

# تحلیل دینامیکی ناپایداری ورق‌های فلزی تحت کشش دو

## محوری

مهدی گردویی<sup>۱</sup>؛ بیژن ملایی داریانی<sup>۲</sup>

### چکیده

در فرآیندهای شکل‌دهی ورق‌های فلزی، متغیرهای فرآیند (مانند سرعت تغییر شکل) بر روی دیگر پارامترهای شکل‌دهی تأثیر به‌سزایی دارد. در این مقاله، با بهره‌گیری از معادلات حرکت (به جای معادلات تعادل) در تحلیل فرآیند کشش دو محوری ورق، تغییر شکل تدریجی یک نقص اولیه، شبیه‌سازی شده است. برای ماده‌ای با رفتار کرنش سخت و حساس به نرخ کرنش، اثر سرعت بارگذاری بر روی شکل و موقعیت منحنی‌های حد شکل‌دهی (FLD)، در محدوده وسیعی از نرخ کرنش به صورت تئوری بررسی شده است. همچنین در بارگذاری کرنش صفحه‌ای، نحوه تأثیر متقابل نرخ کرنش و پارامترهای ذاتی ورق (چگالی، توان کرنش سختی و حساسیت به نرخ کرنش)، بر کرنش حدی بررسی شد. این تحقیق نشان می‌دهد، بعد از رسیدن به یک نرخ کرنش مشخص، با افزایش سرعت شکل‌دهی، تحت اثر پدیده اینرسی، موضعی شدن گلویی به تأخیر افتاده و شکل‌پذیری بهبود قابل توجه خواهد یافت.

### کلمات کلیدی

شکل‌پذیری، ناپایداری، سرعت شکل‌دهی، نرخ کرنش، منحنی حد شکل‌دهی

## *Dynamic Analysis Instability of Sheet Metal under Biaxial Stretching*

M.Gerdoorie ; B.M.Dariani

### ABSTRACT

In the metal forming processes, the process variables (such as forming speed) have significant effects on the forming parameters. In this study, using the motion equations (instead of the equilibrium equations) in the biaxial stretching analysis of the sheet, the evolution of initial inhomogeneity has been simulated. Adopting work hardening and strain rate hardening characteristic for material, the effects of forming speed on the shape and position of the forming limit diagram (FLD) are investigated theoretically over a wide range of strain rate. Furthermore, the combined effects of the strain rate and material intrinsic parameters (density, strain hardening component and strain rate sensitivity index) on the critical strain are obtained in the case of plane strain loading. The analysis indicates that after a certain forming rate, by increasing the strain rate, localized necking is retarded and formability of sheet improves monotonically because of inertia effects.

### KEYWORDS

Formability, Instability, Forming Speed, Strain Rate, FLD

<sup>۱</sup> دانشجوی مقطع دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر : [gerdoorie@aut.ac.ir](mailto:gerdoorie@aut.ac.ir)

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر: [dariani@aut.ac.ir](mailto:dariani@aut.ac.ir)

بررسی اثر اینرسی جرم ورق، در سرعت‌های بالای شکل‌دهی، بر روی گلوئی موضعی ورق‌های تحت کشش تک‌محوری، توسط مولیناری و فریسینگر با استفاده از روش انشقاق (Bifurcation) انجام شد [۱۶]. تیرگارد و هان تحلیل المان محدود دینامیکی فرایند گشاد شدن حلقه (Ring Expansion) تحت تاثیر میدان الکترومغناطیسی را با مدل‌سازی کرنش صفحه‌ای انجام داد [۱۷]. هو و دان تحلیل دینامیکی گلوئی موضعی را با فرض وجود یک نقص نواری در ورق، تحت کشش تک محوری بررسی نمودند [۱۸]. در این تحقیق معادلات دینامیکی حرکت نوشته شد و مدل رفتاری ماده نیز حساس به نرخ کرنش لحاظ شد. فروند و شنوی نشان دادند که در فرایند کشش ورق امکان وجود چند گلوئی هم‌زمان و در نتیجه چند تکه شدن ورق وجود دارد [۱۹]. دان و همکارانش اقدام به بررسی تجربی شکل‌پذیری ورق‌های فولادی متعدد، تحت سرعت‌های شکل‌دهی ضربه‌ای (50-220  $m/s$ ) نمودند و برای این کار از تغییر شکل الکترومغناطیسی ورق‌ها، بهره بردند [۲۰].

تاکنون اثر پارامتر حساسیت به نرخ کرنش ماده - به عنوان یک پارامتر ذاتی ورق - به کرات بررسی شده است، ولی تاثیر نرخ کرنش که یک فاکتور محیطی فرایند است، تنها در فرآیندهای کشش تک محوری و کرنش صفحه‌ای تحلیل شده است. لذا در این تحقیق سعی شد که با نوشتن معادلات دینامیکی حرکت و لحاظ کردن رفتار حساس به نرخ کرنش ماده، به ناپایداری ورق تحت کشش دو محوری، تنش صفحه‌ای پرداخته شود. برای موضعی شدن گلوئی نیز از یک نقص هندسی استفاده شده است. نتیجه حل عددی معادلات مکانیک محیط پیوسته و پلاستیسیته حاکم بر فرایند، به ارائه یک روش جامع برای دستیابی به منحنی‌های FLD وابسته به نرخ کرنش منجر شده است.

## ۲- تحلیل دینامیکی ناپایداری ورق

### ۲-۱- تعریف مسئله و شرح فرضیات

ورق هموزن و همسان‌گرد نازک مطابق شکل (۱) که به علت وجود تقارن، تنها نیمی از آن نمایش داده شده؛ مد نظر است. در ناحیه مرکزی، قسمت معیوب (b) و در دو طرف آن نیز ناحیه سالم (a) قرار دارد. نسبت نقص اولیه ورق برابر

$$f = \frac{L_3^b}{L_3^a} \quad (1)$$

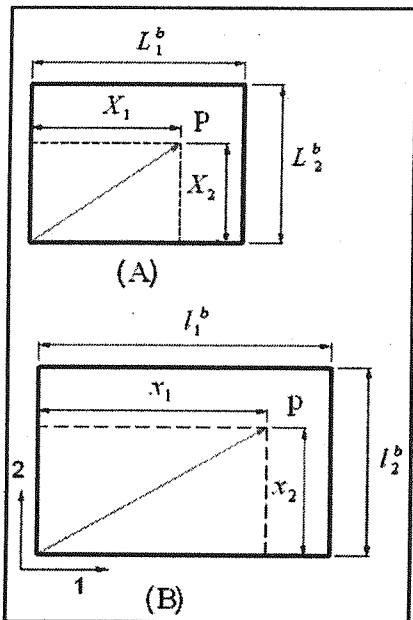
تعریف می‌شود. راستای ۱،۲ و ۳ جهات اصلی تانسورهای تنش و کرنش است که بر هم منطبقند.

ترسیم منحنی‌های حد شکل‌پذیری (Forming Limit Diagram) یکی از کاربردی‌ترین روش‌های پیش بینی ایجاد ناپایداری در شکل‌دهی ورق‌های فلزی است. این روش اولین بار توسط کیلر و بکافن در سال ۱۹۶۴ ابداع شد [۱]. محاسبه منحنی‌های FLD به صورت تئوری، با ارائه مدل‌های مختلفی مطالعه شد. مدل باریک شونده‌ی پخشی سویت [۲]، مدل گلوئی موضعی هیل [۳]، مدل کشش دو محوری، با نقص اولیه، توسط مارسینیاک و کوزینسکی (مدل M-K) [۴] و تئوری انشقاق توسط استورن و رایس [۵]، از اصلی‌ترین تئوری‌های پیش‌بینی حد شکل‌پذیری ورق است. پس از پایه‌گذاری این روش‌ها، تحقیقات گسترده‌ای به منظور ارتقاء مدل‌های اولیه، انجام شد. لی و زاوول، تاثیر پارامترهای ناهمسان‌گردی، حساسیت به نرخ کرنش (m) و توان کرنش سختی (n) را در مدل M-K، با بکارگیری معادله کارسختی  $\bar{\sigma} = k\bar{\epsilon}^n \bar{\epsilon}^m$  بررسی کردند [۶]. براتا و روچا تاثیر مسیر بارگذاری را به عنوان یک پارامتر محیطی بر شکل‌پذیری بررسی نمودند [۷]. لو و لی مدل‌های مختلف رشد سطح تسلیم (اعم از سخت شدن ایزوتروپیک و یا سخت شدن سینماتیکی) را بر روی منحنی FLD بررسی نمودند [۸]. ون و لی اثر کارسختی جهت‌دار ورق آلومینیومی AA3003 را بر روی ناپایداری پلاستیک در حالت کشش صفحه‌ای بررسی کردند [۹]. ملایی، شاکری و صدوق در یک سری تحقیقات نسبتاً جامع موفق شدند تاثیر توان کرنش سختی، حساسیت به نرخ کرنش، ضرایب ناهمسان‌گردی، ضخامت ورق، اندازه دانه و مسیر کرنش‌گذاری را بر شکل‌پذیری ورق‌های فلزی محاسبه کنند [۱۰-۱۲]. بررسی ناپایداری پلاستیک ورق‌های آلومینیومی، در بارگذاری دو محوری یکسان توسط محمودی انجام شد. در این تحقیق تست‌های تجربی بر روی ورق آلومینیومی AA8014 با دو عملیات حرارتی آنیل مختلف اجرا شد و نتایج تجربی به دست آمده با تحلیل‌های مختلف تئوری مقایسه شد [۱۳].

از پارامترهای موثر محیطی بر شکل‌پذیری، دما و سرعت شکل‌دهی است. نتیجه تلاش‌های داومینگ و گاش نشان داد که با افزایش دما و کاهش نرخ کرنش در یک محدوده معین بر روی ورق‌های آلومینیومی، حساسیت ماده به نرخ کرنش افزایش می‌یابد که این امر موجب بهبود شکل‌پذیری ورق می‌شود [۱۴]. ناکا نشان داد که مقادیر m و n تابعی از نرخ کرنش و دما هستند و لذا موفق شد به صورت غیرمستقیم اثر نرخ کرنش را بر حل استاتیکی منحنی FLD اعمال نماید [۱۵].

لحظه به سمت کرنش صفحه‌ای پیش می‌رود. در حالی که مقادیر نمو کرنش در ناحیه سالم ( $\Delta \varepsilon_1^a$  و  $\Delta \varepsilon_2^a$ ) در هر بازه زمانی ثابت است، نمو کرنش طولی در ناحیه معیوب ( $\Delta \varepsilon_1^b$ ) به سرعت رو به افزایش است. لذا مسیر بارگذاری در ناحیه b غیرخطی است و حل دقیق به صورت نموئی (incremental) بدست خواهد آمد و در هر بازه زمانی کوچک  $\dot{\varepsilon}_1^b$  را می‌توان برابر مقدار ثابت مجهول  $C_1^b$  فرض نمود.

$$\dot{\varepsilon}_1^b = C_1^b \quad (7)$$



شکل (۲): شکل شماتیک ورق در ناحیه معیوب (A): وضعیت اولیه (B): وضعیت فعلی پس از تغییر شکل

شرط سازگاری برای فصل مشترک دو ناحیه نتیجه خواهد داد:

$$\dot{\varepsilon}_2^b = \dot{\varepsilon}_2^a = C_2^b = C_2^a \quad (8)$$

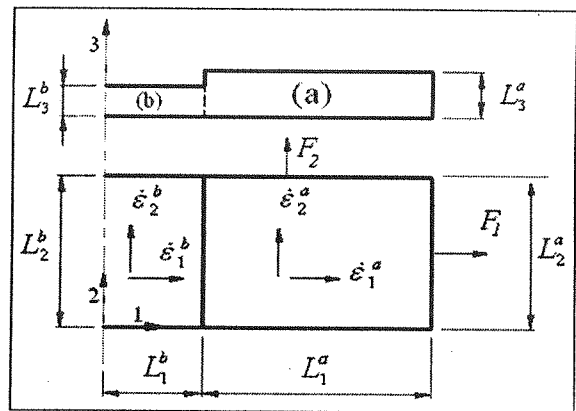
که با توجه به مشخص بودن مقادیر نرخ کرنش در ناحیه سالم،  $C_2^b$  مقدار ثابت معلوم خواهد بود. از ثابت بودن حجم در ناحیه معیوب می‌توان نوشت:

$$\dot{\varepsilon}_3^b = C_3^b = -(\dot{\varepsilon}_1^b + \dot{\varepsilon}_2^b) \quad (9)$$

از تعریف مولفه تانسور نرخ کرنش در مختصات متعامد اولیه داریم: (روابط (۱۰) تا (۲۸))، بدون اعمال قانون جمع تفسیر (شود).

$$\dot{\varepsilon}_i^b = \frac{\partial v_i^b}{\partial x_i} = C_i^b \quad (i=1,2,3) \quad (10)$$

مولفه‌های بردار سرعت ذره در ناحیه معیوب و در لحظه t هستند. شرایط مرزی سرعت به شکل زیر نوشته می‌شود:



شکل (۱): مدل اولیه ورق، با وجود نقص در ناحیه b

بارگذاری بر روی ورق با اعمال مقادیر ثابت و مشخص  $\dot{\varepsilon}_1^a$  و  $\dot{\varepsilon}_2^a$  که مولفه‌های تانسور نرخ کرنش در ناحیه سالم است؛ صورت می‌گیرد. لذا می‌توان نوشت:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_1^a = C_1^a \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_2^a = C_2^a \quad (3)$$

و از ثابت بودن حجم در طول فرآیند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\dot{\varepsilon}_3 = C_3^a = -(\dot{\varepsilon}_1^a + \dot{\varepsilon}_2^a) = -(C_1^a + C_2^a) \quad (4)$$

که  $C_1^a$ ،  $C_2^a$  و  $C_3^a$  مقادیر ثابت و معلومند. رفتار ماده را صلب - ویسکوپلاستیک در نظر گرفته و معادله کار سختی به شکل

$$\bar{\sigma} = k \bar{\varepsilon}^n \dot{\varepsilon}^m \quad (5)$$

در نظر گرفته شد [۲۱] که  $\bar{\sigma}$  تنش موثر سیلان،  $k$  ضریب سختی،  $n$  توان کرنش سختی و  $m$  حساسیت به نرخ کرنش را بیان می‌کند. معیار تسلیم وون میسز استفاده شده که در حالت تنش صفحه‌ای ( $\sigma_3 = 0$ ) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\sigma_y = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2} \quad (6)$$

در رابطه فوق  $\sigma_y$  تنش تسلیم در تست کشش است.

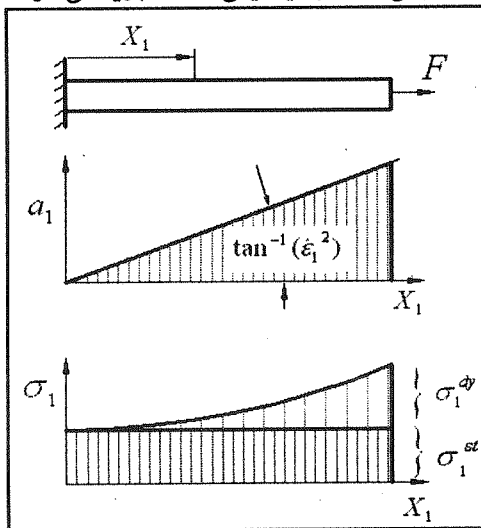
#### ۲-۲- تحلیل تنش و کرنش در ناحیه معیوب (b)

در شکل (۲) نقطه P موقعیت ذره‌ای را در هیئت اولیه (Reference Configuration) قبل از تغییر شکل، در لحظه ( $t=0$ ) نمایش می‌دهد. مختصات ذره در این لحظه برابر  $X_1, X_2$  است. پس از t ثانیه موقعیت ذره به نقطه جدید p، به مختصات  $x_1, x_2$  در هیئت تغییر شکل یافته (Deformed Configuration) تغییر می‌یابد.

پیشرفت فرآیند کشش دو محوری، با افزایش قابل توجه نرخ کرنش طولی در ناحیه معیوب ( $\dot{\varepsilon}_1^b$ ) همراه است، این در حالی است که نرخ کرنش عرضی در این ناحیه ( $\dot{\varepsilon}_2^b$ ) توسط ناحیه سالم محدود می‌شود لذا بارگذاری در ناحیه معیوب لحظه

### ۲-۳- محاسبه تانسور تنش در ناحیه معیوب

در تغییر شکل‌هایی که نرخ کرنش کم باشد و ترم شتاب در معادله حرکت قابل نظر کردن باشد، توزیع تنش در طول نمونه یکنواخت و تقریباً استاتیکی (Quasi-Static) است ولی مطابق رابطه (۲۱) با زیاد شدن نرخ کرنش، مولفه‌های بردار شتاب با توان دو افزایش می‌یابد. در یک نمونه تحت کشش تک محوری، مطابق شکل (۳) با فاصله گرفتن از مبدأ، شتاب افزایش یافته و نیروی اینرسی جرم ماده نیز متناسباً زیاد می‌شود. لذا ترم جدیدی از تنش دینامیکی به تنش ثابت استاتیکی افزوده می‌شود که مقدار این افزایش از معادله حرکت قابل محاسبه است [۲۲]. در چنین شرایطی تانسور تنش کل به دو تانسور مجزای استاتیکی  $\sigma^{st}$  و دینامیکی  $\sigma^{dy}$  تجزیه می‌شود.



شکل (۳): توزیع شتاب و مولفه‌های طولی تنش استاتیکی و دینامیکی، در کشش تک محوری [۲۲]

برای محاسبه تنش در بارگذاری دینامیکی، نخست با توجه به مشخص بودن توزیع کرنش، نرخ کرنش، معادلات کارسختی و معیار تسلیم، توزیع تنش استاتیکی را پیدا کرده، سپس از مقدار محاسبه شده به عنوان شرط مرزی در حل معادله حرکت استفاده می‌کنیم.

### ۲-۳-۱ محاسبه تانسور تنش استاتیکی

همان‌گونه که اشاره شد، به علت غیر خطی بودن بارگذاری در ناحیه b، باید حل نموی صورت گیرد؛ لذا به عنوان مثال مولفه تانسور کرنش در جهت  $a_i$  تا مرحله زام برابر  $\epsilon_i^{(j)}$  و نمو کرنش در مرحله زام نیز برابر  $\Delta \epsilon_i^{(j)}$  تعریف شد و از این فرم نوشتاری برای دیگر متغیرها نیز استفاده شد. در ضمن از نوشتن بالانویس b برای کوتاه‌تر شدن روابط صرف نظر شده است. با توجه به تعریف انجام شده و رابطه (۱۰) می‌توان نوشت:

$$x_i = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (11)$$

$$v_i^b = 0$$

نتیجه سیستم معادلات خطی فوق، میدان سرعت در ناحیه معیوب بر حسب مختصات اولیه ذرات خواهد بود:

$$v_i^b = C_i^b x_i \quad (i=1,2,3) \quad (12)$$

با استفاده از تعریف سرعت، معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه جدید، بر حسب متغیر زمان بازنویسی می‌شود.

$$v_i^b = \frac{dx_i}{dt} = C_i^b x_i \quad (i=1,2,3) \quad (13)$$

$$t = 0 \quad (14)$$

$$x_i = X_i \quad (i=1,2,3)$$

بدون اعمال قانون جمع نتیجه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_i(X_i, t) = X_i \exp(C_i^b t) \quad (i=1,2,3) \quad (15)$$

با استفاده از رابطه (۱۵) ابعاد ورق در ناحیه معیوب، در لحظه t برابر خواهد بود با:

$$l_i^b = L_i \exp(C_i^b t) \quad (i=1,2,3) \quad (16)$$

با توجه به نحوه بارگذاری و همچنین صفر بودن مولفه‌های برشی تانسور نرخ کرنش، مولفه اصلی این تانسور در ناحیه معیوب، برابر خواهد بود با

$$\epsilon_i^b(X_i, t) = \frac{d}{dt} \epsilon_i^b(X_i, t) = C_i^b \quad (i=1,2,3) \quad (17)$$

همچنین مولفه‌های تانسور کرنش کوشی که در این مسئله کرنش‌های اصلی است؛ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\epsilon_i^b(X_i, t) = C_i^b t \quad (18)$$

با استفاده از معادله (۱۵) مولفه بردار جابجایی در ناحیه b برابر خواهد بود با:

$$u_i^b(X_i, t) = x_i - X_i = X_i (\exp(C_i^b t) - 1) \quad (i=1,2,3) \quad (19)$$

با کمک تعریف بردار شتاب، مولفه‌های این بردار به ترتیب در بیان لاگرانژی و اولیه چنین خواهد بود:

$$a_i^b(X_i, t) = \frac{d^2}{dt^2} u_i^b(X_i, t) = (C_i^b)^2 X_i \exp(C_i^b t) \quad (i=1,2,3) \quad (20)$$

و با استفاده از معادله (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$a_i^b(x_i, t) = (C_i^b)^2 x_i \quad (i=1,2,3) \quad (21)$$

نشود.

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j} = \rho(C_j^b)^2 x_j \quad j = (1,2,3) \quad (30)$$

شرایط مرزی برای حل معادله دیفرانسیلی فوق به صورت زیر اعمال می‌گردد:

$$\sigma_j^b = \sigma_j^{st(b)} \quad x_j = 0 \quad (31)$$

نتیجه حل معادلات (30) و (31)، در جهات اصلی به شکل زیر خواهد بود:

$$\sigma_i^b = \frac{1}{2} \rho(C_i^b)^2 x_i^2 + \sigma_i^{st(b)} \quad i = 1,2,3 \quad (32)$$

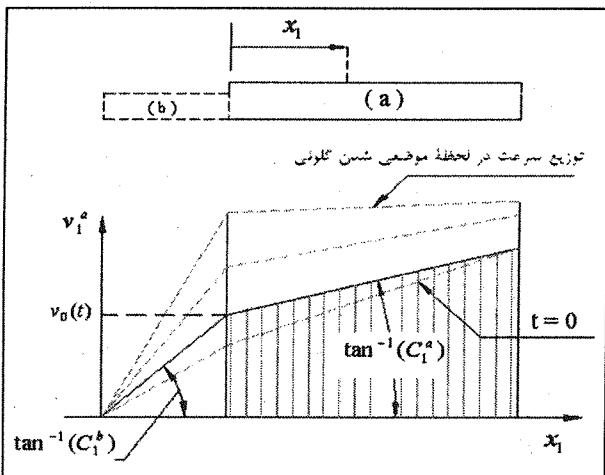
### ۲-۴- تحلیل تنش و کرنش در ناحیه سالم (a)

تحلیل ناحیه سالم در راستای ۲ به علت شرط سازگاری (۸) مشابه ناحیه معیوب خواهد بود. شکل (۴) توزیع شماتیک مقدار سرعت طولی ذرات را، در دو ناحیه سالم و معیوب نمایش می‌دهد. محور طولی متغیر مستقل  $x_1$ ، و محور عرضی مقدار سرعت طولی ذرات است. مطابق شکل، در ناحیه سالم شرایط مرزی غیر همگن برقرار خواهد بود.

$$v_1^a = v_0(t) \quad x_1 = 0 \quad (33)$$

سرعت حرکت فصل مشترک در راستای طولی است که از تحلیل ناحیه معیوب به دست می‌آید. از تعریف مولفه تانسور نرخ کرنش در ناحیه سالم می‌توان نوشت:

$$\dot{\varepsilon}_i^a = \frac{\partial v_i^a}{\partial x_i} = C_i^a \quad (i=1,2,3) \quad (34)$$



شکل (۴): توزیع سرعت طولی، بر روی ساختار تغییر شکل نیافته، در حین فرآیند

نتیجه حل معادله فوق با اعمال شرط مرزی (33) به میدان سرعت در ناحیه سالم منجر خواهد شد.

$$\Delta \varepsilon_i^{(j)} = C_i^{(j)} \cdot \Delta t \quad i = (1,2,3) \quad (22)$$

که  $\Delta t$  نمو زمانی کوچک و ثابت در هر مرحله است. نمو کرنش موثر در مرحله  $j$  ام بر اساس معیار تسلیم وون میسر به شکل زیر به دست می‌آید [22]:

$$\Delta \bar{\varepsilon}^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(\Delta \varepsilon_1^{(j)})^2 + (\Delta \varepsilon_2^{(j)})^2 + (\Delta \varepsilon_3^{(j)})^2}} \quad (23)$$

و کرنش موثر از آغاز فرآیند تا پایان مرحله  $j$  ام برابر است با:

$$\bar{\varepsilon}^{(j)} = \bar{\varepsilon}^{(j-1)} + \Delta \bar{\varepsilon}^{(j)} \quad (24)$$

نرخ کرنش موثر در مرحله  $n$  ام نیز به صورت مشابه محاسبه می‌شود [22].

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(C_1^{(j)})^2 + (C_2^{(j)})^2 + (C_3^{(j)})^2}} \quad (25)$$

و با استفاده از معادلات (5)، (24) و (25) مقدار تنش موثر از رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$\bar{\sigma}^{(j)} = k(\bar{\varepsilon}^{(j)})^n (\dot{\bar{\varepsilon}}^{(j)})^m \quad (26)$$

قانون جریان به دست آمده از معیار وون میسر، مولفه‌های تانسور تنش انحرافی را در لحظه  $j$  ام به شکل زیر ارائه خواهد کرد [22]:

$$S_i^{(j)} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}^{(j)}}{\Delta \bar{\varepsilon}^{(j)}} \Delta \varepsilon_i^{(j)} \quad i = (1,2,3) \quad (27)$$

با اعمال شرط تنش صفحه‌ای در تعریف تنش انحرافی می‌توان مولفه تنش استاتیکی را بدست آورد:

$$\sigma_1^{st(j)} = S_1^{(j)} - S_3^{(j)} \quad (1-28)$$

$$\sigma_2^{st(j)} = S_2^{(j)} - S_3^{(j)} \quad (2-28)$$

$$\sigma_3^{st(j)} = 0 \quad (3-28)$$

### ۲-۳-۲ معادله حرکت و اعمال اثر ترم شتاب در

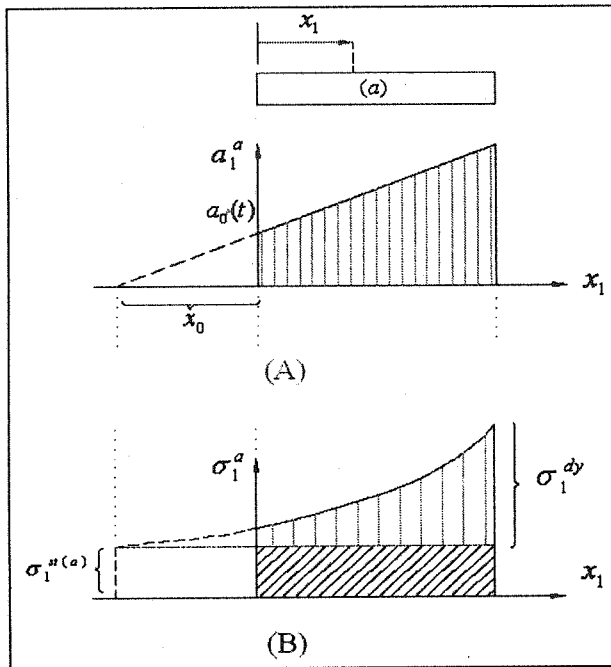
#### تانسور تنش

در کلی‌ترین حالت، معادله حرکت (Motion Equation) یک ذره در محیط پیوسته، به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (29)$$

در این رابطه چگالی ماده،  $b_j$  مولفه نیروی جرمی در واحد جرم و  $\ddot{u}_j$  نیز مولفه بردار شتاب در مختصات اویلری است. با صرف نظر از نیروی جرمی و با جایگزینی از رابطه (21) در معادله حرکت می‌توان نوشت:

(برای تفسیر صحیح روابط باقیمانده از قانون جمع استفاده



شکل (۵): (A) توزیع مولفه طولی شتاب در ناحیه سالم،  
(B) توزیع مولفه طولی تنش، در ناحیه سالم و در لحظه t

شکل (۵) توزیع مولفه طولی شتاب و تنش را در ناحیه سالم نمایش می‌دهد. مطابق شکل، در یک نقطه مجازی به طول  $x_0$ ، که مولفه شتاب در راستای ۱ برابر صفر است، مولفه تنش دینامیکی نیز وجود ندارد، لذا شرط مرزی برای حل معادله (۴۳) به شکل زیر خواهد بود:

$$x = x_0 = -\frac{a_0'(t)}{(C_1^a)^2} \quad \sigma_1^a = \sigma_1^{s(a)} \quad (44)$$

$$a_0'(t) := a_0(t) - (C_1^a)^2 \int v_0(t) dt$$

معادله (۴۳) با استفاده از شرط مرزی (۴۴) و رابطه (۴۲) نتیجه خواهد داد:

$$\sigma_1^a(x_1, t) = \frac{1}{2} \rho (C_1^a)^2 (x_1^2 - x_0^2) + \rho a_0'(t) (x_1 - x_0) + \sigma_1^{s(a)} \quad (45)$$

$$\sigma_2^a(x_2, t) = \frac{1}{2} \rho (C_2^a)^2 x_2^2 + \sigma_2^{s(a)} \quad (46)$$

## ۲-۵- روند کلی حل و بررسی شرایط ناپایداری

به منظور بررسی شرایط ناپایداری در ورق تحت کشش دو محوری، مراحل زیر به صورت گام به گام اجرا می‌شود:  
۱- مسیر خطی بارگذاری در ناحیه سالم با مشخص بودن مقادیر ثابت  $\varepsilon_1^a$ ،  $\varepsilon_2^a$  و تعریف نسبت نرخ کرنش‌های اصلی به

$$v_1^a = C_1^a x_1 + v_0(t) \quad (35)$$

$$v_i^a = C_i^a x_i \quad (i=2,3)$$

با استفاده از تعریف سرعت، معادله دیفرانسیل جدید را بر حسب متغیر زمان تشکیل می‌دهیم.

$$\dot{x}_1 - C_1^a x_1 - v_0(t) = 0 \quad (36)$$

شرط اولیه نیز در آغاز فرایند به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$t = 0 \quad (37)$$

$$x_i = X_i \quad (i=1,2,3)$$

با اعمال فاکتور انتگرال‌گیری  $\exp(-C_1^a t)$  بر معادله دیفرانسیل (۳۶) و استفاده از شرایط مرزی (۳۷)، موقعیت یک ذره در لحظه t با توجه به موقعیت اولیه آن، از رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$x_1(X_1, t) = X_1 \exp(C_1^a t) + \frac{v_0(t)}{C_1^a} [\exp(C_1^a t) - 1] \quad (38)$$

$$x_i(X_i, t) = X_i \exp(C_i^b t) \quad (i=2,3) \quad (39)$$

ترم اول سمت راست در معادله (۳۸)، جابجایی حاصل از تغییر شکل ناحیه سالم و ترم دوم نیز جابجایی صلب در این ناحیه است.

مولفه‌های تانسور کرنش و نرخ کرنش را در ناحیه سالم، چنین می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_i^a(X_i, t) = C_i^a t \quad (40)$$

$$\dot{\varepsilon}_i^a(X_i, t) = \frac{d}{dt} \varepsilon_i^a(X_i, t) = C_i^a \quad (41)$$

مشابه روش اعمال شده در ناحیه معیوب، در این ناحیه نیز مولفه‌های بردار شتاب قابل محاسبه است که نتیجه به صورت رابطه زیر خلاصه شده است:

$$a_1^a(x_1, t) = a_0(t) + C_1^a v_0(t) + (C_1^a)^2 x_1 \quad (42)$$

$$a_i^a(x_i, t) = (C_i^a)^2 x_i \quad (i=2,3)$$

تانسور تنش استاتیکی در ناحیه سالم  $\sigma^{s(a)}$  مشابه ناحیه معیوب قابل محاسبه است. برای محاسبه تنش کل، روابط در راستای ۲ و ۳ عیناً مشابه حالت قبل است ولی در راستای ۱ شرایط مرزی متفاوت خواهد بود. معادله حرکت برای راستای طولی برابر خواهد بود با:

$$\frac{\partial \sigma_1^a}{\partial x_1} = \rho \dot{u}_1^a \quad (43)$$

### ۳- ارایه نتایج:

ورق فلزی که خواص مکانیکی آن مطابق جدول زیر است بررسی شده است.

جدول (۱): مشخصات مربوط به جنس ورق [۱۵]

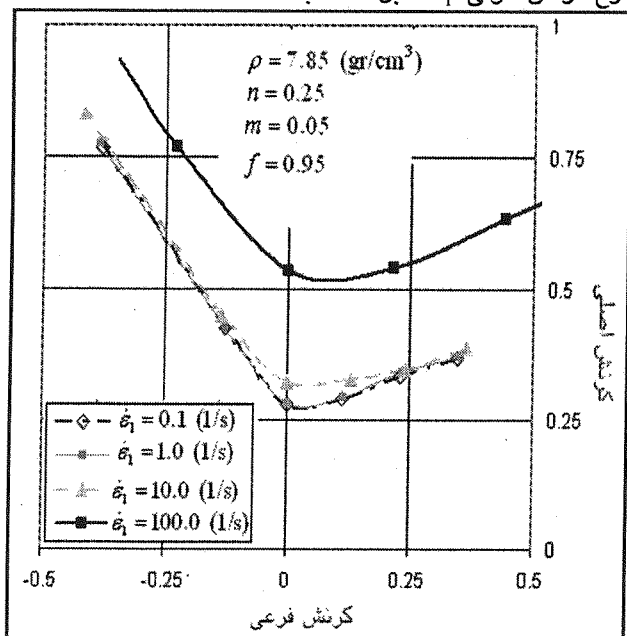
$\rho$ (gr/cm <sup>3</sup> )	$K$ (Mpa)	$m$	$n$
7.85	500	0.05	0.25

ابعاد اولیه ورق بر حسب میلی متر مطابق جدول زیر است:

جدول (۲): ابعاد اولیه ورق

$L_1^a$	$L_2^a = L_2^b$	$L_3^a$	$L_1^b$	$f = \frac{L_3^b}{L_3^a}$
100	200	1	10	0.95

به منظور ترسیم منحنی حد شکل‌پذیری، بارگذاری در ۶ مسیر خطی به ازای مقادیر مختلف  $\beta = (-0.5, -0.3, 0.0, 0.4, 0.7, 0.95)$  انجام شد سپس نقطه بحرانی موضعی شدن گلوئی، در هر مسیر به دست آمد و از نقاط به دست آمده منحنی FLD گذرانده شد و برای بررسی اثر نرخ کرنش بر روی شکل و موقعیت منحنی FLD، مطابق شکل (۶)، چهار منحنی به ازای نرخ کرنش‌های طولی  $\dot{\epsilon}_1^a = (0.1, 1.0, 10.0, 100.0)$  (1/s) ترسیم شد. مقادیر  $\dot{\epsilon}_2^a$ ، با مشخص بودن مسیر بارگذاری ( $\beta = \frac{\dot{\epsilon}_2^a}{\dot{\epsilon}_1^a}$ ) و نرخ کرنش طولی  $\dot{\epsilon}_1^a$  قابل محاسبه است.



شکل (۶): منحنی FLD وابسته به نرخ کرنش

مطابق شکل (۶) افزایش نرخ کرنش تا مقدار 1.0 (1/S) هیچ تاثیر قابل توجهی بر موقعیت منحنی FLD ندارد ولی با

صورت  $\beta^a = \frac{\dot{\epsilon}_2^a}{\dot{\epsilon}_1^a}$  تعیین می‌شود.

۲- برای متغیر مجهول  $\dot{\epsilon}_1^b$  یک مقدار دلخواه تخمین زده می‌شود.

۳- مقادیر تنش و کرنش در دو ناحیه a و b بر طبق روابط ارائه شده، پس از  $\Delta t$  ثانیه به دست می‌آید.

۴- کنترل تعادل در فصل مشترک به شرح زیر انجام می‌شود:

در صورتی که تخمین مقدار  $\dot{\epsilon}_1^b$  درست بوده باشد، شرط (۴۷) در فصل مشترک دو ناحیه a و b برقرار خواهد بود و برنامه از مرحله ۵ ادامه خواهد یافت و در غیر این صورت با برگشت به مرحله ۲ مقدار جدیدی برای متغیر  $\dot{\epsilon}_1^b$  تخمین زده می‌شود.

$$\delta f = \left| \sigma_{1/3}^{*b} - \sigma_{1/3}^{*a} \right| \leq \eta \quad (47)$$

در این رابطه، مقادیر  $\sigma_{1/3}^{*a}$  و  $\sigma_{1/3}^{*b}$  به ترتیب مولفه‌های تنش طولی، در قسمت انتهایی ناحیه b و قسمت ابتدایی ناحیه a است. عدد مثبت  $\eta$  در مقایسه با مقدار حاصلضرب  $\sigma_{1/3}$  مقداری بسیار کوچک است.

۵- ابعاد ورق متناسب با مقادیر تانسور کرنش در دو ناحیه سالم و معیوب، اصلاح می‌شود.

۶- کنترل ناپایداری در ورق مطابق روش M-K اعمال می‌شود به این ترتیب که با معطوف شدن کامل تغییر شکل به ناحیه b مقدار  $\dot{\epsilon}_1^b$  افزایش قابل توجه دارد. در این زمان شرط ناپایداری مطابق رابطه زیر برقرار خواهد شد.

$$\frac{\dot{\epsilon}_1^b}{\dot{\epsilon}_1^a} \geq R \quad (48)$$

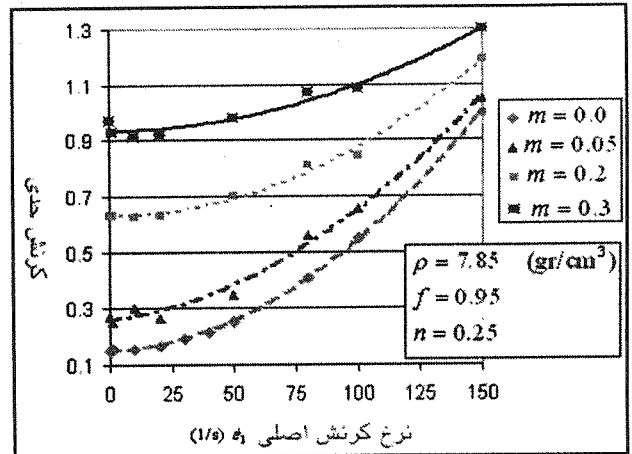
نسبت R در برنامه برابر ۱۰ در نظر گرفته شده است که برای مقادیر بزرگتر از آن تفاوت قابل توجهی در کرنش‌های حدی مشاهده نمی‌شود. با ارضاء شدن شرط ناپایداری (۴۸) مقادیر  $\dot{\epsilon}_1^a$  و  $\dot{\epsilon}_2^a$  به عنوان کرنش‌های حدی، در مسیر بارگذاری مربوطه ثبت می‌شود و به این صورت یک نقطه از منحنی FLD به دست می‌آید.

۷- با ثابت نگه داشتن مقدار  $\dot{\epsilon}_1^a$  و تغییر در مقدار  $\dot{\epsilon}_2^a$ ، نسبت کرنش و در نتیجه مسیر بارگذاری جدید تعریف شده و تحلیل جدید از مرحله ۱ تکرار می‌شود. با تغییر گام به گام نسبت کرنش از -0.5 تا 1 منحنی کامل حد شکل‌پذیری به ازای نرخ کرنش مشخص  $\dot{\epsilon}_1^a$ ، به دست می‌آید.

با تکرار این مراحل به ازای مقادیر مختلف  $\dot{\epsilon}_1^a$  منحنی‌های FLD وابسته به سرعت محاسبه می‌شود.

افزایش بیشتر نرخ کرنش از  $(1/S) 10$  تا  $(1/S) 100$ ، ناحیه زیر منحنی و در نتیجه شکل پذیری ورق به مقدار چشمگیری بهبود یافته است.

در بارگذاری کرنش صفحه‌ای به ازای  $\beta = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} = 0$  و با نرخ کرنش‌های متفاوت طولی  $\dot{\epsilon}_1$ ، کرنش حدى محاسبه شد که تاثیر سرعت شکل‌دهی بر کرنش حدى، به ازای مقادير مختلف  $m$  در این مسیر، در شکل (۷) نمایش داده شده است.  $m$  از مقدار تئوری 0.0 تا 0.3 به صورت پله‌ای تغییر کرده است.

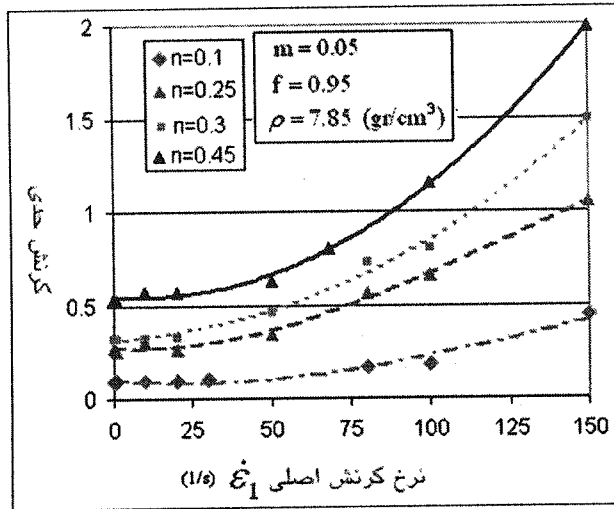


شکل (۷): کرنش حدى در بارگذاری کرنش صفحه‌ای به ازای مقادير مختلف  $m$

مطابق شکل (۷) لکن اگر چه افزایش نرخ کرنش طولی، به ازای جميع مقادير  $m$ ، موجب افزایش شکل‌پذیری می‌شود، در شکل‌دهی با سرعت‌های پایین، شکل‌پذیری به شدت تحت تاثیر حساسیت جنس ورق به نرخ کرنش ( $m$ ) است. به‌گونه‌ای که در حالت تغییر شکل استاتیکی کرنش صفحه‌ای، وقتی  $m$  از 0.05 به 0.3 افزایش می‌یابد، کرنش حدى از 0.27 به 0.97 تغییر می‌کند. در شرایط مذکور اگر نرخ کرنش طولی برابر  $(1/S) 150$  باشد؛ کرنش حدى، تنها از 1.05 به 1.3 تغییر می‌کند.

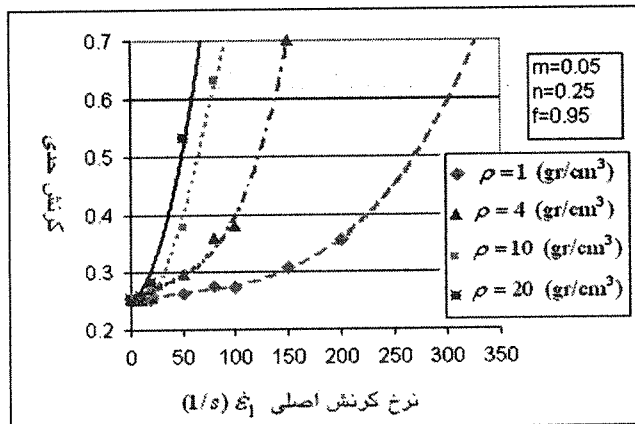
به منظور بررسی تاثیر توان کرنش سختی  $n$  و چگالی ماده  $\rho$  بر شکل‌پذیری ورق در سرعت‌های مختلف بارگذاری، با تغییر این دو پارامتر تحلیل‌های متعددی انجام شد. که نتایج در دو شکل (۸) و (۹) گزارش شده است.

همچنان که در شکل (۸) مشاهده می‌شود، افزایش نرخ کرنش به ازای مقادير کوچک توان کرنش سختی ( $n = 0.1$ ) تاثیر چندانی بر روی کرنش حدى ندارد ولی با افزایش این مقدار به  $n = 0.45$  شکل‌پذیری ماده به شدت وابسته به نرخ کرنش خواهد شد.



شکل (۸): کرنش حدى در بارگذاری کرنش صفحه‌ای به ازای مقادير مختلف  $n$

در شکل (۹)، کرنش حدى در بارگذاری کرنش صفحه‌ای ( $\dot{\epsilon}_2 = 0$ )، به ازای مقادير مختلف چگالی ورق، برحسب نرخ کرنش طولی گزارش شده است. مطابق شکل در بارگذاری شبه استاتیکی ( $\dot{\epsilon} < 0.1 (1/s)$ ) افزایش چگالی هیچ تاثیری بر کرنش حدى ندارد ولی هرچه نرخ کرنش افزایش یابد، با بیشتر شدن اثر پدیده اینرسی، کرنش حدى تاثیر بیشتری از چگالی خواهد گرفت.



شکل (۹): کرنش حدى در بارگذاری کرنش صفحه‌ای به ازای مقادير مختلف  $\rho$

#### ع- نتیجه گیری:

با تحلیل دینامیکی یک ورق دارای نقص اولیه، تحت کشش دو محوری، اثر ترم شتاب در معادلات حرکت وارد شد و در شرایطی که جنس ماده حساس به نرخ کرنش فرض شده است، با استفاده از معادله کارسختی (۵) و معیار تسلیم وون - میسن، معادلات پلاستیسیته حاکم بر محیط پیوسته نوشته و شرایط ناپایداری پلاستیک ورق به ازای بارگذاری با نرخ کرنش‌های متفاوت، در مسیرهای مشخص، بررسی شد.



- Brata, D.; Rocha, A.; Jalinier, J., M; "Plastic Instability of Sheet Metals under Simple and Complex Strain Path.", Trans Iron Steel Inst Jpn, vol. 24 no. 2, p.p. 132-140., 1984.
- Lu, Z., H.; Lee, D.; "Prediction of History Dependent Forming Limits by Applying Different Hardening Models.", Int. J. Mech. Sci., vol. 29, no.2, p.p. 123-137,1987.
- Wen, X., Y.; Lee, W., B.; "Orientaton Hardening and Instability of an AA3003Aluminium Alloy Sheet under In-Plane Strain Stretching", Scripta Materialia, vol. 43, no. 1, p.p. 1-7, 2000.
- Shakeri, M.; Sadough, A.; Dariani, B., M., "Effect of Grain Size and Pre-Straining on the Sheet Metal Forming", SF2M Conf., France, 1998.
- Shakeri, M.; Sadough, A.; Dariani, B., M., "Forming Limit Diagram of Metal Sheet in Actual Strain Path Respect to Forming Process", Contact Mechanics 2001 Seville, Spain, 2001.
- Shakeri, M.; Sadough, A.; Dariani, B., M.; "Theoretical and Experimental Analysis of Sheet Metal Formability Limit", Revue de Metallurgie Journal, 2000
- Mahmudi, R.; "Plastic Instability in Equi-biaxial Deformation of Aluminium Alloy Sheet", Journal of Materials Processing Technology, vol. 57 no.3, p.p. 266-271, 1996
- Daoming, L.; Ghosh, A. ; " Biaxial Warm Forming Behavior of Aluminum Sheet Alloys", Journal of Materials Processing Technology, vol. 145, no.3, p.p. 281-293, 2004
- Naka, T. ; Torikai, G. ; Hino, R.; Yoshida, F.; "The Effects of Temperature and Forming Speed on Forming Limit Diagram For Type 5083Aluminum - Magnesium Alloy Sheet", J. Mech. Phys. Solids, vol. 113, p.p. 648 - 653, 2001
- Fressengeas, C.; Molinari, A.; "Fragmentation of Rapidly Stretching Sheets", European Journal of Mechanics And Solids, no 13 p.p. 251- 268., 1994.
- Han, J., B., Tvergaard, V.; "Effect of Inertia on the Necking Behavior of Ring Specimens under Rapid Radial Expansion", European Journal of Mechanics And Solids, vol. 14 p.p. 287- 307., 1995.
- Hu, X. ; Daehn, G., S.; "Effect of Velocity on Flow Localization in Tension", Acta Materialia, vol. 44, no. 3, p.p. 1021-1033, 1996.
- Shenoy, V., B., Freund, L., B.; "Necking Bifurcation During High Strain Rate Extension", J. Mech. Phys. Solids, vol. 47 p.p. 2209 - 2233 1999
- Seth, M.; Vohnout, V., J.; Daehn, G., S.; "Formability of Steel Sheet in High Velocity Impact", J. Mech. Phys. Solids, vol. 168, p.p. 390 - 400, 2005.
- Metals Handbook; "Forming and Forging", 9<sup>th</sup> Edition, vol. 14, Metal Park, American Society for metals, p.p. 880-886, 1988.
- Balanethiram, V. S.; Daehn, G. S., "Hyperplasticity : Increased Forming Limits at High Workpiece Velocity," Scripta Materialia, vol. 30 , p. 515, 1994.
- Mendelson, A.; Plasticity: Theory and Application, Macmillan Company, 1970.
- [۷] مهم‌ترین نتیجه این برنامه، تعیین منحنی‌های FLD وابسته به سرعت تغییر شکل است که در شکل (۶) نمایش داده شد. در جمع بندی کلی از نتایج به دست آمده می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد:
- [۸] ۱- موقعیت منحنی‌های FLD وابسته به سرعت بارگذاری بوده و با افزایش سرعت تغییر شکل، تحت اثر پدیدهٔ اینرسی جرم ورق، موضعی شدن گلوئی به تاخیر می‌افتد و در نتیجه شکل‌پذیری بهبود خواهد یافت.
- [۹] ۲- در شکل‌دهی با سرعت‌های پایین، شکل‌پذیری به شدت تحت تاثیر حساسیت جنس ورق به نرخ کرنش ( $m$ ) است ولی با افزایش نرخ کرنش، پارامتر غالب بر شکل‌پذیری سرعت شکل‌دهی خواهد بود و از میزان تاثیر حساسیت به نرخ کرنش کاسته خواهد شد.
- [۱۰] ۳- اثر توان کرنش سختی  $n$  دقیقاً بر خلاف اثر حساسیت به نرخ کرنش  $m$  است. یعنی در بارگذاری‌های کند، اثر افزایش  $n$  بر کرنش حدی بسیار ناچیز بوده، در حالی که با افزایش سرعت تغییر شکل، این تاثیر قابل توجه خواهد بود.
- [۱۱] ۴- بر خلاف بارگذاری به حالت استاتیکی، در تغییر شکل سریع، چگالی ورق تاثیر به سزایی بر نیروی مقاوم اینرسی خواهد گذاشت. با افزایش چگالی ورق، در نتیجهٔ افزایش نیروی اینرسی، مقاومت ماده در ناحیه گلوئی افزایش یافته و ادامه تغییر شکل به دیگر نواحی ورق منتقل خواهد شد. لذا با افزایش چگالی ورق، افزایش سریع کرنش حدی رخ خواهد داد.
- [۱۲] ۵- منابع
- [۱۳] Keeler, S., P.; Backhofen, W., A.; "Plastic Instability and Fracture in Sheet Stretched over Rigid Punches", ASM Trans., Quart. 56 p.p.2548 1964.
- [۱۴] Swift, H., W.; "Plastic Instability under Plane Stress", J.Mech. Phys. Solids, vol. 1, p.p.1-18 1952.
- [۱۵] Hill, R., "On Discontinuous Plastic States, with Special Reference to Localized Necking in Thin Sheet.", J.Mech. Phys. Solids, vol 1, p.p. 19-30, 1952.
- [۱۶] Marciniak, Z.; Kuczynski, K.; "Limit Strains in Process of Stretch Forming Sheet Steel.", J.Mech. Phys. Solids, vol. 9, p.p. 609-620, 1967.
- [۱۷] Storen, S.; Rice, J., R.; "Localized Necking in Thin Sheet ", J.Mech. Phys. Solids, vol. 23 p.p. 421-441, 1975.
- [۱۸] Lee, D.; Zaverl, F.; "Neck Growth and Forming Limits in Sheet Metals", Int. J. Mech. Sci., vol. 24 p.p. 157-173, 1982.
- [۱۹]
- [۲۰]
- [۲۱]
- [۲۲]
- [۲۳]