

# ارتعاشات آزاد تیر با دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد

مجیدرضا آیت‌اللهی<sup>۱</sup>؛ حمید رخی<sup>۱</sup>؛ روح‌الله هاشمی<sup>۱</sup>

## چکیده

در این مقاله، یک مدل المان محدود برای آنالیز دینامیکی تیر تیموشنکو دارای دو ترک لبه‌ای با طول‌های نامتساوی، معرفی می‌شود. با استفاده از مفهوم ماتریس نرمی؛ که از انعطاف پذیری محلی ناشی از وجود ترک در سازه به دست می‌آید، ماتریس سختی سازه در حالت کلی معرفی، سپس ماتریس سختی برای تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای هم امتداد محاسبه شده، تأثیر موقعیت و عمق ترک روی فرکانس‌های طبیعی اول و سوم تیر بررسی می‌شود. در ادامه، این مدل برای حالتی که المان دارای دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد با طول‌های نامتساوی باشد، توسعه داده می‌شود. به کمک محاسبات انجام شده برای ماتریس سختی، یک نرم افزار اجزای محدود تهیه و برای بررسی ارتعاشات طبیعی تیر ترکدار استفاده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد وقتی امتداد دو ترک به هم نزدیک می‌شود، تأثیر ترک‌ها روی ارتعاشات آزاد تیر به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. روش ریاضی ارائه شده در این مقاله، تغییرات در مشخصات ارتعاشی سازه ترکدار را بخوبی شبیه‌سازی می‌کند.

## کلمات کلیدی

تیر ترکدار، ارتعاشات آزاد، روش اجزای محدود، ضرایب انعطاف پذیری

## *Free vibration of beam with double-sided edge cracks*

M. R. Ayatollahi, H. Rokhi, R. Hashemi

### ABSTRACT

In this paper, a finite element model is formulated for dynamic analysis of beams containing two parallel and unequal edge-cracks. First, by using the compliance matrix concept, which accounts for the effect of local flexibility due to the presence of crack in the structure, the stiffness matrix is calculated for a beam element with one edge-crack. The effects of crack depth and its location on the first and third natural frequencies of the beam are investigated. The same model is then extended for an element with a double edge-crack of unequal lengths. Considering the interaction between cracks, the influence of crack depth on free vibration of the beam is investigated. Finally, a new model is developed for a beam element containing two parallel edge-cracks. It is shown that the vibrational behavior of beam is significantly influenced when the second crack approaches the first one.

### KEYWORDS

Cracked beam, free vibration, Finite element method, compliance matrix.

<sup>۱</sup> استاد دانشکده مهندسی مکانیک؛ تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، آزمایشگاه تحقیقاتی خستگی و شکست، کدپستی ۸۶۸۴۶، آدرس پست الکترونیک: m.ayat@iust.ac.ir  
<sup>۱</sup> کارشناس ارشد مهندسی مکانیک.



در تعیین رفتار دینامیکی یک تیر، در نظر گرفتن پارامترهایی چون تأثیر ممان اینرسی و تغییر فرم‌های برشی می‌تواند نقش مهمی داشته باشد؛ لذا برای بررسی این رفتار، استفاده از تئوری تیر تیموشنکو به‌جای تئوری تیر اویلر-برنولی از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود.

رفتار ارتعاشی تیر تیموشنکو در حالت بدون ترک را محققین متعددی بررسی کرده‌اند. به عنوان مثال، دیویس و هنشل [۱]، توماس و همکاران [۲]، کاپور [۳] و تبرک و کلگورن [۴]، مدل‌های ریاضی مختلفی را برای بررسی ارتعاشات تیر تیموشنکو ارائه دادند. توماس و عباس [۵]، [۶]، یک مدل المان محدود برای یک تیر ضخیم غیر چرخشی، عباس [۷] برای تیر ضخیم غیر چرخشی با اثرات پیچش اولیه و اخیراً گوپتا و رائو [۸]، برای تیر تیموشنکو با چرخش اولیه و با سطح مقطع متغیر، مدل‌هایی ریاضی را با استفاده از روش گالرکین ارائه دادند.

به منظور بیان انعطاف پذیری محلی بواسطه وجود ترک، می‌توان از مفهوم ماتریس نرمی؛ که از ضرایب شدت تنش برای ترک به‌دست می‌آید، استفاده کرد. به عنوان مثال، تادا و ایروین [۹]، چاندورز و دیماروگوناتس [۱۰]، دیماروگوناتس و ماسوروس [۱۱] و گوناریس و دیماروگوناتس [۱۲]، با استفاده از مفهوم ماتریس نرمی برای ترک، ماتریس سختی یک المان ترکدار را محاسبه کردند. کیان و همکاران [۱۳]، با استفاده از مفهوم ماتریس نرمی برای ترک، مدل المان محدودی برای تیر ترکدار اویلر-برنولی، کیسا و براندون [۱۴] برای تیر ترکدار تیموشنکو، چن و چن [۱۵] و چن و جینگ [۱۶]، برای تیر تیموشنکوی ترکدار در حال چرخش با پیچش اولیه ارائه دادند. کلیه مطالعات مذکور برای حالتی است که یک ترک روی یکی از لبه‌های تیر در نظر گرفته می‌شود. در بسیاری از کاربردهای عملی؛ که تیر تحت خمش‌های کامل متوالی قرار می‌گیرد، ترک خستگی روی هر دو لبه تیر ایجاد می‌شود.

برای بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر با دو ترک لبه‌ای هم‌امتداد با طول‌های مساوی، کریستیدز و بار [۱۷] و شن و پیر [۱۸] مدل المان محدودی با استفاده از تعداد زیادی المان‌های تکین پیشنهاد کردند. از آنجا که استفاده از المان‌های تکین مستلزم بکارگیری تعداد زیادی المان برای مدل‌سازی مناسب ترک است، به کارگیری المان‌های ویژه ترکدار با دو ترک لبه‌ای از لحاظ محاسباتی بسیار مقرون به صرفه تر می‌باشد؛ ضمن این‌که در مطالعات قبلی، طول ترک روی دو لبه تیر، مساوی با یکدیگر منظور یا این‌که دو ترک لبه‌ای هم‌امتداد فرض شده‌اند.

هدف از این تحقیق، استفاده از المان ویژه ترکدار با دو ترک لبه‌ای برای بررسی اثر نامساوی بودن اندازه ترک‌ها یا غیر هم‌امتداد بودن آنها روی رفتار ارتعاشی تیر تیموشنکو است. برای به‌دست آوردن ماتریس‌های جرم و سختی، ابتدا معادله انرژی کرنشی یک المان از تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن اثرات کرنش برشی، و معادله انرژی جنبشی با در نظر گرفتن اثرات ممان اینرسی برای المان، نوشته می‌شود و سپس با در نظر گرفتن بردار تغییر مکان‌های گره‌ای تعریف شده برای المان، ماتریس‌های سختی و جرم به‌دست می‌آید. وجود ترک در سازه، باعث ایجاد یک انعطاف پذیری محلی می‌شود که سختی سیستم را کاهش می‌دهد. با استفاده از مفهوم ماتریس نرمی؛ که از انعطاف پذیری محلی به‌وسیله وجود ترک به‌دست می‌آید، ماتریس سختی ناشی از وجود ترک محاسبه می‌شود.

از آنجا که در یک تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای نابرابر هم‌امتداد، به وسیله اندرکنش ترک‌ها نمی‌توان از ضرایب شدت تنش ارائه شده در مرجع [۹] استفاده کرد، برای محاسبه ضرایب شدت تنش، از یک حل گر المان محدود (نرم افزار ANSYS) استفاده و سپس از روش‌های عددی، ضرایب انعطاف پذیری محاسبه می‌گردند. به دنبال آن، مدل اخیر برای یک تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای نابرابر و غیر هم‌امتداد، با در نظر گرفتن اندرکنش بین ترک‌ها، توسعه داده شده و اثرات افزایش نسبت طول ترک‌ها و فاصله بین دو ترک بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر بررسی می‌شود.

## ۲- محاسبه ماتریس‌های سختی و جرم برای المان

### تیر تیموشنکو بدون ترک

در این بخش، نحوه محاسبه ماتریس‌های سختی و جرم برای یک المان تیر تیموشنکو (در حالت بدون ترک) ارائه می‌شود. ابتدا یک المان دو گره‌ای، به طول  $l$  با چهار درجه آزادی برای هر گره در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱). درجات آزادی هر گره به ترتیب  $\psi$  تغییر شکل کلی،  $\psi'$  شیب کلی،  $\phi$  شیب خمش و  $\phi'$  اولین مشتق شیب خمش منظور می‌شود. با توجه به درجات آزادی تعریف شده برای این المان، معادله انرژی کرنشی برای کل سیستم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} kAG \int_0^l \left( \frac{d\psi}{dx} - \phi \right)^2 dx \quad (1)$$

در رابطه بالا،  $k$ ، ضریب برشی مربوط به سطح مقطع تیر است که این ضریب برای سطح مقطع مستطیل شکل  $\frac{6}{5}$ ، دایروی شکل  $\frac{10}{9}$  و I شکل، یک می‌باشد. با تقریب هریک از

توابع  $\psi$  و  $\phi$  با یک چند جمله‌ای درجه سه به صورت زیر:

$$\psi = \sum_{r=0}^3 a_r \eta^r \quad \phi = \sum_{r=0}^3 b_r \eta^r \quad (2)$$

می‌توان هر یک از توابع  $\psi$  و  $\phi$  را بر حسب تغییر مکان‌های گره‌ای نوشت. برای محاسبه ماتریس سختی، با در نظر گرفتن رابطه (۲)، حاصل انتگرال انرژی کرنشی به فرم زیر نوشته می‌شود که در آن  $[K]$  ماتریس سختی سیستم و  $\xi$  بردار تغییر مکان‌های گره‌ای المان است و مطابق جزئیات ذکر شده در مرجع [۱۹] عبارتند از:

$$U = \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K] \{\xi\} \quad (3)$$

$$\{\xi\}^T = [\psi_i \quad \phi_i \quad \psi'_i \quad \phi'_i \quad \psi_{i+1} \quad \phi_{i+1} \quad \psi'_{i+1} \quad \phi'_{i+1}] \quad (4)$$

$$[K] = [8 \times 8] \text{ به ضمیمه مقاله مراجعه شود} \quad (5)$$

در ماتریس بالا،  $s$  پارامتر برشی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = \frac{kAGI^2}{EI} \quad (6)$$

از سوی دیگر، با توجه به درجات آزادی تعریف شده برای المان، معادله انرژی جنبشی برای کل سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$T = \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \dot{\phi}^2 dx + \frac{1}{2} \rho A l^2 \int_0^L \dot{\psi}^2 dx \quad (7)$$

برای محاسبه ماتریس جرم، حاصل انتگرال بالا با توجه به رابطه (۲)، به صورت رابطه (۸) نوشته می‌شود که در آن  $[M]$  ماتریس جرم سیستم،  $\xi$  بردار تغییر مکان‌های گره‌ای المان و  $\xi$  مشتق بردار تغییر مکان‌های گره‌ای المان نسبت به زمان است. (طبق مرجع [۱۹]):

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\xi}\}^T [M] \{\dot{\xi}\} \quad (8)$$

$$[M] = [8 \times 8] \text{ به ضمیمه مقاله مراجعه شود} \quad (9)$$

در ماتریس جرم،  $R$  پارامتر ممان اینرسی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \frac{I}{Al^2} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن اصل لاگرانژ، می‌توان معادله تعادل دینامیکی برای المان مفروضه را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) = \{0\} \quad (11)$$

که  $\xi$  بردار تغییر مکان‌های گره‌ای با توجه به درجات آزادی تعریف شده برای المان خواهد بود. با جایگزین کردن معادلات (۱) و (۸) به جای ترم‌های  $U$  و  $T$ ، معادله تعادل دینامیکی به

معادله ساده تر زیر تبدیل می‌شود:

$$[[K] - \omega_i^2 [M]] \{\zeta_i\} = \{0\} \quad (12)$$

و با حل معادله مشخصه دینامیکی فوق، مشخصات دینامیکی سازه ترکدار به دست می‌آید.

### ۳- محاسبه ماتریس سختی ترک

وجود ترک در مقطع تیر، یک انعطاف پذیری محلی را در سازه به وجود خواهد آورد. این انعطاف پذیری محلی به دلیل تغییر است که در انرژی کرنشی سیستم حول ناحیه ترک اتفاق می‌افتد. در این قسمت، یک المان با سطح مقطع مستطیلی؛ که یک ترک لبه‌ای به عمق  $a$  دارد، در نظر گرفته شده است (شکل ۲). همان‌طور که از شکل پیداست، المان، شش درجه آزادی دارد و بارگذاری وارده به آن شامل بارهای  $P_1, \dots, P_6$  می‌باشد. جایجایی را به فرم تابعی از نرخ آزاد سازی انرژی کرنشی  $J$ ، می‌توان بیان کرد [۹]:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^a J da \quad (15)$$

ضرایب انعطاف پذیری نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a J da \quad (16)$$

نرخ آزاد سازی انرژی کرنشی  $J$ ، به صورت تابعی از ضرایب شدت تنش؛ که به شکل ترک و نوع بارگذاری وارده بر آن وابسته است، بیان می‌شود [۹]:

$$J = \frac{1}{E'} \left[ \left( \sum_{k=1}^6 K_{Ik}^2 \right) + \left( \sum_{k=1}^6 K_{IIk}^2 \right) + (1+\nu) \left( \sum_{k=1}^6 K_{IIIk}^2 \right) \right] \quad (17)$$

برای حالت تنش صفحه ای  $E' = E$  و برای حالت کرنش صفحه‌ای  $E' = E/(1-\nu^2)$  است. در رابطه اخیر  $K_I, K_{II}, K_{III}$  به ترتیب ضرایب شدت تنش مودهای اول تا سوم بارگذاری است و منظور از نماد  $\sum_{k=1}^6$ ، اثر ضرایب شدت تنش مودهای بارگذاری مربوط به بارهای اعمال شده بر ترک می‌باشد. البته، این ضرایب برای بعضی از بارگذاری‌ها صفر است؛ به عنوان مثال:  $K_{III}$  (ضریب شدت تنش مود سوم بارگذاری با اعمال نیروی محوری  $P_1$ ) صفر است؛ زیرا نیروی محوری، مود سوم بارگذاری را تحریک نمی‌کند. باید توجه داشت که بعضی از بارگذاری‌ها، به طور مشترک فقط یک مود ترک را تحریک می‌کنند؛ به عنوان نمونه: کشش و خمش باعث ایجاد تنش‌های کششی در امتداد محور تیر می‌شود و هر دو، مود اول بارگذاری را تحریک می‌کنند؛ بنابراین، در ماتریس انعطاف پذیری دو ترم  $C_{51}$  و  $C_{15}$  وجود دارند. به طور مشابه، از آنجا که پیچش و برش هر دو، مود دوم بارگذاری را تحریک

می‌کنند، ترم‌های  $C_{36}$  و  $C_{63}$  در ماتریس انعطاف پذیری وجود دارند.

با توجه به روابط گفته شده و نحوه بار گذاری نشان داده شده در شکل (۲)، ماتریس انعطاف پذیری به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} & C_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & C_{26} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ C_{41} & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ C_{51} & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ 0 & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (18)$$

این ماتریس، رابطه ای بین بردار جابجایی  $\{\delta\} = [\delta_1, \dots, \delta_6]$  و بردار نیروهای خارجی  $\{P\} = [P_1, \dots, P_6]$  را بیان می‌کند. در اینجا، منظور از بردار نیروهای خارجی  $\{P\}$ ، همان نیروهای نشان داده شده در شکل (۲) است. (نیروی محوری  $P_1$ ، برشی  $P_2$  و  $P_3$ ، ممان خمشی  $P_4$  و  $P_5$  و گشتاور پیچشی  $P_6$ ) و منظور از بردار جابجایی  $\{\delta\}$ ، جابجایی‌های متناظر با این نیروها خواهد بود. (به عنوان نمونه:  $\delta_1$  جابجایی متناظر با نیروی محوری  $P_1$  است.)

با در نظر گرفتن یک المان کوچک حول ترک، بردار نیروهای قبل از خود ترک  $\{P\}^-$  و بردار جابجایی متناظر با این نیروها  $\{\delta\}^-$ ، بردار نیروهای بعد از خود ترک  $\{P\}^+$  و بردار جابجایی متناظر با این نیروها  $\{\delta\}^+$ ، فرض می‌شود. معادله تعادل نیروها و مؤلفه های جابجایی حول ترک به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$-\{P\}^+ = \{P\}^- \quad (19)$$

$$\{\delta\}^+ - \{\delta\}^- = [C] \{ \{P\}^+ - \{P\}^- \} \quad (20)$$

با نوشتن معادلات بالا به فرم ساده زیر:

$$\{P\} = [K] \{\delta\} \quad (21)$$

ماتریس سختی برای ترک به دست خواهد آمد:

$$[K_{cr}] = \begin{bmatrix} [C]^{-1} & -[C]^{-1} \\ -[C]^{-1} & [C]^{-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

از آنجا که المان در نظر گرفته شده در این مقاله، تنها تحت دو حالت بارگذاری نیروی برشی  $P_3$  و ممان خمشی  $P_5$  است؛ لذا ماتریس نرمی برای ترک به فرم زیر خواهد بود:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{33} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (23)$$

با در نظر گرفتن ترک بین دو المان  $i$  و  $i+1$ ، و فرض کردن رفتار ترک به صورت یک فنر با ضریب سختی

انتقالی  $K_1$  و ضریب سختی چرخشی  $K_2$ ؛ که  $K_1$  و  $K_2$  به ترتیب معکوس ضرایب  $C_{33}$  و  $C_{55}$  می‌باشند، معادلات قید زیر را حول ترک می‌توان نوشت [۱۵]:

$$\phi_i = \phi_{i+1} + \beta_2 \phi'_i, \quad (24)$$

$$\psi_i = \psi_{i+1} + \beta_1 (\psi'_{i+1} - \phi_{i+1}), \quad (25)$$

$$\psi'_i = \psi'_{i+1} + \beta_2 \phi'_i, \quad (26)$$

$$\phi'_i = \phi'_{i+1}, \quad (27)$$

در این روابط،  $\beta_1$  پارامتر نرمی انتقالی و  $\beta_2$  پارامتر نرمی چرخشی، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\beta_1 = \frac{kAG}{LK_1} \quad (28)$$

$$\beta_2 = \frac{EI}{LK_2} \quad (29)$$

#### ۴- محاسبه ماتریس سختی تیر با دو ترک لبه ای غیر هم امتداد

مشابه روابط بخش قبل را می‌توان برای تیر با دو ترک لبه‌ای هم امتداد نیز استخراج کرد. از آنجا که ارتعاشات تیر با دو ترک لبه‌ای هم امتداد در مقالات قبلی مطالعه شده است [۱۷]، [۱۸] در این بخش، ارتعاشات تیر تیموشنکو در حالتی شرح داده می‌شود که دو ترک لبه‌ای موجود در تیر، غیر هم امتداد باشند.

المانی با دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد به طول های  $a$  و  $d$  را در نظر بگیرید. می‌توان این المان را به صورت سه جزء در نظر گرفت که با دو فنر با سختی‌های متفاوت به یکدیگر متصل شده‌اند و سختی این فنرها متناظر با طول ترک‌ها است. در اینجا، رابطه (۱۷) برای محاسبه سختی فنر  $k_1$  به فرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$J = \frac{1}{E'} [K_{I_a}^2 + K_{II_a}^2] \quad (32)$$

به صورت مشابه، رابطه (۱۷) برای محاسبه سختی فنر  $k_2$  به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$J = \frac{1}{E'} [K_{I_d}^2 + K_{II_d}^2] \quad (33)$$

به خاطر اندرکنش بین ترک‌ها، ضرایب شدت تنش آنها را نمی‌توان مستقیماً از هندبوک‌ها (به عنوان مثال مرجع [۹]) استخراج کرد؛ بنابراین، به منظور محاسبه ضرایب شدت تنش مربوط به مودهای اول و دوم ترک‌های  $a$  و  $d$ ، برای استفاده در روابط (۳۲) و (۳۳)، از حل گر المان محدود ANSYS استفاده شد. از آنجا که مقادیر عددی ضرایب شدت تنش برای دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد، با استفاده از نرم افزار المان محدود

[۱۸] مقایسه شده است. همچنین در ادامه، نتایج به دست آمده برای تیر با دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد، ارائه می‌شوند. به منظور مقایسه نتایج، لازم است که دو پارامتر بدون بعد نسبت فرکانسی ( $FR$ ) و نسبت عمق ترک ( $CR$ ) به صورت زیر تعریف شوند:

$$FR = \frac{f_{cr}}{f} \quad (42)$$

$$CR = \frac{a}{h} \quad (43)$$

که در آنها  $f$  و  $f_{cr}$ ، به ترتیب فرکانس طبیعی تیر در دو حالت ترکدار و بدون ترک و  $a$  عمق ترک موجود روی لبه بالایی تیر است (شکل ۳). در مثال اول، یک تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای هم امتداد و هم طول؛ که دقیقاً در وسط تیر قرار دارند، با شرایط مرزی تکیه گاه ساده در نظر گرفته می‌شود. مشخصات هندسی و فیزیکی تیر، به صورت زیر است:

$$h=9.525\text{mm}, L=575\text{mm}, b=31.75\text{mm}, \nu=0.3$$

$$\rho = 7850 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}, G=75 \text{ GPa}, E=200 \text{ GPa}, \quad (44)$$

شکل‌های (۳) و (۴)، تغییرات نسبت فرکانس طبیعی اول و سوم را بر حسب تغییرات نسبت عمق ترک نشان می‌دهند. نتایج به دست آمده از این تحقیق با نتایج ارائه شده در مراجع [۱۷]، [۱۸] مقایسه شده اند که مطابقت بسیار خوبی را نشان می‌دهد. در مثال بعدی، یک تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای هم امتداد و هم طول؛ که دقیقاً در وسط تیر قرار دارند، با شرایط مرزی یک سرگیردار- یک سر آزاد، در نظر گرفته می‌شود. مشخصات هندسی و فیزیکی تیر، به صورت زیر است:

$$d=0.5h, b=25\text{mm}, h=7.8\text{mm}, L=0.2\text{m}, \nu = 0.28,$$

$$\rho = 7850 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}, G=81\text{GPa}, E=216\text{GPa}, \quad (45)$$

شکل (۵)، تغییرات نسبت فرکانس طبیعی ( $FR$ ) اول را برای حالتی نشان می‌دهد که طول یکی از ترک‌ها ( $d$ ) ثابت است و طول ترک دیگر ( $a$ ) به سمت صفر میل می‌کند. ترک‌ها در این حالت نیز هم امتدادند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که با صفر شدن طول یکی از ترک‌ها، نسبت فرکانس طبیعی ( $FR$ ) با نتایج ارائه شده برای تیر تیموشنکو با یک ترک لبه‌ای در مرجع [۱۴]، مطابقت بسیار خوبی دارد.

در ادامه، یک تیر تیموشنکو با شرایط مرزی یک سرگیردار- یک سر آزاد، با دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد به طول‌های  $a$  و  $d$ ، در نظر گرفته می‌شود (شکل ۶). در این حالت، ترک  $d$  همواره در وسط تیر واقع می‌شود و ترک  $a$  از آن فاصله می‌گیرد. مشخصات هندسی و فیزیکی تیر، به صورت زیر است:

$$a = 0.35h \quad d = 0.5h, b=31.75\text{mm},$$

به دست می‌آید، لذا برای محاسبه ضرایب انعطاف پذیری  $C_{ij}$  از رابطه (۱۶)، از روش‌های عددی مربوط به انتگرال گیری گوس- کوادریچر و مشتق گیری عددی به صورت زیر استفاده شد [۲۰]:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (34)$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (35)$$

که در این رابطه،  $\Delta x$  یک نمو کوچک از پارامتر  $x$  خواهد بود. با توجه به دو رابطه اخیر، ضریب  $C_{33}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_{33} = \left(\frac{a}{2\Delta P^2}\right) \{J(a_1, P + \Delta P) + J(a_2, P + \Delta P)\} \quad (36)$$

$$- 2\{J(a_1, P) + J(a_2, P)\} \{J(a_1, P - \Delta P) + J(a_2, P - \Delta P)\} \quad (37)$$

$$a_1 = \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}} a$$

$$a_2 = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{3}} a \quad (38)$$

$$\Delta P = 0.025P \quad (39)$$

بنابراین، برای محاسبه ضریب  $C_{33}$ ، برای تیری با دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد به طول‌های  $a$  و  $d$ ، لازم است مقدار پارامتر  $J$  را برای شش حالت به دست آورد و سپس با استفاده از رابطه (۳۶)، مقدار این ضریب را محاسبه کرد. به صورت مشابه برای محاسبه ضریب  $C_{55}$ ، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$C_{55} = \left(\frac{a}{2\Delta M^2}\right) \{J(a_1, M + \Delta M) + J(a_2, M + \Delta M)\} \quad (40)$$

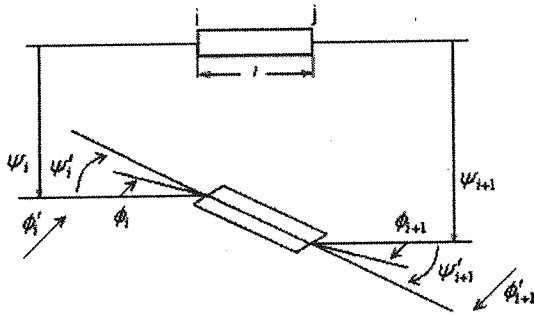
$$- 2\{J(a_1, M) + J(a_2, M)\} \{J(a_1, M - \Delta M) + J(a_2, M - \Delta M)\}$$

$$\Delta M = 0.025M \quad (41)$$

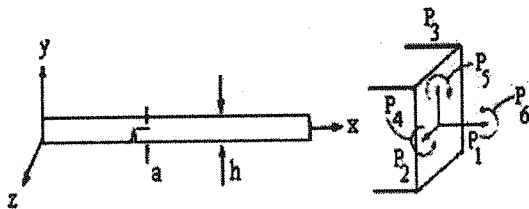
به طور مشابه، برای محاسبه ضریب  $C_{55}$ ، مقدار پارامتر  $J$  را برای شش حالت محاسبه می‌شود و سپس با استفاده از رابطه (۴۱)، مقدار این ضریب به دست می‌آید.

## ۵- نتایج عددی و بحث و بررسی

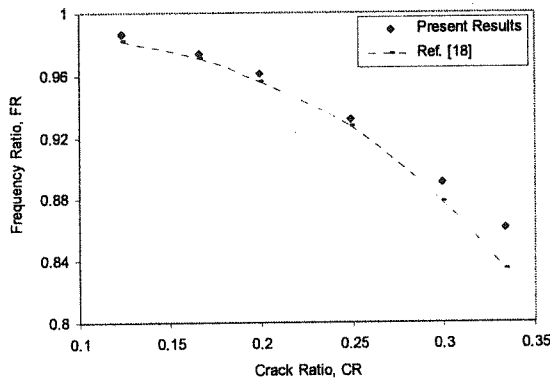
به منظور بررسی صحت و دقت روش المان محدود ارائه شده، برنامه نرم افزاری تهیه شد تا بتوان با تعیین مشخصات هندسی و فیزیکی تیر و همچنین موقعیت و اندازه دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر را محاسبه کرد. در این بخش، چند مثال عددی ارائه شده و نتایج آن مختصراً بحث و بررسی می‌شود. به منظور تأیید صحت محاسبات و نتایج، ابتدا یک مثال با دو ترک لبه‌ای هم امتداد تحلیل و نتایج آن با نتایج ارائه شده در مراجع [۱۷]،



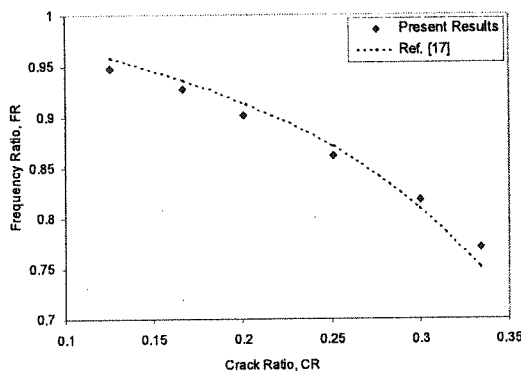
شکل (۱): المان اجزای محدود مفروض با درجات آزادی مربوطه



شکل (۲): هندسه و بارگذاری یک تیر با یک ترک لبه ای



شکل (۳): تغییرات نسبت فرکانسی اول تیر برحسب نسبت عمق ترک های هم امتداد و هم طول



شکل (۴): تغییرات نسبت فرکانسی سوم تیر برحسب نسبت عمق ترک های هم امتداد و هم طول

$$h=9.525\text{mm}, L=575\text{mm}, \nu=0.3$$

$$\rho = 7850 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}, G=75 \text{ GPa}, E=200 \text{ GPa} \quad (46)$$

شکل (۷)، تغییرات نسبت فرکانس طبیعی (FR) اول تیر را نسبت به افزایش نسبت فاصله بین دو ترک  $\left(\frac{\Delta}{h}\right)$ ، نشان می‌دهد. برای آنکه افزایش فاصله بین ترک‌ها، باعث تحریک اثر نزدیکی و یا دوری از تکیه گاه نشود، طول تیر به اندازه کافی بلند انتخاب شده است تا این اثر حداقل امکان کاهش یابد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که اگر فاصله بین دو ترک لبه ای  $(\Delta)$ ، به طور تقریبی به بیش از ۱۰ برابر عرض تیر برسد، می‌توان از اندرکنش بین ترک‌ها صرف‌نظر کرد؛ به عبارت دیگر، وقتی فاصله دو ترک از این مقدار کمتر می‌شود، دیگر نمی‌توان اثر دو ترک لبه‌ای روی ارتعاشات تیر را با دو ترک کاملاً مجزا و به کمک المان‌های ترکدار استفاده شده در مراجع قبلی مدل‌سازی کرد و در نظر گرفتن اندرکنش ترک‌ها اجتناب ناپذیر است. روشی که در این مقاله برای به‌دست آوردن ماتریس‌های جرم و سختی المان تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد استفاده شد، قابل توسعه برای المانی است که اثرات مخروطی دارد؛ همچنین این روش قابل توسعه برای المانی است که اثرات پیچش اولیه دارد و یا در حال چرخش حول یک محور است.

## ۶- نتیجه گیری

در این تحقیق، ابتدا ماتریس سختی برای تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای هم امتداد محاسبه شد. در ادامه، این مدل برای حالتی که المان دارای دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد با طول‌های نامتساوی باشد، توسعه داده شد. در این راستا، یک نرم افزار اجزای محدود به منظور بررسی ارتعاشات طبیعی تیر ترکدار تهیه شد. نتایج به‌دست آمده از این تحقیق با نتایج ارائه شده در مراجع [۱۷]، [۱۸] برای تیر تیموشنکو با دو ترک لبه‌ای هم امتداد؛ که دقیقاً در وسط تیر قرار دارند، مقایسه شد که مطابقت بسیار خوبی را نشان داد. نتایج به‌دست آمده بیانگر این بودند که اگر فاصله بین دو ترک لبه‌ای غیر هم امتداد  $(\Delta)$ ، به طور تقریبی به بیش از ۱۰ برابر عرض تیر برسد، می‌توان از اندرکنش بین ترک‌ها صرف‌نظر کرد.

lateral vibration analysis", *Journal of sound and Vibration*, 1992, 152(3), pp.461-470.

Thomas, J. and Abbas, B. H. H. , "Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam", *Journal of sound and Vibration*, 1975, 41 pp.291-299. [5]

Thomas, J. and Abbas, B. H. H. , "Dynamic stability of Timoshenko beams by finite element method ", *Trans. ASME, J. Engng. Ind*, 1976 pp.1145-1151. [6]

Abbas, B. H. H. , "Simple finite element for dynamic analysis of thick pre-twisted blades", *Aeronautical Journal*, 1979, pp.450-453. [7]

Gupta, R. S. , Rao, S. S. , "Finite element eigenvalue analysis of tapered and twisted Timoshenko beam", *Journal of sound and Vibration*, 2001 pp.103-124. [8]

Tada, H. and Irwin, G. R. , "The Stress Analysis of Cracks Handbook ", Del Research Corp. Hellerton, PA. , 1973. [9]

Chondors, T. G. and Dimarogonas, A. D. , "Identification of cracks in welded joints of complex structures", *Journal of sound and Vibration* , 1980 69, pp.531-538. [10]

Dimarogonas, A. D. and Massouras, G. , "Torsional vibration of a shaft with a shaft with a circumferential crack", *Engng. Fract. Mech*, 1980, 15, pp.439-444. [11]

Gounaris, G. and Dimarogonas, A. D. , "A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis", *Computers & Structures* , 1988 2(3) , pp.309-313. [12]

Qian, G. L. , Gu, S. N. and Jiung, J. S. , "The dynamic behavior and crack detection of a beam with a crack", *Journal of sound and Vibration* , 1990, 138(2), pp.233-243. [13]

Kisa, M. and Brandon, J. , " The effects of closure of cracked on the dynamics of a cracked cantilever beam", *Journal of sound and Vibration* , 2000. [14]

Chen, L. W. and Chen, C. L. , "Vibration and stability of cracked thick rotating blades", *Computers & Structures*, 1988, 2(1), pp.6774 [15]

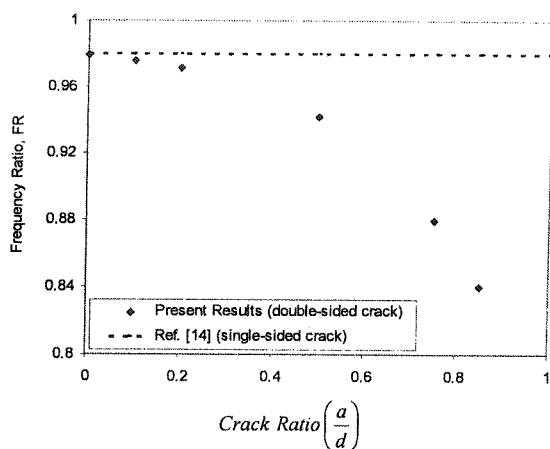
Chen, L. W. and Jeng, C. J. , "Vibration analysis of cracked pre-twisted blades", *Computers & Structures*, 1993, 4(1), pp.133-140. [16]

Christides, S. and Barr, A. D. S. , " On-Dimensional theory of cracked Bernoulli- Euler beams", *Int. J. Mech. Sci* , 1984, 26 pp.639-648. [17]

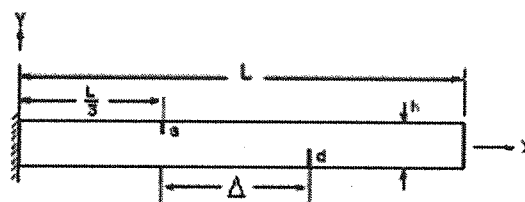
Shen, M. H. H. and Pierre, C. , "Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks", *Journal of sound and Vibration* , 1990 138(1), pp.115-134. [18]

Petyt, M. , "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", *Great Britain: Cambridge University Press*, 1990. [19]

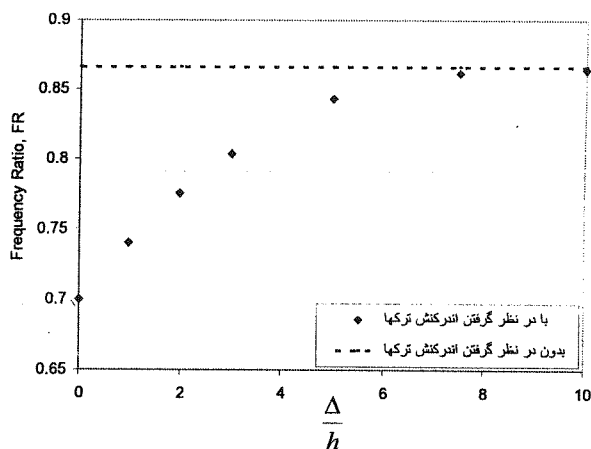
Gerald, C. F. and Wheatley, P. O. , " Applied Numerical Analysis", *Addison Wesley Longman, Inc*, 1992. [20]



شکل (۵): تغییرات نسبت فرکانسی اول تیر بر حسب نسبت عمق یکی از ترک ها به ترک دیگر



شکل (۶): تیری با دو ترک لبه ای غیر هم امتداد



شکل (۷): تغییرات نسبت فرکانسی اول تیر بر حسب فاصله بین ترک ها

## ۷- مراجع

Davis, R. and Henshell, G. B. , "A Timoshenko beam element ", *Journal of sound and Vibration*, 1972 22(4), pp.475-487. [1]

Thomas, D. L. , Wilson, J. M. and Warburton, G. B. , " Timoshenko beam finite elements", *Journal of sound and Vibration*, 1973 31(3), pp. 315-330. [2]

Kapur, K. K. , "Vibration of a Timoshenko beam, using finite element approach", *Journal of Acoustical Society of America*, 1966, 40 pp.1058-1063. [3]

Tabarrok, B. and Cleghorn, W. L. , "Finite element formulation of a tapered Timoshenko beam for free [4]

۸- ضمیمه: اعضای ماتریس های سختی و جرم:

$$[K] = \frac{EI}{420 l} \begin{bmatrix} 504 s & 210 s & 42 s & 42 s & -504 s & 210 s & 42 s & -42 s \\ & 156 s + 504 & -42 s & 22 s + 42 & -210 s & 54 s - 504 & 42 s & -13 s + 42 \\ & & 56 s & 0 & -42 s & 42 s & -14 s & -7 s \\ & & & 4 s + 56 & -42 s & 13 s - 42 & 7 s & -3 s - 14 \\ & & & & 504 s & -210 s & -42 s & 42 s \\ & \text{Symm.} & & & & 156 s + 504 & -42 s & -22 s - 42 \\ & & & & & & 56 s & 0 \\ & & & & & & & 4 s + 56 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \frac{\rho A l^3}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 22 & 0 & 54 & 0 & -13 & 0 \\ & 156 R & 0 & 22 R & 0 & 54 R & 0 & -13 R \\ & & 4 & 0 & 13 & 0 & -3 & 0 \\ & & & 4 R & 0 & 13 R & 0 & -3 R \\ & & & & 156 & 0 & -22 & 0 \\ & \text{Symm.} & & & & 156 R & 0 & -22 R \\ & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 R \end{bmatrix}$$