# مقایسه یک سیستم کوانتومی ناجابجایی با یک سیستم کوانتومی جابجایی

مظفر جعفری[i]؛ علی ایمان پور[ii]

## چکیده

ابتدا هامیلتونی یک نوسانگرهماهنگ دو بعدی با مختصات ناجابجایی را با استفاده از ضرب مویال به یک سیستم جابجایی تبدیل می کنیم. در این صورت جمله‌ای در هامیلتونی ظاهر می‌شود که شبیه جمله اندرکنش با میدان مغناطیسی می‌باشد. این هامیلتونی را با هامیلتونی نوسانگرهماهنگ باردار؛ که در صفحه دو بعدی تحت میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، مقایسه می‌کنیم.

## کلمات کلیدی

ناجابجایی، ضرب مویال، نوسانگرهماهنگ دو بعدی

# *Comparing a Noncommutative Quantum Mechanical System with a Commutative Quantum Mechanical System*

M. Jafari, and A. Imaanpur

*ABSTRACT*

Using the Moyal product, first we write down the noncommutative Hamiltonian of a two-dimensional harmonic oscillator in terms of ordinary commuting coordinates. In this new Hamiltonian a new term similar to the interaction with the magnetic field appears. This is then compared with the Hamiltonian of a charged harmonic oscillator moving on a two-dimensional plane under a magnetic field.

*KEYWORDS*

Noncommutativity, Moyal Product, Two-dimensional Harmonic Oscillator.

## ۱- مقدمه

طبق نظریه ریسمان در انرژهای بالا، مختصات فضا یک ناجابجایی از خود نشان می‌دهند. بااین فرض به نظرمی‌رسد که مکانیک کوانتومی به یک بازنگری نیاز دارد. برای این کار ما سراغ نوسانگر دو بعدی می‌رویم تا تغییرات به وجودآمده بر اثر این ناجابجایی را بر روی آن بررسی کنیم. با توجه به نظریه ریسمان، عدم قطعیت هایزنبرگ را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

$$\Delta x \Delta y \approx \theta \qquad (1)$$

که در آن $\theta$ نقشی مثل $\hbar$ بازی می‌کند که آن را پارامتر ناجابجایی می‌نامیم. در اینجا با وجود این که می‌توانیم کل فضای فاز در مکانیک کوانتومی را ناجابجایی فرض کنیم؛ ولی در این مقاله قصد داریم فقط با مختصات فضایی ناجابجایی کار کنیم [۱]- [۳].

---

[i] دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک نظری، دانشگاه تربیت مدرس: mozaffarj@yahoo.com

[ii] استادیار بخش فیزیک، دانشکده علوم پایه ، دانشگاه تربیت مدرس ، تهران ، صندوق پستی ۱۷۵-۱۴۱۱۵ aimaanpu@modares.ac.ir

## ۲- ساختن یک فضای معمولی از فضای ناجابجایی

با این فرض شروع می‌کنیم که یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی ناجابجایی داریم که هامیلتونی آن به صورت زیر است:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right) \quad (۲)$$

که جابجاگرهای زیر بر آن حاکم هستند:

$$\left[x^i,x^j\right]=i\theta^{ij} \quad (۳)$$

$$\left[x^i,p_j\right]=i\delta^i_j\hbar \quad (۴)$$

$$\left[p^i,p^j\right]=0 \quad (۵)$$

$$\theta^{ij}=\theta\varepsilon^{ij} \quad (۶)$$

$x_i$ها مختصات فضا هستند که ناجابجایی فرض شده‌اند و $\theta$ پارامترناجابجایی می‌باشد و ماتریس $\theta^{ij}$ یک ماتریس پاد متقارن است. می‌خواهیم روندی را پیش بگیریم که فضای ناجابجایی را به یک فضای جابجایی تبدیل کنیم. برای این منظور کافی است جای ضرب معمولی را با ضرب مویال؛ که به صورت زیر تعریف می‌شود، عوض کنیم:

$$A(x)*B(x)=e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(1)}\partial_j^{(2)}}A(x_1)B(x_2)\,|x_1=x_2=x \quad (۷)$$

که به این معناست در معادله شرودینگر،

$$i\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t}=\left[\frac{\vec{p}}{2m}+V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t) \quad (۸)$$

جای ضرب معمولی باضرب مویال[۱] عوض شود. اگر پتانسیل کروی (دو بعدی) باشد تنها تفاوتی که در معادله شرودینگر به وجود می‌آید به صورت زیر است[۴]:

$$V(\vec{x})*\Psi(\vec{x},t)\rightarrow V\left(\vec{x}-\tilde{\vec{p}}/2\right)\Psi \quad (۹)$$

که $\tilde{p}$ به صورت $\tilde{P}_i=\theta_{ij}p^j$ می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده می‌توان در پتانسیل‌های کروی با تغییر $x_i\rightarrow x_i-\frac{\theta}{2}\varepsilon_{ij}p^j$ مختصات ناجابجایی را به مختصات جابجایی تبدیل کرد. با این فرض $x_i$های جدید دیگر ناجابجایی ندارند؛ بلکه از جبر فضای معمولی تبعیت می‌کنند:

$$[x_i,x_j]=0 \quad (۱۰)$$

۱- Moyal product

اگر $x_i$های جدید را در هامیلتونی (۲) به جای $x_i$های قدیم قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x-\frac{\theta}{2}p_y\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2\left(y+\frac{\theta}{2}p_x\right)^2 \quad (۱۱)$$

با بسط جملات به هامیلتونی زیر خواهیم رسید:

$$H=\left(\frac{1}{2m}+\frac{m\omega^2\theta^2}{8}\right)P_x^2+\left(\frac{1}{2m}+\frac{m\omega^2\theta^2}{8}\right)P_y^2+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{2}m\omega^2\theta\left(xP_y-yP_x\right) \quad (۱۲)$$

برای اینکه هامیلتونی ظاهر بهتری داشته باشد، تعریف‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$\frac{1}{m}+\frac{m\omega^2\theta^2}{4}=\frac{1}{\mu} \quad (۱۳)$$

$$\omega^2+\frac{m^2\omega^4\theta^2}{4}=\Omega^2 \quad (۱۴)$$

$$xP_y-yP_x=L_z \quad (۱۵)$$

با قرار دادن این تعریف ها در هامیلتونی (۱۲) آن را به صورت زیر تغییر خواهیم داد:

$$H=\frac{P_x^2}{2\mu}+\frac{P_y^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\Omega^2\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{2}\mu\Omega^2\theta L_z \quad (۱۶)$$

همان طور که از رابطه (۱۶) پیدا است این هامیلتونی متشکل از یک نوسانگرهماهنگ ساده دو بعدی جابجایی با جرم موثر$\mu$ و فرکانس $\Omega$ و یک جمله اضافی مولفه z ام تکانه زاویه‌ای است. با استفاده از ارتباطی که بین جبر اندازهٔ حرکت زاویه‌ای و جبر نوسانگر دوبعدی وجود دارد، می‌توان ویژه مقادیر هامیلتونی (۱۶) را به دست آورد[۵]:

$$E_{j,k}=\hbar\Omega(2j+1)-\frac{1}{2}\mu\Omega^2\theta\hbar k \quad (۱۷)$$

ویژه مقادیر انرژی؛ یعنی $E_{j,k}$ را می‌توانیم به صورت زیر برحسب پارامترهای اصلی مساله بنویسیم:

$$E_{j,k}=\hbar\omega\sqrt{1+\frac{1}{2}m\theta^2}\,(2j+1)-\frac{\hbar}{2}m\omega^2\theta k \quad (۱۸)$$

به ازای هر $j$ می‌توانیم ۱+ ۲$j$ تا $k$ داشته باشیم به طوری که:

$$j = 0,1,2,......$$
(۱۹)
$$k = 0,\pm 1,\pm 2,.......$$

با مشاهده طیف (۱۸)این طور به نظر می‌رسد که پارامتر ناجابجایی $\theta$ مثل یک میدان مغناطیسی عمل می کند و ترازهای روی هم افتاده در مکانیک کوانتومی معمولی را از هم جدا کرده است. برای اینکه نشان دهیم پارامتر ناجابجایی واقعاً مثل یک میدان مغناطیسی عمل می‌کند در ادامه سعی خواهیم کرد ویژه مقادیر انرژی برای یک نوسانگر دو بعدی در زمینه میدان مغناطیسی را به دست آوریم تا بتوانیم بین نوسانگر دو بعدی نا جابجایی و این مساله مقایسه‌ای انجام دهیم.

## ۳- حرکت نوسانگر با بار e در صفحه y-x در حضور میدان مغناطیسی

می‌دانیم هامیلتونی یک ذره بار دار وقتی که تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار می‌گیرد به صورت زیر است:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \qquad (۲۰)$$

که در آن $\vec{A}$ پتانسیل برداری است و $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ است. اگر $\vec{B}$ را یکنواخت و ثابت در راستای محور z در نظر بگیریم پتانسیل برداری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A_x = -\frac{B}{2}y \quad , \quad A_y = \frac{B}{2}x \quad , \quad A_z = 0, \quad \vec{B} = B\hat{z} \qquad (۲۱)$$

اگر (۲۱) را در هامیلتونی (۲۰) جاگذاری کنیم هامیلتونی به صورت زیر در می آید:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eB}{2c}x\right)^2 + \frac{1}{2m}(p_z)^2$$

(۲۲)

در هامیلتونی (۲۲) از حرکت در بعد z که یک حرکت یکنواخت خطی است، صرفنظر می‌کنیم؛ چون می‌دانیم که $p_z$ با همه اجزای هامیلتونی جابجا می‌شود، پس حرکت در راستای z مستقل از حرکت در صفحه x-y است، برای همین منظور از حرکت در راستای z صرفنظر و هامیلتونی (۲۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{e^2B^2}{8mc^2}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{eB}{2mc}\left(xp_y - yp_x\right) \qquad (۲۳)$$

با توجه کردن به هامیلتونی (۲۳) می‌توان مشاهده کرد که هامیلتونی از یک نوسانگر هماهنگ ساده دو بعدی بعلاوه یک جمله خطی $L_z$ شکل گرفته است. اگر هامیلتونی نوسانگر هماهنگ دوبعدی را به یاد بیاوریم خواهیم دید این هامیلتونی کاملاً شبیه هامیلتونی آن است و می‌توان برای حل و به دست آوردن مقادیر ویژه به همان روش عمل کرد.

برای اینکه زیبایی کار بیشتر باشد فرض زیر را انجام می‌دهیم:

$$\omega = \frac{|eB|}{2mc} \qquad (۲۴)$$

هامیلتونی را نهایتاً به شکل زیر می‌نویسیم:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \omega L_z \qquad (۲۵)$$

همان گونه که ویژه مقادیر را برای هامیلتونی ناجابجایی به دست آوردیم ، ویژه مقادیر برای هامیلتونی (۲۵) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_{j,k} = \hbar\omega(2j + 1 - k) \qquad (۲۶)$$
$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1,......$$
$$k = 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1,.......$$

اگر از تعریف (۲۴) مقدار $\omega$ را جاگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$E_{j,k} = \hbar\frac{|eB|}{2mc}(2j+1) - \frac{\hbar}{2}\frac{|eB|}{mc}k \qquad (۲۷)$$

برای مشابهت بیشتر با مسأله نوسانگرهماهنگ دو بعدی ناجابجایی می توان در معادله (۲۰) به هامیلتونی جمله $\frac{1}{2}m\varpi^2\left(x^2 + y^2\right)$ را اضافه کرد. طیف جدید با جایگذاری $\frac{|eB|}{2mc} \rightarrow (\varpi^2 + (\frac{|eB|}{2mc})^2)^{1/2}$ در جمله اول معادله (۲۷) حاصل خواهد شد:

$$E_{j,k} = \hbar\sqrt{\varpi^2 + \frac{e^2B^2}{4m^2c^2}}(2j+1) - \frac{\hbar}{2}\frac{|eB|}{mc}k \qquad (۲۸)$$

مشاهده می‌شود که طیف انرژی به دست آمده کاملاً شبیه طیف انرژی یک نوسانگرهماهنگ دو بعدی در فضای ناجابجایی است. درواقع، پارامترهای $\theta$ و B بطور نظیر در معادلات (۱۸) و (۲۸) ظاهر شده اند. نوسانگرهماهنگ دو بعدی ناجابجایی با حرکت نوسانگر هماهنگ باردار در میدان مغناطیسی طیف کاملاً مشابهی دارند. در نوسانگرناجابجایی، آن چیزی که باعث می‌شود تا جملهٔ اضافی $L_z$ در هامیلتونی ظاهر شود، پارامتر $\theta$ است، چون اگر $\theta = 0$ شود طیف

انرژی به طیف انرژی یک نوسـانگر دو بعـدی جابجـایی تبـدیل می‌شود ودر حرکت نوسانگر بـاردار نیـز آنچـه باعـث بوجـود آمدن جملهٔ تکانهٔ زاویه‌ای شده است میدان مغناطیسی است.

## ٤- مراجع:


[۱] G.V. Dunne, R. Jackiw and C. Trugenberger, TOPOLOGICAL (CHERN-SIMONS) QUANTUM MECHANICS, Phys. Rev. D 41, 661 (1990)

[۲] S. Bellucci Constant magnetic field and 2d non-commutative inverted oscillator, Phys. Rev. D 67, 105014 (2003),[arXiv:hep-th/0301227

[۳] A.P. Polychronakos, JHEP 0104( 2001) 011; V.P. Nair and A.P. Polychronakos, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 030403;
R. J. Szabo, Quantum field theory on noncommutative spaces, arXiv:hep-th/0109162.

[۴] R. Jackiw, Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them, Annales Henri Poincare 4S2, S913 (2003) [arXiv:hep-th/0212146].

[۵] J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, Addison-Wesley, 1994.