qquad 4.\quad h\ge 0\qquad 5.\quad \pi\ge 0\end{aligned}\tag{۱۲}$$

در اینجا با فرض این که r مسیر بین مبدأ- مقصد مورد نظر باشد، h میزان جریان روی مسیر، π زمان مسافرت روی کوتاه ترین مسیر، $c(h)$ تابع زمان مسافرت روی مسیر r و $d(\pi)$ تابع تقاضا را نشان می‌دهد. شرایط ۱و ۲ بیانگر آن است که اگر زمان مسافرت روی مسیر r بیشتر از زمان مسافرت روی کوتاه ترین مسیر باشد، آنگاه کاربر مسیر کوتاه تر را انتخاب می‌کند؛ یعنی $h=0$ می شود و شرط ۳ بیانگر آن است که همواره میزان تقاضا برابر با میزان جریان (ترافیک) روی مسیر r است.

در سال ۱۹۷۹، یک مدل تکمیلی غیر خطی را آشتیانی و مگنانتی برای حل مسأله تعادل ترافیک با استفاده از اصل اول واردروپ به صورت زیر ارائه کردند: [۷] ، [۸] . فرض کنید که $F:=R^n\to R^n$ یک تابع پیوسته باشد. مسأله تکمیلی غیر خطی یافتن $x\ge 0$ است؛ به طوری که $F(x)^T\cdot x=0$ و $F(x)\ge 0$. اگر فرض کنید $x=(h,\pi)$ و قرار دهید $F(x)=\begin{pmatrix}c(h)-\pi\\ h-d(\pi)\end{pmatrix}$، آنگاه روابط (۱۲) به صورت مسأله تکمیلی غیر خطی زیرقابل بازنویسی است: .

$$\begin{aligned}&F(x)^T\cdot x=\begin{pmatrix}c(h)-\pi & h-d(\pi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ \pi\end{pmatrix}=0\\&x=(h,\pi)\ge 0\ ,\quad F(x)=\begin{pmatrix}c(h)-\pi\\ h-d(\pi)\end{pmatrix}\ge 0\end{aligned}\tag{۱۳}$$

درحالت کلی، حل مسأله تکمیلی غیر خطی از مشکلات بزرگ ریاضیات کاربردی بوده و هست. استفاده از الگوریتم‌هایی که براساس توابع فاصله تعریف می‌شوند از روش‌های کارا در حل این مسأله است که برای مسأله تعادل ترافیک نیز بخوبی جواب داده است [۱۳]. یکی از توابع فاصله پیشنهادی $G(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i,F(x_i))$ است که در آن $\varphi=\frac{1}{2}\phi^2$ و ϕ تابع محدب دو متغیره فیشر- برمیستر است که با معادله (۸) داده می‌شود و مشاهده شد که حل مسأله تکمیلی غیر خطی معادل با پیدا کردن جواب عمومی نامقید برای مسأله کوتاه ترین فاصله؛ یعنی (۱۱) است.

۶- ارتباط هندسه فینسلر با مسأله تعادل ترافیک

در این بخش نشان می‌دهیم که تابع فاصله فیشر- برمیستر را می‌توان به عنوان حالت خاصی از تابع متریک راندرز به دست آمده در بخش۳ در نظر گرفت:

گزاره ۱- تابع فاصله فیشر- برمیستر تعریف شده در (۸) را می‌توان به عنوان یک تابع متریک فینسلر از نوع راندرز؛ که ژئودزیک‌های آن مسیر بهینه در مسأله تکمیلی غیر خطی را می‌دهند، درنظر گرفت.

اثبات: روی صفحه حقیقی R^2 متریک اقلیدسی $\overline{g}$ را به صورت $\overline{g}(a,b)=\sqrt{a^1b^1+a^2b^2}$ در نظر می‌گیریم که در آن، $a=(a^1,a^2)$ و $b=(b^1,b^2)$ دو نقطه در R^2 هستند که نرم آنها نامنفی است. در اینجا منظور از نرم همان طول اقلیدسی است که با رابطه زیر نشان داده می‌شود $\|a\|=\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2}$. در حالت کلی با در نظر گرفتن دستگاه مختصات (x^1,x^2) روی R^2 که مختصات $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$ را روی فضای مماس و مختصات (dx^1,dx^2) را روی فضای دوگان مماس القا می‌کند، داریم:

$$\overline{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)=\sqrt{(dx^1)^2+(dx^2)^2}$$

و بنابراین (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi(dx^1,dx^2)=\sqrt{(dx^1)^2+(dx^2)^2}-(dx^1+dx^2)$$

که قسمت اول آن؛ یعنی $\alpha=\sqrt{(dx^1)^2+(dx^2)^2}$ یک متر (اقلیدسی) ریمانی است که می‌توان آن را به صورت $\alpha=\sqrt{\delta_{ij}dx^idx^j}$ نوشت که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است. قسمت دوم رابطه بالا؛ یعنی $\beta=(dx^1+dx^2)$ یک ۱- فرمی دیفرانسیل پذیر است که می‌توان آن را نیز به صورت کلی $\beta=w_idx^i$ نوشت که در آن $\forall i: w_i=1$ است. بنابراین

تابع فاصله فیشر- برمیستر یک متریک از نوع راندرز است. به این ترتیب، با استفاده از متریک راندرز به عنوان تابع فاصله و ژئودزیک‌های آن به عنوان مسیر بهینه براحتی می‌توان مسأله تکمیلی غیرخطی را حل کرد.

۷- بررسی مسأله تعادل ترافیک پویا

میزان ترافیک و تقاضا برای جابجایی مسافر در بعضی ساعات روز مانند زمان شروع و اتمام کار مدارس و ادارات به مراتب بیشتر از دیگر ساعات روز است. این در حالی است که در بسیاری از مدل‌های ارائه شده، از جمله در مدل تکمیلی غیر خطی فرض می‌شود که جریان با زمان تغییر نمی‌کند؛ یعنی حالت ایستا داریم، در مقابل حالت پویا که جریان و حتی بقیه عوامل در شبکه می‌توانند با زمان تغییر کنند. در این بخش، ما جواب مسأله تکمیلی غیرخطی ارائه شده در بخش قبل را، به حالت پویا تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۲- اگر فرض کنیم که ترافیک و زمان مسافرت تابعی از زمان باشند، آنگاه جواب‌های مسأله تعادل ترافیک پویا، مینیمم‌های انتگرال (۱۴) هستند.

اثبات: برای بررسی مسأله تعادل ترافیک پویا فرض کنیم که بین مبدأ و مقصد مورد نظر (نقاط a و b) مسیر r را در نظر گرفته ایم و زمان مسافرت روی کوتاه‌ترین مسیر برابر صفر باشد $(\pi = 0)$، در این صورت تابع فاصله فیشر- برمیستر به صورت $G(h) = \int_{h_a}^{h_b} \varphi(h, c(h))dh$ در می‌آید که در آن، h معرف میزان ترافیک یا جریان روی مسیر r و $c(h)$ تابع زمان مسافرت روی مسیر r است. اگر فرض کنیم که میزان ترافیک به زمان بستگی دارد؛ یعنی در بعضی ساعات روز ترافیک در منطقه مورد بررسی؛ که مسیر r در آن قرار دارد، بیشتر می‌شود، آنگاه در حالت کلی ترافیک تابعی از زمان است؛ بنابراین عبارت فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$G(t) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(h(t), c(t))\, h'(t)dt \qquad (۱۴)$$

که در آن، $h(t)$ میزان ترافیک روی مسیر r در زمان t، $h'(t)$ مشتق آن، $c(t)$ زمان مسافرت روی مسیر r که (تابعی از میزان ترافیک و در نتیجه) تابعی از t است؛ t_0 زمان شروع مسافرت روی مسیر r از نقطه a و t_1 زمان اتمام مسافرت روی مسیر r درنقطه b را نشان می‌دهند. به طور مشابه مینیمم‌های تابع $G(t)$، جواب عمومی مسأله تعادل ترافیک کاربر را در حالتی که جریان و زمان مسافرت، تابعی از زمان باشند (در حالت پویا)، نشان می‌دهند.

۸- تعادل ترافیک کاربر از دیدگاه هندسه فینسلر

در این قسمت یک مدل ریاضی برای حل مسأله تعادل ترافیک کاربر واردروپ در حالت پویا ارائه می‌دهیم. این مدل که از تلفیق نتایج به دست آمده در بخش‌های قبل حاصل می‌شود، مسأله تعادل ترافیک کاربر واردروپ را به کلی‌ترین حالت ممکن تعمیم داده است. ایده اصلی این مدل از آنجا ناشی می‌شود که در بخش ۳ دیدیم که از دیدگاه هندسه، اگر ترافیک را به عنوان یک عامل خارجی در نظر بگیریم، جواب‌های به دست آمده برای یافتن سریع‌ترین مسیر، ژئودزیکهای یک متریک راندرز می‌شوند. در بخش۶ هم دیدیم که تابع فاصله فیشر- برمیستر یک متریک فینسلر از نوع راندرز است که ژئودزیک‌های آن مسیر بهینه را می‌دهند. با توجه به آنچه در بخش ۷ در مورد مسأله تعادل ترافیک کاربر پویا آورده شد، می‌توان مسأله تعادل ترافیک کاربر پویا را با استفاده از هندسه فینسلر به صورت زیر مدل سازی ریاضی کرد.

لم ۱- هر تابع فینسلر $\overline{F}(x,y)$ روی صفحه R^2، شرایط یک تابع فاصله در حل مسأله تکمیلی غیرخطی را دارد.

اثبات: فرض کنید که وسیله نقلیه با نیروی حرکت ثابت بین مبدأ و مقصد b,a روی R^2 مسیر r را که یک خم هموار است، طی می‌کند و $\overline{F}(x,y): TR^2 \setminus \{0\} \to R^+$ یک تابع اساسی هندسه فینسلر است. می‌دانیم که مینیمم‌های انتگرال زیر طول کوتاه‌ترین مسیر بین a و b را می‌دهد.

$$L_{\overline{F}}(r) = \int_a^b \overline{F}(x(t), y(t))dt \qquad (۱۵)$$

با توجه به آنکه متریک به دست آمده از نوع فینسلر است، شرایط زیر به خودی خود برقرارند[۲]: ۱. طول این مسیر مستقل از انتخاب پارامتر t است. ۲. طول همواره عددی مثبت است، زیرا $\overline{F}(x,y)$ روی $TR^2 \setminus \{0\}$ تابعی مثبت است.

۳. اگر قرار دهیم $g_{ij} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \overline{F}^2}{\partial y^i \partial y^j}$، آنگاه $\det(g_{ij}) \geq 0$.

۴. $\overline{F}(x,y)$ تابعی دیفرانسیل پذیر است. بنابراین، تابع فوق تمام شرایط یک تابع فاصله در حل مسأله تکمیلی غیرخطی را دارد [۳].

قضیه۳- جواب‌های یک مسأله تکمیلی غیرخطی برای حل مسأله تعادل ترافیک کاربر در یک سیستم حمل و نقل پویا روی ژئودزیک‌های یک متر فینسلر $\overline{F}(x,y)$ از نوع راندرز قرار دارند که در آن $x(t)$ میزان جریان در زمان t و $y(t) = \dot{x}(t)$

سرعت وسیله نقلیه در زمان t را نشان می‌دهد.

اثبات: اگر در انتگرال (۱۵)، $x(t)$ میزان ترافیک (جریان) در زمان t و $y(t)=\dot{x}(t)$ سرعت وسیله نقلیه در زمان t را نشان دهد، آنگاه شرایط تعادل کاربر واردروپ به صورت $\overline{F}(x,y)=0 \Leftrightarrow x\geq 0,\ y\geq 0,\ x.y=0$ نوشته می‌شود. از نظر شهودی $\overline{F}(x,y)=0$ بیانگر آن است که میزان ترافیک آنقدر زیاد شده که وسیله نقلیه از حرکت ایستاده یا سرعت آن صفر شده است $(y=0)$ و در نتیجه $x.y=0$. بنابراین با توجه به مطالب بخش ۷ و لم ۱ حکم ثابت می‌شود.

۹- نتیجه

۱. از دیدگاه هندسه فینسلر با در نظر گرفتن ترافیک، سریع ترین مسیرها با معادلات ژئودزیک های یک متریک راندرز داده می‌شوند.

۲. تابع فاصله فیشر- برمیستر در حل یک مسأله تکمیلی غیرخطی را می‌توان به عنوان یک متر راندرز خاص درنظر گرفت.

۳. از جنبه هندسی، حل مسأله تکمیلی غیرخطی در ریاضیات کاربردی را می‌توان به یافتن ژئودزیک‌های یک متریک راندرز تغییر داد که بسیار ساده تر از متدهای رایج حل این مسأله است.

۴. با جمع بندی مطالب فوق می‌توان یک مدل ریاضی برای حل مسأله تعادل ترافیک کاربر واردروپ در حالت پویا ارائه کرد که در مسائل مختلف مانند تعادل در عرضه و تقاضای بازار، تعادل در نظریه بازی‌ها، تعادل در شبکه‌های توزیع برق و تعادل در شبکه‌های حمل و نقل کاربرد دارد.

۱۰- مراجع

[۱] بهروز بیدآباد، "هندسه منیفلد (۱)"، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر، چاپ دوم ۱۳۸۱.

[۲] اعظم آسنجرانی، "فضاهای فینسلر مسطح تصویری و فضاهای فینسلری که تانسور انحنای افقی آنها فقط به x بستگی دارد"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تحت راهنمایی دکتر بهروز بیدآباد، اردیبهشت ماه ۱۳۸۱.

[۳] اسماعیل کشاورز، "تحلیل حساسیت مسأله تعادل ترافیک"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تحت راهنمایی دکتر اسماعیل خرم، آبان ۱۳۸۲.

[٤] P.L. Antonelli, R.S. Ingarden, M. Matsumoto, "*The theory of Sprays and Finsler spaces with applications in Physics and Biology*", Kluwer Academic publishers, 1993.

[٥] M.S. Bazarra, H.D. Shetty, H.D. Sherali, "*Nonlinear programming*", Wiley and Sons, NewYork, 1993.

[٦] F.H. Clarck, "*Optimization and nonsmooth analysis*", Wiley, NewYork, 1983.

[٧] H.Z. Ashtiani, "*The multi-modal traffic assignment problem* " PhD Thesis, Operations Research center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1979.

[٨] H.Z. Ashtiani, T.L. Magnanti, "*Equilibria on a congested transportation network* ", SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 2, p.p. 213-226, 1981.

[٩] F. Facchinei, J. Soares, "*A New Merit Function for Nonlinear Complementarity Problems and a Related Algorithm* ", SIAM J. Optim. 7, 225-247, 1997.

[١٠] C. Gieger, C. Kanzow, "*On the resolution of monotone complementarity problems*", Comput. Optim. Appl., 5, 155-173, 1996.

[١١] C.Kanzaw, M. Fukushima, "*Equivalence of the Generalized Complementarily Problem to Differentiable Unconstrained Minimization* ", Journal of Optimization Theory and Applications, 90,2, p.p. 581-603, 1996.

[١٢] L. Liao, H. Qi, L. Qi, "*Solving Nonlinear Complementarity Problems with Neural Networks: a Reformulation Method Approach*", Journal of Computational and applied Mathematics, 131, 343-359, 2001.

[١٣] H.K. Lo, A. Chen, "*Reformulating the traffic equilibrium problem via a smooth Gap function* ", Mathematical and Computer modeling, 31 p.p. 179-195, 2000.

[١٤] M. Patriksson, "*The traffic assignment problem-Models and Methods, Topics in transportation*" , VSP BV, Utrecht, The Netherlands 1994.

[١٥] C.Robles, "*Geodesics in Randers Spaces of Constant curvature*", arXiv: math.DG/0501358 v2 8 Jul 2005.

[١٦] Y. Sheffi, "*Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods* ", Prentice-Hall, Englewood clifs, NJ, 1985.

۱۱- زیرنویس ها

1 Finsler structure
2 Finsler space
3 Randers space
4 geodesic
5 piecewise differentiable
6 Fischer
7 Burmeister
8 Clarke
9 Qi
10 Yamashita
11 Jiang
12 Facchinei
13 Kanzow
14 Liao
15 Geiger
16 J.G. Wardrop