

بهبود پایش پروفایل‌های خطی در فاز ۲

رسول نورالسناءⁱ، امیرحسین امیریⁱⁱ

چکیده

در بسیاری از مسائل کنترل کیفیت آماری، کیفیت یک فرآیند یا محصول به وسیله یک مشخصه کیفی تک متغیره یا چند متغیره توصیف و با نمودارهای کنترل تک متغیره و چند متغیره کنترل می‌شود. بعضی اوقات کیفیت یک فرآیند یا محصول به وسیله رابطه بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود که محققان این رابطه را پروفایل می‌نامند. در بعضی از موارد، این پروفایل یک پروفایل خطی ساده و در بعضی مواقع یک پروفایل غیرخطی یا یک پروفایل پیچیده است. تاکنون روش‌هایی برای پایش پروفایل‌های خطی در فاز ۲ ارائه شده است. این مقاله با ارائه روش‌هایی دیگر سعی در بهبود پایش پروفایل‌های خطی در فاز ۲ دارد. بهبود در پایش با استفاده از شبیه‌سازی و محاسبه معیار متوسط طول دنباله نشان داده شده است.

کلمات کلیدی

پروفایل، متوسط طول دنباله، جمع تجمعی چند متغیره، میانگین متحرک موزون نمایی چند متغیره، کنترل فرآیند آماری

Enhancement of Linear Profiles Monitoring in Phase II

R. Noorossana; A. Amiri

ABSTRACT

In most statistical quality control (SQC) applications, quality of a process or product is characterized by a univariate quality characteristic or a vector of quality characteristics, which is controlled by a univariate or multivariate quality control chart, respectively. However, in many practical situations, the quality of a process or product is characterized by a relationship between two or more variables. This relationship, which is referred to as profile can be linear or nonlinear in nature. So far, several methods have been proposed for monitoring linear profiles in phase II. In this paper, two other methods are proposed for improving the performance of linear profiles in phase II. Average run length criterion is used as a vehicle to evaluate the performance of the proposed methods.

KEYWORDS

Profile, Average Run Length (ARL), Multivariate Cumulative Sum Control Chart (MCUSUM), Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA), Statistical Process Control

۱- مقدمه

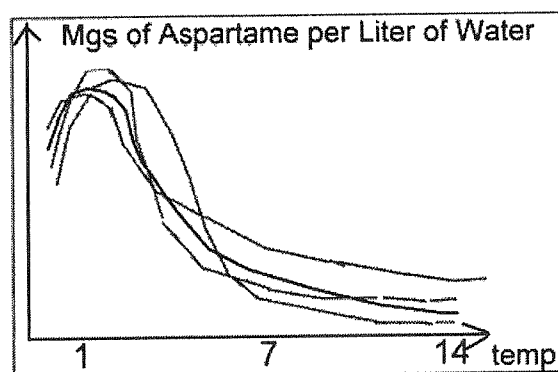
در بسیاری از شرایط، کیفیت یک فرآیند یا محصول به وسیله رابطه بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود و بدین گونه در هر مرحله نمونه‌گیری مجموعه‌ای از داده‌ها که می‌تواند به وسیله یک منحنی یا پروفایل نشان داده شود جمع‌آوری می‌شود. در بسیاری از کاربردها همچون کالیبراسیون این رابطه بوسیله یک پروفایل خطی توصیف در اکثر کاربردهای کنترل فرآیند آماری، فرض می‌شود که کیفیت یک فرآیند یا محصول می‌تواند به وسیله توزیع یک مشخصه کیفی توصیف و با نمودارهای کنترلی تک متغیره کنترل شود و یا در حالت کلی به وسیله توزیع چندین مشخصه کیفی توصیف و با نمودارهای کنترل چند متغیره کنترل شود.

ⁱ استاد و عضو هیات علمی دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران: rassoul@iust.ac.ir

ⁱⁱ دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس: a_amiri@modares.ac.ir

می‌شود در حالی که ممکن است در موقعیت‌های دیگر مدل‌های پیچیده تری نیاز باشد.

مثالی از یک پروفایل در مورد یک محصول در [۱] ارائه شده است. این محصول نوعی شیرین کننده مصنوعی است که از ویژگی‌های مهم آن، مقدار اسانس است که می‌تواند در هر لیتر آب در دماهای مختلف حل شود. بعد از تجزیه و تحلیل نمونه‌های مختلف، یک مجموعه از منحنی‌ها مشابه شکل (۱)، به دست می‌آید.



شکل (۱): میلی گرم اسانس حل شده در هر لیتر آب از نمونه‌های مختلف

در این مثال، رابطه‌ای بین مقدار اسانس حل شده و دما وجود دارد؛ اما سؤالاتی به ذهن می‌رسد که عبارتند از: چگونه ما این منحنی‌ها را ارزیابی کنیم؟ چگونه تعیین کنیم که آیا انحرافات مدل وجود دارد یا خیر؟ آیا قیاسی بین این مورد و حدود کنترل بالا و پایین نمودارهای کنترل آماری وجود دارد؟ نکته دیگری که معرفی آن الزامی است فاز ۱ و ۲ در نمودارهای کنترلی است. در استفاده از نمودارهای کنترلی، تمایز بین روش‌ها و کاربردهای فاز ۱ و فاز ۲ از اهمیت بالایی برخوردار است [۲]. در فاز ۱ با یک مجموعه از داده‌ها که از گذشته از فرآیند در دسترس است سرو کار داریم. در فاز ۱، اهداف شامل پیدا کردن اطلاعات در مورد پراکندگی فرآیند در طول زمان، ارزیابی پایداری فرآیند و تخمین پارامترهای مدل می‌شود. در حالی که هدف اصلی فاز ۲، کشف تغییرات در فرآیند در زودترین زمان ممکن است [۳]. در کنترل فرآیند آماری، از توان آزمون برای مقایسه روش‌های فاز ۱ و از متوسط طول دنباله برای مقایسه روش‌های فاز ۲ استفاده می‌شود. طول دنباله تعداد نمونه‌هایی است که قبل از پی بردن به وجود تغییر در فرآیند گرفته می‌شود [۴].

در این مقاله روش‌هایی برای بهبود پایش پروفایل‌های خطی در فاز ۲ ارائه شده است و عملکرد آنها با روش‌های موجود مقایسه شده است. ساختار مقاله بدین صورت است که در

بخش ۲، روش‌های ارائه شده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده مرور می‌شود. در بخش ۳، روش‌های پیشنهادی جهت بهبود پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ ارائه می‌شود. در بخش ۴، عملکرد این روش‌ها با استفاده از شبیه‌سازی و مقایسه متوسط طول دنباله با روش‌های موجود در فاز ۲ مقایسه می‌شود. در بخش ۵ به بعضی از نقاط ضعف و قوت روش‌های پیشنهادی و روش‌های موجود اشاره می‌شود و در بخش انتهایی، نتیجه گیری ارائه می‌گردد.

۲- مروری بر ادبیات: روش‌های فاز ۲

فرض کنید برای زمین نمونه تصادفی که در طول زمان جمع آوری شده، مشاهدات (x_i, y_{ij}) , $i=1,2,\dots,n$ به دست آمده باشد. هنگامی که فرآیند تحت کنترل آماری است فرض می‌شود که مدل اصلی به صورت زیر است:

$$Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{ij} \quad i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

در رابطه فوق، ε_{ij} متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (i.i.d) نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. برای سادگی، مقادیر X ثابت در نظر گرفته شده‌اند و مجموعه مقادیر یکسان برای هر نمونه وجود دارد.

برای پایش فرآیند هنگامی که همه پارامترهای رگرسیون معلومند، دو استراتژی در [۱] پیشنهاد شده است. اولین استراتژی، استفاده از نمودار دو متغیره T^2 برای پایش ضرایب رگرسیون بود. این نمودار بر اساس این که برآورد کننده‌های حداقل مربعات A_0 و A_1 توزیع نرمال دو متغیره دارند بنا شده است. برآورد کننده‌های حداقل مربعات A_0 و A_1 برای نمونه Z ام به صورت زیر می‌باشند:

$$a_{0j} = \bar{y}_j - a_{1j} \bar{x}, \quad a_{1j} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx}} \quad (2)$$

در روابط فوق داریم: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{xy(j)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_{ij}$$

برآوردهای حداقل مربعات a_{0j} و a_{1j} دارای توزیع نرمال دو متغیره با بردار میانگین

$$\mu = (A_0, A_1) \quad (3)$$

و ماتریس کوواریانس

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{01}^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

است که در آن $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$, $\sigma_0^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)$

بین a_{0j} و a_{1j} می‌باشند. $\sigma_{01}^2 = -\sigma^2 \frac{\bar{x}}{s_{xx}}$ به ترتیب واریانس a_{0j} و a_{1j} و کوواریانس

در روش آنها، ابتدا بردار برآورد کننده نمونه $z_j = (a_{0j}, a_{1j})^T$ برای نمونه زام محاسبه می‌شود که a_{0j} و a_{1j} عرض از مبدا و شیب نمونه مطابق (۲) تعریف شده‌اند؛ سپس آماره T^2 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_j^2 = (z_j - \mu)^T S^{-1} (z_j - \mu) \quad (5)$$

μ و S در رابطه فوق، به ترتیب در (۳) و (۴) تعریف شده‌اند. هنگامی که فرآیند تحت کنترل است، T_j^2 توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی دارد. بنابراین حد کنترل بالای توصیه شده برای این نمودار $UCL = \chi_{2,\alpha}^2$ است که $\chi_{2,\alpha}^2$ ، $100(1-\alpha)$ درصد توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی است. استراتژی دوم آنها استفاده از نمودارهای کنترلی برای کنترل باقیمانده‌ها بود که این باقیمانده‌ها در نمونه z با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_{ij} = y_{ij} - A_0 - A_1 x_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (6)$$

آنها از یک نمودار $EWMA$ برای پایش میانگین باقیمانده‌ها و نیز از یک نمودار R همزمان با این نمودار $EWMA$ برای پایش پراکندگی استفاده کردند. میانگین باقیمانده‌ها برای نمونه زام که

با $\bar{e}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{ij}$ نشان داده شده به صورت $EWMA$ محاسبه می‌شود. آماره نمودار کنترل $EWMA$ که با z_j ،

$$z_j = \theta \bar{e}_j + (1-\theta) z_{j-1} \quad j=1,2,\dots,n \quad (7)$$

در رابطه فوق، $(0 < \theta \leq 1)$ ثابت هموارسازی و $z_0 = 0$ می‌باشد.

زمانی که z_j کوچکتر از حد کنترل پایین (LCL) یا بزرگتر از حد کنترل بالا (UCL) شود، فرآیند خارج از کنترل آماری اعلام می‌شود. حدود کنترل بالا و پایین این نمودار به صورت زیر است:

$$LCL = -L\sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}}, UCL = L\sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}} \quad (8)$$

در رابطه فوق، $(L > 0)$ ثابتی است که برای به‌دست آوردن ARL تحت کنترل مشخص استفاده می‌شود.

آنها همچنین استفاده از یک نمودار R را همزمان با نمودار $EWMA$ به دو دلیل پیشنهاد کردند. اولین دلیل آنها کشف شیب در پراکندگی فرآیند بود؛ چون نمودار $EWMA$ نسبت به شیب در پراکندگی فرآیند حساس نیست. دلیل دوم آنها این بود که نمودار $EWMA$ بر اساس میانگین باقیمانده‌ها، نسبت به بعضی

از شیفتها در A_0 و A_1 که مقدار باقیمانده‌ها بزرگ ولی میانگین آنها کوچک است (به دلیل خنثی شدن مقادیر بزرگ مثبت با مقادیر بزرگ منفی) حساس نیست.

برای نمودار R پیشنهادی [۱] ابتدا باید آماره نمونه‌ای $R_j = \max(e_{ij}) - \min(e_{ij})$ را محاسبه کرد. حدود کنترل بالا و پایین نمودار R به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$LCL = \sigma(d_2 - Ld_3), UCL = \sigma(d_2 + Ld_3) \quad (9)$$

در رابطه فوق، $(L > 0)$ ثابتی است که برای بدست آوردن ARL تحت کنترل مشخص استفاده می‌شود و d_2 و d_3 مقادیر ثابتی هستند که به اندازه نمونه بستگی دارند.

مؤلفان مرجع [۵]، ابتدا مقادیر X را کد کردند به گونه‌ای که میانگین مقادیر کد شده برابر صفر شود. این کار آنالیز را ساده و نیاز به رویکرد T^2 را منتفی می‌سازد؛ چون با کد کردن، برآورد کننده‌های حداقل مربعات شیب و عرض از مبدا برای هر نمونه متغیرهای تصادفی مستقل می‌شوند. بعد از کد کردن مقادیر X ، آنها فرم جایگزین مدل اصلی در (۱) را به صورت زیر به‌دست آوردند.

$$Y_{ij} = B_0 + B_1 X'_i + \varepsilon_{ij}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (10)$$

در رابطه فوق، $X'_i = (X_i - \bar{X})$ می‌باشند و $B_1 = A_1$ و $B_0 = A_0 + A_1 \bar{X}$

برای z امین نمونه، برآوردکننده حداقل مربعات B_0 به صورت $b_{0j} = \bar{y}_j$ است درحالی‌که برآوردکننده حداقل مربعات B_1 با برآوردکننده حداقل مربعات A_1 در (۲) یکسان است. b_{0j} و b_{1j} دارای توزیع نرمال به ترتیب با میانگین‌های

B_0 و B_1 و واریانس‌های $\frac{\sigma^2}{n}$ و $\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ می‌باشند. همچنین

کوواریانس بین b_{0j} و b_{1j} برابر صفر است. سپس آنها از نمودارهای کنترل مجزا بدون مشکلی که در صورت همبسته بودن برآوردکننده‌ها منتج خواهد شد، استفاده کردند. روش پیشنهادی آنها در فاز ۲ برای کشف شیب در پارامترهای مدل، استفاده از نمودارهای کنترل تک متغیره مجزا بود. آنها از نمودارهای $EWMA$ برای پایش شیب، عرض از مبدا و پراکندگی خطاها استفاده کردند.

در نمودار $EWMA$ برای پایش عرض از مبدا (B_0)، آنها از برآوردکننده عرض از مبدا (b_{0j}) استفاده کردند تا آماره $EWMA$ را محاسبه کنند.

$$EWMA_I(j) = \theta b_{0j} + (1-\theta)EWMA_I(j-1), \quad j = 1,2,\dots,n \quad (11)$$

در رابطه فوق، $(0 < \theta \leq 1)$ ثابت هموارسازی و $EWMA_I(0) = B_0$ می‌باشد.

زمانی که $EWMA_I(j) > UCL$ یا $EWMA_I(j) < LCL$ شود،

فرآیند خارج از کنترل آماری می‌باشد. حدود کنترل بالا و پایین نمودار به صورت زیر است:

$$LCL = B_0 - L_I \sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}} \quad (12)$$

$$UCL = B_0 + L_I \sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}}$$

در (12)، ($L_I > 0$) به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا ARL تحت کنترل مشخصی به دست آید.

برآوردهای شیب B_1 ، b_{1j} در نمودار EWMA برای پایش شیب استفاده می‌شوند. آماره EWMA برای پایش شیب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$EWMA_S(j) = \theta b_{1j} + (1-\theta)EWMA_S(j-1) \quad (13)$$

$$j=1,2,\dots,n$$

در (13)، ($0 < \theta \leq 1$) ثابت هموارسازی و B_1 در $EWMA_S(0) = B_1$ می‌باشد. حدود کنترل بالا و پایین نمودار به صورت زیر است:

$$LCL = B_1 - L_S \sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)S_{xx}}} \quad (14)$$

$$UCL = B_1 + L_S \sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)S_{xx}}}$$

در رابطه فوق ($L_S > 0$) به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا ARL تحت کنترل مشخصی به دست آید.

بالاخره آنها از نمودار EWMA بر اساس رویکرد ارائه شده در [6] برای پایش پراکندگی خطا استفاده کردند. در این روش، آنها مقدار MSE_j (برآورد کننده معمول σ^2 بر اساس باقیمانده‌های مربوط به خط برازش شده در نمونه j ام) را استفاده کردند تا آماره EWMA را به دست آورند.

$$EWMA_E(j) = \max\{\theta \ln(MSE_j) + (1-\theta)EWMA_E(j-1), \ln(\sigma_0^2)\} \quad (15)$$

برای $j=1,2,\dots,n$ با ($0 < \theta \leq 1$) ثابت هموارسازی و $EWMA_E(0) = \ln(\sigma_0^2)$.

در روش پیشنهادی آنها، فرض شده که σ_0^2 (مقدار تحت کنترل σ^2) برابر یک است؛ بنابراین $EWMA_E(0) = 0$. زمانی که $EWMA_E(j)$ بزرگتر از حد کنترل بالا شود، فرآیند خارج از کنترل آماری می‌باشد. حد کنترل بالا به صورت زیر است:

$$UCL = L_E \sqrt{\frac{\theta \text{var}[\ln(MSE_j)]}{(2-\theta)}} \quad (16)$$

$$\text{Var}[\ln(MSE_j)] = \frac{2}{(n-2)} + \frac{2}{(n-2)^2} +$$

$$\frac{4}{3(n-2)^3} - \frac{16}{15(n-2)^5}$$

در رابطه فوق، ($L_E > 0$) به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا ARL تحت کنترل مشخصی به دست آید.

در مرجع [7]، استفاده از نمودار ترکیبی MCUSUM/R

برای پایش پروفایل‌های خطی در فاز ۲ پیشنهاد شده است و عملکرد نمودار پیشنهادی با نمودارهای دیگر مقایسه شده است. در این تحقیق، از نمودار MCUSUM پیشنهادی [8] برای پایش عرض از مبدا و شیب و از نمودار R پیشنهادی [1] برای پایش واریانس خطاها استفاده شده است. آماره MCUSUM پیشنهادی هیلی به صورت زیر است:

$$S_j = \max(S_{j-1} + a'(x_j - \mu_G) - 5D, 0) \quad (17)$$

در رابطه فوق داریم:

$$a' = \frac{(\mu_B - \mu_G)' \Sigma^{-1}}{\sqrt{(\mu_B - \mu_G)' \Sigma^{-1} (\mu_B - \mu_G)}} \quad (18)$$

$$D = \sqrt{(\mu_B - \mu_G)' \Sigma^{-1} (\mu_B - \mu_G)}$$

همچنین μ_G بردار میانگین در حالت تحت کنترل و μ_B بردار میانگین در حالت خارج از کنترل و Σ ماتریس کواریانس است. در روش پیشنهادی، بردار x_j بردار برآوردکننده‌های حداقل مربعات عرض از مبدا و شیب پروفایل j ام و Σ ماتریس کواریانس برآوردکننده‌های مذکور است. μ_G بردار مقادیر معلوم پارامترهای عرض از مبدا و شیب و μ_B بردار مقادیر پارامترها با اعمال کوچکترین شیفی است که مایل به کشف آن هستیم. این آماره دارای حد کنترل بالای H است که این حد کنترل بالا به گونه‌ای انتخاب می‌شود که ARL تحت کنترل دلخواهی به دست آید. اگر آماره S_j بزرگتر از H شود، فرآیند خارج از کنترل آماری اعلام می‌شود.

در مرجع [9]، اثر غیر نرمال بودن مشاهدات در پایش پروفایل‌های خطی در فاز ۲ بر روی نمودار EWMA/R پیشنهادی [1] بررسی و نشان داده شده است که غیر نرمال بودن مشاهدات باعث کاهش متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل (ARL_0) و در نتیجه باعث افزایش خطای نوع ۱ می‌شود. همچنین نشان داده شده است که نمودار R سهم بیشتری نسبت به EWMA در افزایش نرخ هشدار اشتباهی دارد و با کم رنگ کردن اثر نمودار R می‌توان مشکل نرخ هشدار اشتباهی را کم کرد؛ ولی حساسیت نمودار کنترل ترکیبی نسبت به کشف شیفت در واریانس کاهش می‌یابد؛ به عبارت دیگر، متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل (ARL_1) افزایش می‌یابد. در مرجع [9] خاطر نشان شده است که ایجاد تعادلی بین دو مورد مذکور با توجه به فرآیند مربوطه بر عهده تحلیلگر است.

۳- روش‌های پیشنهادی

۳-۱- روش χ^2 / MCUSUM

چنانچه در [7] ذکر شد، نمودار MCUSUM/R نسبت به نمودارهای T^2 و EWMA/R در [1] و نمودار EWMA-3 در [5]

برای کشف شیفت در عرض از مبدا و شیب به خصوص در شیفت‌های کوچک عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد؛ ولی نمودار R که در کنار نمودار $MCUSUM$ برای کشف شیفت در واریانس استفاده شد، عملکرد خوبی در شیفت‌های کوچک از خود نشان نداد؛ به همین دلیل برای تقویت روش در پایش پراکندگی، آماره جدیدی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\chi_j^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n e_{ij}^2 \quad (19)$$

این آماره توزیع χ^2 با n درجه آزادی دارد؛ بنابراین حد کنترل بالا برای این آماره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$UCL = \chi_{\alpha, n}^2 \quad (20)$$

اگر $\chi_j^2 > \chi_{\alpha, n}^2$ شود، فرآیند خارج از کنترل آماری می‌باشد. این نمودار را به دلیل اینکه از آماره χ^2 در آن استفاده شده است، نمودار χ^2 می‌نامیم و از آن برای پایش واریانس خطاها در کنار نمودار $MCUSUM$ برای پایش شیب و عرض از مبدا استفاده می‌کنیم؛ از این رو روش پیشنهادی نمودار ترکیبی $MCUSUM/\chi^2$ نامیده می‌شود.

از آنجا که در مباحث کنترل کیفیت آماری و پایش مشخصه‌های کیفی چند متغیره، عملکرد نمودارهای $MCUSUM$ و $MEWMA$ تقریباً یکسان است؛ تصمیم گرفته شد بررسی شود که آیا عملکرد این دو نمودار در پایش پروفایل‌های خطی ساده نیز یکسان است. به همین منظور روش $MEWMA/\chi^2$ برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ پیشنهاد می‌شود.

۲-۳- روش $MEWMA/\chi^2$

در این روش از نمودار $MEWMA$ پیشنهادی [۱۰] برای پایش عرض از مبدا و شیب استفاده می‌شود. به دلیل اینکه نمودار $MEWMA$ به تنهایی عملکرد خوبی در پایش انحراف معیار از خود نشان نداد (عملکرد آن با استفاده از شبیه سازی تست شد)، همزمان با این نمودار از نمودار χ^2 ؛ که در قسمت اول این بخش به آن اشاره شد، برای پایش پراکندگی خطاها استفاده گردید. بنابراین روش مذکور، ترکیبی از دو نمودار $MEWMA$ پیشنهادی [۱۰] برای پایش عرض از مبدا و شیب و نمودار χ^2 برای پایش انحراف معیار می‌باشد.

آماره $MEWMA$ پیشنهادی [۱۰] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_j = \theta x_j + (1 - \theta) z_{j-1} \quad (21)$$

در رابطه فوق z_j ، z_0 ، z_j ، x_j ، $EWMA$ بردار z امین مشاهده است و z_0 ، میانگین بردار مشاهدات تحت کنترل و $0 < \theta \leq 1$ ثابت هموارسازی می‌باشد.

مقدار آماره ای که بر روی نمودار کنترل ترسیم می‌شود به

صورت زیر است:

$$T_j^2 = z_j' \Sigma z_j^{-1} z_j \quad (22)$$

در رابطه فوق، ماتریس کواریانس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Sigma_{z_i} = \frac{\theta}{2 - \theta} [1 - (1 - \theta)^{2j}] \Sigma \quad (23)$$

در صورتی که z بزرگ باشد، می‌توان ماتریس کواریانس $EWMA$ را به صورت زیر ساده کرد:

$$\Sigma_{z_j} = \frac{\theta}{2 - \theta} \Sigma \quad (24)$$

در روش پیشنهادی، بردار x_j ، بردار برآوردکننده‌های حداقل مربعات عرض از مبدا و شیب پروفایل z ام و Σ ماتریس کواریانس برآوردکننده‌های مذکور است. در روش پیشنهادی، از (۲۴) برای محاسبه ماتریس کواریانس بردار z ام $EWMA$ استفاده شده است. z_0 بردار مقادیر معلوم پارامترهای عرض از مبدا و شیب می‌باشد.

در نمودار $MEWMA$ ، زمانی که T_j^2 بزرگتر از حد کنترل بالا شود فرآیند خارج از کنترل آماری اعلام می‌شود. حد کنترل بالا به گونه‌ای تعیین می‌شود که ARL تحت کنترل مشخصی (متناظر با مقدار سطح اطمینان از قبل تعیین شده) برای نمودار به دست آید.

۴- مقایسه عملکرد روش‌های پیشنهادی با روش‌های موجود

برای مقایسه عملکرد روش‌های پیشنهادی با روش‌های موجود، مثال پیشنهادی [۱] یعنی $Y_{ij} = 3 + 2X_i + \varepsilon$ استفاده شد که در این مثال $X = 2, 4, 6, 8$ و $\varepsilon \sim N(0, 1)$ است. پارامترهای نمودار ترکیبی $MEWMA/\chi^2$ به گونه‌ای طراحی شد که ARL تحت کنترل ۲۰۰ حاصل شود. بدین منظور هر کدام از نمودارهای $MCUSUM$ و χ^2 به تنهایی باید دارای ARL تحت کنترل ۳۹۹/۵ شوند تا ARL تحت کنترل کل ۲۰۰ حاصل گردد. صحت این مطلب با استفاده از روابط $ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$ و $\alpha_{overall} = 1 - (1 - \alpha)^2$ اثبات می‌شود. $\mu_G = (3, 2)$ پارامترهای خط مرجع می‌باشند و $\mu_B = (3.2, 2.025)$ با توجه به حداقل شیفتی که می‌خواهیم آنها را کشف کنیم، تعیین شدند. با فرض $S_0 = 0$ و با استفاده از ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی، مقدار $H = 5/7$ به عنوان حد کنترل بالای نمودار $MCUSUM$ به گونه‌ای تعیین شد که ARL تحت کنترل تقریباً ۳۹۹/۵ به دست آید. برای اینکه نمودار χ^2 ، ARL تحت کنترل تقریباً ۳۹۹/۵ را نتیجه دهد باید مقدار α برابر ۰/۰۰۲۵ گردد؛ پس $\chi_{0.0025, 4}^2 = 16/424$ به عنوان حد کنترل بالای نمودار

χ^2 استفاده شد. دقت کنید که درجه آزادی χ^2 در اینجا برابر تعداد مشاهدات در هر پروفایل، یعنی ۴ است.

در روش پیشنهادی $MEWMA/\chi^2$ ، از $z_0 = [3 \ 2]$ ، $\theta = 0.2$ و ماتریس کواریانس تقریبی در (۲۴) استفاده شد. باز هم مانند روش $MCUSUM/\chi^2$ مقدار ARL تحت کنترل کل برابر ۲۰۰ قرار داده شد. برای حصول چنین امری باید ARL تحت کنترل هر کدام از نمودارها برابر ۳۹۹/۵ می‌گردید؛ بنابراین پارامترهای هر دو نمودار $MEWMA$ و χ^2 به گونه‌ای طراحی شد که ARL تحت کنترل ۳۹۹/۵ به دست آید. برای اینکه χ^2 ، ARL تحت کنترل ۳۹۹/۵ را نتیجه دهد باید مقدار α برابر 0.0025 گردد؛ پس $\chi^2_{0.0025,4} = 16/424$ به عنوان حد بالای نمودار کنترل χ^2 استفاده شد. برای اینکه $MEWMA$ ، ARL تحت کنترل ۳۹۹/۵ را به دست آورد با استفاده از ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی، مقدار حد کنترل بالای نمودار، برابر $7244/85$ قرار داده شد.

پس از تعیین پارامترهای روش‌های پیشنهادی و یکسان کردن ARL تحت کنترل همه روش‌ها، شیفت‌های مختلف در پارامترهای عرض از مبدا، شیب مدل اصلی در (۱) و مدل تغییر فرم یافته در (۱۰) و انحراف معیار خطاها اعمال و مقدار ARL خارج از کنترل روش‌های پیشنهادی با استفاده از ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی محاسبه و نتایج آن در مقایسه با دیگر روش‌ها در جداول (۱)، (۲)، (۳) و (۴) خلاصه شد. شبیه سازی با استفاده از نرم افزار MATLAB اجرا شده است. صحت درستی برنامه‌ها با نوشتن برنامه روش‌های موجود و مقایسه نتایج با نتایج گزارش شده در [۱]، [۵] قابل تأیید است.

مقادیر داخل جداول (۱)، (۲)، (۳) و (۴)، ARL خارج از کنترل را نشان می‌دهند. سطر اول جداول (۱)، (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب میزان شیفت در عرض از مبدا، شیب مدل اصلی در (۱)، شیب مدل تغییر فرم یافته در (۱۰) و انحراف معیار را نشان می‌دهند. دقت شود که شیفت در شیب مدل تغییر فرم یافته در (۱۰) معادل شیفت همزمان در عرض از مبدا و شیب مدل اصلی است که در [۱] بررسی شده است.

همان‌گونه که در جدول (۱) مشاهده می‌شود، هر دو روش $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ عملکرد تقریباً بهتری نسبت به سایر روش‌ها در کل محدوده شیفت در عرض از مبدا از خود نشان می‌دهند. نکته جالب عملکرد بهتر روش پیشنهادی $MCUSUM/\chi^2$ نسبت به روش $MCUSUM/R$ است؛ اگرچه در هر دو روش از نمودار $MCUSUM$ برای کشف شیفت در عرض از مبدا استفاده شده است. دلیل این تفاوت آن است که نحوه شبیه سازی، تشخیص شیفت به ازای هر دو نمودار است.

نمودار χ^2 به تشخیص شیفت در عرض از مبدا نیز کمک کرده است و باعث عملکرد بهتر روش $MCUSUM/\chi^2$ نسبت به $MCUSUM/R$ برای کشف شیفت در عرض از مبدا شده است. روش $MEWMA/\chi^2$ نسبت به روش $MCUSUM/\chi^2$ در کشف شیفت‌های از 0.06 سیگما تا 2 سیگما در عرض از مبدا بهتر عمل می‌کند؛ ولی در کشف شیفت‌های 0.2 و 0.4 سیگما عملکرد ضعیفتری از خود نشان می‌دهد. عملکرد ضعیف‌تر روش $MEWMA/\chi^2$ در شیفت‌های کوچک نسبت به روش $MCUSUM/\chi^2$ به این دلیل است که در روش $MCUSUM$ هیلی، میانگین عرض از مبدا در حالت خارج از کنترل تعریف می‌شود و این موضوع، روش $MCUSUM$ هیلی را در کشف شیفت‌های بسیار کوچک توانا می‌سازد.

همان‌گونه که در جدول (۲) مشاهده می‌شود، هر دو روش $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ عملکرد تقریباً بهتری نسبت به سایر روش‌ها در کل محدوده شیفت در شیب مدل اصلی در (۱) از خود نشان می‌دهند. به طور مشابه با شیفت در عرض از مبدا، روش پیشنهادی $MCUSUM/\chi^2$ نسبت به روش $MCUSUM/R$ در شیفت در شیب نیز عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد، با توجه به اینکه در هر دو روش از نمودار $MCUSUM$ برای کشف شیفت در شیب استفاده شده است. این بهبود نیز به این دلیل است که نحوه شبیه سازی، تشخیص شیفت به ازای هر دو نمودار است. نمودار χ^2 به تشخیص شیفت در شیب نیز کمک کرده است و باعث عملکرد بهتر روش $MCUSUM/\chi^2$ نسبت به $MCUSUM/R$ برای کشف شیفت در شیب شده است. روش $MEWMA/\chi^2$ نسبت به روش $MCUSUM/\chi^2$ در کشف شیفت‌های از 0.075 سیگما تا 0.25 سیگما در شیب بهتر عمل می‌کند ولی در کشف شیفت‌های خیلی کوچک عملکرد ضعیف تری از خود نشان می‌دهد. عملکرد ضعیف‌تر روش $MEWMA/\chi^2$ در کشف شیفت‌های خیلی کوچک نسبت به روش $MCUSUM/\chi^2$ به این دلیل است که در روش $MCUSUM$ هیلی، میانگین شیب در حالت خارج از کنترل تعریف می‌شود و این ویژگی توانایی روش $MCUSUM$ هیلی را در کشف شیفت‌های بسیار کوچک بالا می‌برد.

همان‌گونه که در جدول (۳) مشاهده می‌شود، هر دو روش پیشنهادی $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ در تمام محدوده شیفت در انحراف معیار، نسبت به نمودارهای دیگر عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند. با وجود اینکه آماره χ^2 برای پایش پراکندگی در هر دو روش $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ استفاده شده است، روش $MEWMA/\chi^2$ نسبت به روش $MCUSUM/\chi^2$ ، در شیفت‌های کوچک در

انحراف معیار از $1/2$ تا 2 سیگما، عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد و این به دلیل آن است که نحوه شبیه‌سازی تشخیص شیفیت به ازای هر دو نمودار است و لذا می‌توان نتیجه گرفت که نمودار $MEWMA$ نسبت به نمودار $MCUSUM$ به تشخیص شیفیت‌های کوچک در انحراف معیار کمک بیشتری می‌کند. اگرچه، در شیفیت‌های بزرگ عملکرد هر دو روش تقریباً یکسان است.

جدول (۴)، نتایج حاصل از شیفیت در شیب مدل تغییر فرم یافته در (۱۰) را نشان می‌دهد. همان‌گونه که توضیح داده شد شیفیت در شیب مدل تغییر فرم یافته در (۱۰) معادل شیفیت همزمان در عرض از مبدا و شیب مدل اصلی است که در [۱] بررسی شده است. این نوع شیفیت زمانی رخ می‌دهد که مقدار باقیمانده‌ها بزرگ باشد و آنها دارای علامت‌های مخالف باشند؛ ولی میانگین باقیمانده‌ها کوچک باشد. همان‌گونه که در جدول (۴) ملاحظه می‌شود، روش‌های پیشنهادی نسبت به روش‌های موجود، عملکرد مناسبی از خود نشان نمی‌دهند. عملکرد دو روش پیشنهادی به جز در شیفیت‌های بسیار کوچک یکسان است، پس به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که تقریباً روش پیشنهادی $MEWMA/\chi^2$ عملکرد مشابهی با $MCUSUM/\chi^2$ برای کشف شیفیت در عرض از مبدا، شیفیت در شیب مدل اصلی و تغییر فرم یافته و شیفیت در انحراف معیار از خود نشان می‌دهد؛ از این رو عملکرد یکسان نمودارهای $MCUSUM$ و $MEWMA$ در پایش مشخصه‌های کیفی چندمتغیره، در پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ نیز صادق است.

۵- نقاط ضعف و قوت روش‌های موجود و پیشنهادی

به عنوان نقاط قوت روش‌های پیشنهادی می‌توان به کشف سریعتر شیفیت‌ها در عرض از مبدا، شیب مدل اصلی و انحراف معیار در مقایسه با روش‌های موجود اشاره کرد. به عنوان نقاط ضعف، می‌توان به ضعف این روش‌ها در تشخیص شیفیت در شیب مدل تغییر فرم یافته و همچنین عدم تشخیص روش‌های پیشنهادی نسبت به اینکه شیفیت در شیب یا عرض از مبدا رخ داده است، اشاره کرد. با این حال باید توضیح داد که می‌توان پس از کشف شیفیت، از روش‌های تشخیص مانند تجزیه و تحلیل مولفه‌های اصلی و یا شبکه عصبی مصنوعی برای تشخیص اینکه کدام یک از پارامترهای شیب یا عرض از مبدا باعث ایجاد تغییر در فرآیند شده است استفاده کرد.

اگر نگاهی روی نقاط ضعف روش‌های موجود انداخته شود باید گفت که روش T^2 در [۱] نمی‌تواند تشخیص دهد که شیفیت در کدام یک از پارامترهای شیب، عرض از مبدا و انحراف معیار رخ داده است. روش $EWMA/R$ در [۱] نیز فاقد تشخیص

آن است که شیفیت در شیب یا عرض از مبدا رخ داده است. همچنین این روش در کشف شیفیت در شیب مدل تغییر فرم یافته نیز عملکرد مناسبی از خود نشان نمی‌دهد. در مرجع [۵] با استفاده از روش کد کردن، ابتدا برآوردکننده‌های شیب و عرض از مبدا را مستقل کرده و در واقع مدل خطی ساده را با کد کردن مقادیر X ، به مدل خطی دیگر تبدیل و سپس پارامترهای مدل جدید را با استفاده از سه نمودار تکی $EWMA$ مورد پایش قرار دادند؛ اما باید گفت عدم رابطه یک به یک بین پارامترهای مدل اصلی و مدل تغییر فرم داده شده، مشکل اصلی این روش می‌باشد. روش $MCUSUM/R$ [۷] نیز فاقد تشخیص این است که آیا شیفیت در شیب یا عرض از مبدا رخ داده است و فقط شیفیت در انحراف معیار را به خاطر استفاده از نمودار R تشخیص می‌دهد. همچنین این روش نسبت به کشف شیفیت در شیب مدل تغییر فرم یافته مخصوصاً در شیفیت‌های کوچک، عملکرد مناسبی از خود نشان نمی‌دهد.

۶- نتیجه

به منظور بهبود عملکرد روش $MCUSUM/R$ برای پایش پراکندگی، آماره‌ای به صورت جمع مربعات خطای استاندارد شده پیشنهاد و حد کنترل بالای آن تعیین و از آن به جای نمودار R استفاده شد و روش $MCUSUM/\chi^2$ نام گرفت. عملکرد این روش با استفاده از شبیه‌سازی بررسی شد و با توجه به اینکه نحوه شبیه‌سازی، تشخیص شیفیت به ازای هر دو نمودار است علاوه بر بهبود عملکرد در پایش انحراف معیار نسبت به روش‌های موجود و روش $MCUSUM/R$ ، بهبود عملکرد در شیب و عرض از مبدا نیز حاصل گردید. سپس روش $MEWMA/\chi^2$ پیشنهاد و عملکرد آن با استفاده از شبیه‌سازی با دیگر روش‌ها مقایسه شد. با توجه به نتایج شبیه‌سازی، روش $MEWMA/\chi^2$ عملکرد تقریباً یکسانی با نمودار $MCUSUM/\chi^2$ در بسیاری از شیفیت‌ها در شیب و عرض از مبدا و انحراف معیار از خود نشان داد و عملکرد یکسان دو نمودار $MEWMA$ و $MCUSUM$ در پایش مشخصه‌های کیفی چند متغیره، در پایش پروفایل‌های خطی در فاز ۲ نیز مشاهده شد. اگرچه روش‌های پیشنهادی برای کشف شیفیت در شیب مدل تغییر فرم یافته، زمانی که مقدار باقیمانده‌ها بزرگ و میانگین باقیمانده‌ها کوچک است، از خود عملکرد مناسبی نشان نمی‌دهند؛ ولی در بقیه شیفیت‌ها در پارامترهای مدل اصلی، عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها از خود نشان می‌دهند؛ بنابراین برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲، روش $MEWMA/\chi^2$ یا $MCUSUM/\chi^2$ به

جدول (۱): مقایسات ARL تحت شیفت در عرض از مبدا از A_0 به $A_0 + \lambda\sigma$

λ Chart	-۰/۲	-۰/۴	-۰/۶	-۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
EWMA/R	۶۶/۵	۱۷/۷	۸/۴	۵/۴	۳/۹	۳/۲	۲/۷	۲/۳	۲/۱	۱/۹
T^2	۱۳۷/۷	۶۲/۵	۲۸	۱۳/۲	۶/۹	۴	۲/۶	۱/۸	۱/۵	۱/۲
EWMA-3	۵۹/۱	۱۶/۲	۷/۹	۵/۱	۳/۸	۳/۱	۲/۶	۲/۳	۲/۱	۱/۹
MCUSUM/R	۳۳/۸	۱۲/۴	۷/۴	۵/۳	۴/۱	۳/۴	۲/۹	۲/۶	۲/۳	۲/۱
MCUSUM/ χ^2	۳۳/۵	۱۲/۲	۷/۳	۵/۱	۳/۹	۳/۱	۲/۶	۲	۱/۷	۱/۵
MEWMA/ χ^2	۳۹/۴	۱۲/۸	۶/۷	۴/۵	۳/۳	۲/۷	۲/۲	۱/۸	۱/۶	۱/۴

جدول (۲): مقایسات ARL تحت شیفت در شیب از A_1 به $A_1 + \beta\sigma$

β Chart	-۰/۰۲۵	-۰/۰۵	-۰/۰۷۵	-۰/۱	-۰/۱۲۵	-۰/۱۵	-۰/۱۷۵	-۰/۲	-۰/۲۲۵	-۰/۲۵
EWMA/R	۱۱۹	۴۳/۹	۱۹/۸	۱۱/۳	۷/۷	۵/۸	۴/۷	۳/۹	۳/۴	۳
T^2	۱۶۶	۱۰۵/۶	۶۰/۷	۳۴/۵	۲۰/۱	۱۲/۲	۷/۸	۵/۲	۳/۷	۲/۷
EWMA-3	۱۰۱/۶	۳۶/۵	۱۷	۱۰/۳	۷/۲	۵/۵	۴/۵	۳/۸	۲/۳	۲/۹
MCUSUM/R	۵۷/۵	۲۱/۸	۱۲/۳	۸/۳	۶/۴	۵/۲	۴/۴	۳/۸	۳/۳	۳
MCUSUM/ χ^2	۵۶/۵	۲۱/۴	۱۲/۲	۸/۳	۶/۳	۵/۱	۴/۲	۳/۵	۲/۱	۲/۷
MEWMA/ χ^2	۵۹/۷	۲۲/۱	۱۱/۲	۷/۱	۵/۲	۴/۱	۳/۴	۲/۸	۲/۵	۲/۲

جدول (۳): مقایسات ARL تحت شیفت در انحراف معیار از σ به $\gamma\sigma$

γ Chart	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
EWMA/R	۳۴/۳	۱۲	۶/۱	۳/۹	۲/۹	۲/۳	۱/۹	۱/۷	۱/۵	۱/۴
T^2	۳۹/۶	۱۴/۹	۷/۹	۵/۱	۳/۸	۳	۲/۵	۲/۲	۲	۱/۸
EWMA-3	۳۳/۵	۱۲/۷	۷/۲	۵/۱	۳/۹	۳/۲	۲/۸	۲/۵	۲/۳	۲/۱
MCUSUM/R	۴۲	۱۴/۶	۷/۲	۴/۶	۲/۲	۲/۵	۲/۱	۱/۸	۱/۶	۱/۵
MCUSUM/ χ^2	۳۷/۲	۱۱/۸	۵/۷	۳/۶	۲/۶	۲	۱/۷	۱/۵	۱/۴	۱/۳
MEWMA/ χ^2	۳۵/۱	۱۱/۴	۵/۶	۲/۵	۲/۵	۲	۱/۷	۱/۵	۱/۴	۱/۳

جدول (۴): مقایسات ARL تحت شیفت در شیب از B_1 به $B_1 + \delta\sigma$

δ Chart	-۰/۲	-۰/۳	-۰/۴	-۰/۵	-۰/۶	-۰/۷	-۰/۸	-۰/۹	-۱
EWMA/R	۶۷/۷	۳۳/۷	۱۵/۳	۷/۵	۴/۲	۲/۶	۱/۸	۱/۴	۱/۲
T^2	۵۲/۲	۲۱/۲	۹/۶	۴/۹	۲/۹	۱/۹	۱/۵	۱/۲	۱/۱
EWMA-3	۱۳/۱	۶/۶	۴/۴	۲/۳	۲/۷	۲/۳	۲/۱	۱/۹	۱/۷
MCUSUM/R	۱۰۹/۱	۴۶/۲	۱۹/۷	۹/۴	۴/۹	۳	۲	۱/۵	۱/۲
MCUSUM/ χ^2	۱۲۳/۶	۵۴/۱	۲۲/۷	۱۰/۷	۵/۴	۳/۲	۲/۱	۱/۶	۱/۳
MEWMA/ χ^2	۱۲۸/۹	۵۴/۳	۲۳	۱۰/۸	۵/۵	۳/۲	۲/۱	۱/۶	۱/۳

- [۱] Kang, L.; Albin, S.L. "On-Line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile.", Journal of Quality Technology, vol. 32, p.p. 418-426, 2000.
- [۲] Woodall, W.H. "Controversies and Contradictions in statistical process control.", (With discussion), Journal of Quality Technology, vol. 32, p.p. 341-378, 2000.
- [۳] Woodall, W.H.; Spitzner, D.J.; Montgomery, D.C.; Gupta, S. "Using control charts to monitor process and product quality profiles.", Journal of Quality Technology, vol. 36, p.p. 309-320, 2004.
- [۴] Montgomery, D.C. "Introduction to Statistical Quality Control.", Fifth Edition, John Wiley and Sons, Inc., 2005
- [۵] Kim, K; Mahmoud, M.A. ; Woodall, W.H. "On the Monitoring of Linear Profiles.", Journal of Quality Technology, vol. 35, p.p. 317-328, 2003
- [۶] Crowder, S.V. ; Hamilton, M.D. "An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation.", Journal of Quality Technology, vol. 24, p.p. 12-21, 1992
- [۷] Noorossana, R.; Amiri, A.; Vaghefi, S.A.; Roghanian, E "Monitoring Quality Characteristics using Linear Profile.", Proceedings of the 3rd international industrial engineering conference, Tehran, IRAN, 2004
- [۸] Healy, J.D. "A note on Multivariate CUSUM Procedures.", Technometrics, vol. 29 ,p.p. 409-412, 1987
- [۹] Noorossana, R.; Vaghefi, S.A.; Amiri, A. "the Effect of Non-Normality on Monitoring Linear Profiles", Proceedings of the 2nd international industrial engineering conference, Riyadh, Saudi Arabia, 2004.
- [۱۰] Lowry, C.A.; Woodall, W.H.; Champ, C.W.; Rigdon, S.E. "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart.", Technometrics, vol. 34, p.p. 465-472, 1992 .