

کاربرد روش RLS در تخمین تطبیقی پارامترهای

سیستم‌های دوبعدی

علی مددیⁱ؛ مسعود شفیعیⁱⁱ

چکیده

در این مقاله یک الگوریتم جدید با استفاده از روش بازگشتی کمترین مربعات برای تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی، که در آن ابعاد می‌توانند نامحدود باشند، ارائه می‌شود. از آنجا که این الگوریتم بر مدل یک بعدی پیشرفته موجهی مبتنی است، ابتدا این مدل به اختصار معرفی شده و مسأله تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی از دیدگاه این مدل تعریف می‌شود. بدین ترتیب مسأله تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی به صورت یک مسأله یک بعدی فرمول‌بندی می‌شود. با اجرای روش بازگشتی کمترین مربعات در مورد مدل یک بعدی پیشرفته موجهی، یک الگوریتم تطبیقی برای تخمین پارامترهای آن و در نتیجه برای تخمین پارامترهای سیستم دو بعدی مورد نظر به دست می‌آید. همگرایی الگوریتم مورد نظر ثابت شده و سرعت همگرایی آن بررسی می‌شود. به منظور نشان دادن قابلیت و توانایی روش ارائه شده، دو مثال شبیه‌سازی آورده می‌شود.

کلمات کلیدی

سیستم‌های دو بعدی، تخمین تطبیقی پارامتر، روش RLS، مدل WAM

Application of RLS Method in Adaptive Estimation of 2-D Systems Parameters

Ali Madady; Masoud Shafiee

ABSTRACT

This paper considers the problem of 2-D adaptive parameter estimation in a general case; when both of the 2-D space coordinates are possibly unbounded. The problem is formulated via 1-D wave advanced model. By this manner, our 2-D problem is converted to a 1-D problem, which adaptively estimate the wave advanced model parameters. Utilizing the Recursive Least Square (RLS), method an adaptive algorithm is obtained for estimating the wave advanced model parameters and consequently for estimating the 2-D systems parameters. The convergence of presented scheme is proved and its convergence rate is analyzed. The computer simulation results are included to illustrate effectiveness of the proposed procedure.

KEYWORDS

Two-Dimensional systems, Adaptive Parameter Estimation, RLS Method, Wave Advanced Model.

۱- مقدمه

کاربردهای جالبی نیز از جمله در طراحی فیلترهای دیجیتال دو بعدی و تحلیل پایداری آنها، پردازش سیگنال‌های دو بعدی، آنالیز و دسته بندی سیگنال‌های حاصل از زلزله و انفجارهای

بیش از سه دهه از ارائه اولین مدل فضای حالت در مورد سیستم‌های دو بعدی می‌گذرد [۲]. در این مدت مبانی نظری سیستم‌های دو بعدی تا حد مطلوبی پیشرفت کرده و

ⁱ استادیار دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تفرش: madady@aut.ac.ir

ⁱⁱ استاد دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیر کبیر: shafiee@aut.ac.ir

ندارد و به همین دلیل روش RLS به طور مستقیم بر روی سیستم‌های دو بعدی قابل اجرا نیست. در این مقاله با استفاده از مدل پیشرفته موجی (WAM) این مشکل حل می‌شود.

به عبارت دیگر، هدف این مقاله حل مسأله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی از طریق تکنیک RLS است. برای این منظور؛ یعنی پیاده‌سازی روش RLS از مدل WAM استفاده می‌شود.

مقاله چنین سازمان‌دهی شده است: در قسمت ۲ مسأله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی با استفاده از مدل WAM تعریف می‌شود. در قسمت ۳ روش مورد نظر این مقاله ارائه می‌گردد. همگرایی و سرعت همگرایی الگوریتم ارائه شده، در قسمت ۴ بررسی و در قسمت ۵ دو نمونه و مثال ذکر می‌شود. نتیجه گیری هم در قسمت ۶ آورده می‌شود.

۲- تعریف مسأله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی از طریق مدل WAM

توصیف سیستم‌های دو بعدی در فرم فضای حالت به صورت زیر است [۳]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (1)$$

$$i, j = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن i و j متغیرهای مستقل سیستم (ابعاد فضای دو بعدی)، $x^h \in \mathbb{R}^{m_1}$ و $x^v \in \mathbb{R}^{m_2}$ به ترتیب بردارهای حالت محلی افقی و قائم و $u \in \mathbb{R}^p$ بردار ورودی سیستم است. ماتریس‌های ضرایب سیستم؛ یعنی $A_k; (k=1, 2, 3, 4)$ و $B_l; (l=1, 2)$ حقیقی هستند و ابعاد مناسب دارند. بردارهای $x^h(0, j)$ و $x^v(i, 0)$ شرایط مرزی سیستم هستند.

در خصوص سیستم (۱) عدد m و ماتریس θ را که ماتریس پارامترهای سیستم نامیده می‌شود، چنین تعریف می‌کنیم:

$$\theta = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_3 & A_4 & B_2 \end{bmatrix}, \quad m = m_1 + m_2 \quad (2)$$

همچنین بردارهای $\phi(n)$ ، $v(n)$ و $f(n)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \text{col}\{x^v(i, n-i), x^h(i+1, n-i-1) : 0 \leq i \leq n-1\} \\ v(n) &= \text{col}\{u(i, n-i) : 0 \leq i \leq n\} \\ f(n) &= \text{col}\{x^h(0, n), x^v(n, 0)\} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن col نشان‌دهنده آرایش ستونی است؛ یعنی اگر a_i و b_i چند بردار باشند ($i=1, 2, \dots, n$) آنگاه طبق تعریف داریم:

هسته‌ای، تجزیه و تحلیل سیستم‌های کنترل یادگیر تکرار شونده و مدل‌سازی و کنترل فرآیندهای صنعتی مدل گسترده (فرآیند تولید مصنوعات صفحه ای) پیدا کرده است [۴]، [۵]، [۶].

پیشرفت نظریه سیستم‌های دو بعدی به وسیله تعمیم مفاهیم و نتایج موجود در حوزه سیستم‌های یک بعدی به حالت دو بعدی میسر شده است. در این راستا مواردی چون مدل‌سازی [۷]، تحلیل پایداری [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، پایدار سازی با استفاده از فیدبک [۱۲]، [۱۳]، کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری [۱۴]، جایابی قطب [۱۵]، کنترل بهینه [۱۶]، کنترل تطبیقی [۱۷]، [۱۸]، کنترل مقاوم [۱۹]، [۲۰] مطالعه شده است.

یکی از مواردی که اخیراً به منظور توسعه نظریه سیستم‌های دو بعدی مطرح شده و کاربردهایی هم در طراحی فیلترهای تطبیقی دو بعدی، کنترل تطبیقی فرآیندهای تولید کاغذ و لاستیک و کنترل تطبیقی فرآیندهای تکرار شونده پیدا کرده، تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی است [۲۱]، [۲۲]، [۲۳]. مسأله تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی برای اولین بار در [۲۳] مطالعه شده است؛ اما در آنجا برای توصیف سیستم‌های دو بعدی از یک نوع مدل خاص استفاده شده که در آن دامنه تغییرات یکی از دو متغیر مستقل محدود بوده و قابل تعمیم به حالت کلی نبوده است. در [۱] با در نظر گرفتن توصیف فضای حالت برای سیستم‌های دو بعدی و نامحدود در نظر گرفتن دامنه تغییرات هر دو متغیر مستقل سیستم این مسأله به طور مستقیم مطالعه شده است. در [۲] این مسأله با استفاده از مدل یک بعدی پیشرفته موجی و تکنیک LMS حل شده است. در [۲۲] و [۲۴] با استفاده از تصویر کردن (Projection) دو الگوریتم تطبیقی برای تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی تک ورودی - تک خروجی به دست آمده است، ولی همگرایی آنها اثبات نشده است. مسأله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی در [۲۱] با استفاده از ایده تقسیم پارامترهای سیستم به دو گروه افقی و عمودی حل شده است.

به هر حال، تاکنون این مسأله با استفاده از روش RLS^۲ (روش بازگشتی کمترین مربعات) تجزیه و تحلیل نشده است؛ زیرا روش RLS مبتنی بر ترتیب و مرحله است، یعنی با داشتن تخمین پارامترها در یک مرحله و با داشتن اندازه‌گیری‌های جدید از سیگنال‌های مرتبط با سیستم، تخمین پارامترها در مرحله بعدی به دست می‌آید و همین روند به پیش می‌رود تا اینکه تخمین به دست آمده برای پارامترها به مقادیر واقعی آنها همگرا شود. در سیستم‌های دو بعدی؛ که متغیرهای مستقل سیستم تشکیل یک صفحه می‌دهند، ترتیب و مرحله مفهومی

اکنون مسأله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی با استفاده از مدل WAM را چنین تعریف می‌کنیم: با فرض اینکه در مدل (۵) ماتریس‌های ضرایب نامعلوم و دارای ساختار داده شده در روابط (۶) و (۷) هستند و بردارهای $\phi(n)$ ، $v(n)$ و $f(n)$ قابل اندازه‌گیری می‌باشند، یک تخمین‌گر تطبیقی برای تخمین ماتریس پارامترهای مدل (۵) یعنی همان ماتریس پارامترهای سیستم (۱) (ماتریس θ) مانند $\hat{\theta}(n)$ ارائه دهید به طوری که داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(n) - \theta) = 0 \quad (۸)$$

در [۲] مسأله فوق از طریق روش LMS حل شده است. در قسمت بعدی این مقاله، مسأله مذکور با استفاده از روش RLS حل می‌شود.

۳- حل مسأله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی با استفاده از روش RLS

طبق تعریف مسأله، بردارهای $\phi(n)$ ، $v(n)$ و $f(n)$ قابل اندازه‌گیری هستند، پس فرض می‌کنیم اندازه‌گیری‌های زیر را در اختیار داریم:

$$\{\phi(k), v(l), f(l) : 1 \leq k \leq N+1, 1 \leq l \leq N\}$$

که در آن N یک عدد طبیعی و معلومی است.

می‌خواهیم با توجه به این اندازه‌گیری‌ها بهترین تخمین را برای ماتریس‌های ضرایب سیستم دو بعدی (۱) ارائه دهیم.

با توجه به (۵) بین این اندازه‌گیری‌ها رابطه زیر برقرار است:

$$\Phi(N) = T(N)\Psi(N) \quad (۹)$$

که در آن $\Phi(N)$ و $\Psi(N)$ دو بردار و به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \Psi(N) = \text{col}\{\phi(1), v(1), f(1), \dots, \phi(N), v(N), f(N)\} \\ \Phi(N) = \text{col}\{\phi(2), \phi(3), \dots, \phi(N+1)\} \end{cases} \quad (۱۰)$$

و $T(N)$ یک ماتریس به صورت زیر است:

$$T(N) = \begin{bmatrix} \bar{A}(1) & \bar{B}(1) & \bar{C}(1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}(2) & \bar{B}(2) & \bar{C}(2) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{A}(N-1) & \bar{B}(N-1) & \bar{C}(N-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{A}(N) & \bar{B}(N) & \bar{C}(N) \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

$$\text{col}\{a_i, b_i : 1 \leq i \leq n\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix} \quad (۴)$$

با توجه به تعاریف (۳) و رابطه (۱) بردار $\phi(n+1)$ به صورت زیر به دست می‌آید [۲]:

$$\phi(n+1) = \bar{A}(n)\phi(n) + \bar{B}(n)v(n) + \bar{C}(n)f(n) \quad (۵)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

که در آن $\bar{A}(n)$ ، $\bar{B}(n)$ و $\bar{C}(n)$ ماتریس‌هایی بر حسب ماتریس‌های ضرایب سیستم (۱) بوده و دارای چنین ساختاری هستند [۲]:

$$\bar{A}(n) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$\bar{B}(n) = \begin{bmatrix} B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}(n) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & A_4 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

ماتریس‌های $\bar{A}(n)$ ، $\bar{B}(n)$ و $\bar{C}(n)$ هر کدام دارای $(n+1)m$ سطر و به ترتیب دارای nm ، $(n+1)p$ و m ستون هستند که عدد m در (۲) تعریف شده است.

رابطه دینامیکی (۵) مدل WAM نامیده شده [۲] و در این مدل $\phi(n)$ بردار حالت، $v(n)$ بردار ورودی و $f(n)$ بردار شرایط مرزی است. همانگونه که مشاهده می‌شود این مدل یک بعدی است؛ یعنی در آن یک متغیر مستقل وجود دارد که n است؛ اما یک تفاوت اساسی بین این مدل و مدل‌های یک بعدی معمولی وجود دارد و آن این است که در این مدل ابعاد بردار حالت و ماتریس‌های ضرایب با افزایش n زیاد می‌شوند. نکته جالب این است که در مدل WAM ساختار ماتریس‌های ضرایب بر حسب ماتریس‌های ضرایب سیستم دو بعدی (۱) ثابت است.

$$J(N) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^k \{ z^T(l, k-l) \hat{\theta}^T(N) \hat{\theta}(N) z(l, k-l) - 2\chi^T(l, k-l) \hat{\theta}(N) z(l, k-l) + \chi^T(l, k-l) \chi(l, k-l) \} \quad (17)$$

که در آن $z(k, k-l)$ و $\chi(l, k-l)$ بردارهایی بر حسب بردارهای حالت و ورودی سیستم (۱) و به صورت زیر هستند:

$$\chi(l, k-l) = \begin{bmatrix} x^h(l+1, k-l) \\ x^v(l, k-l+1) \end{bmatrix}, z(l, k-l) = \begin{bmatrix} x^h(l, k-l) \\ u(l, k-l) \end{bmatrix} \quad (18)$$

با استفاده از (۱۷) جواب معادله (۱۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\theta}(N) = \left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^k \chi(l, k-l) z^T(l, k-l) \right) (W(N) W^T(N))^{-1} \quad (19)$$

که در آن:

$$W(N) = [R(1) \ R(2) \ R(3) \ \dots \ R(N)] \quad (20)$$

و ماتریس‌های $R(k)$ چنین هستند ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$R(k) = [z(0, k) \ z(1, k-1) \ z(2, k-2) \ \dots \ z(k-1, 1) \ z(k, 0)] \quad (21)$$

طبق رابطه (۱۹) شرط وجود جواب برای $\hat{\theta}(N)$ معکوس‌پذیر بودن ماتریس $W(N)W^T(N)$ است. این ماتریس نیز معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس $W(N)$ دارای رتبه کامل سطری باشد. برای این منظور کافی است برخی از ماتریس‌های $R(k)$ دارای رتبه کامل سطری و یا بعضی از ماتریس‌های متقارن $R(k)R^T(k)$ مثبت معین (Positive Definite) باشند. بنا به دلایلی که در قسمت ۴ روشن خواهد شد در اینجا فراتر رفته و فرض می‌کنیم:

در سیستم دو بعدی (۱) سیگنال ورودی و شرایط مرزی به اندازه کافی غنی هستند، به طوری که عدد مثبتی مانند σ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\lambda_{\min}(R(k)R^T(k)) \geq \sigma \quad (22)$$

که در λ_{\min} نشان دهنده کوچک‌ترین مقدار ویژه است.

دقت شود که در تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های یک بعدی معمولی نیز باید سیگنال ورودی سیستم شرایطی داشته باشد تا با اعمال آن ورودی به سیستم و مشاهده بردار حالت سیستم و ورودی به تعیین پارامترهای سیستم موفق شویم. این شرایط اصطلاحاً ورودی مصراً محرک (Persistent Excitatory) نامیده می‌شود. می‌توان گفت که رابطه (۲۲) شرط Persistent Excitation برای سیستم‌های

اگر با توجه به اندازه‌گیری‌های $\{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(N+1)\}$ و $\{v(1), v(2), \dots, v(N)\}$ برای ماتریس‌های ضرایب سیستم دو بعدی (۱) یعنی برای ماتریس‌های A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) و B_l ($l = 1, 2$) به ترتیب تخمین‌های $\hat{A}_k(N)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) و $\hat{B}_l(N)$ ($l = 1, 2$) در نظر گرفته شوند، آنگاه برای ماتریس پارامترهای سیستم (ماتریس θ که در رابطه (۲) تعریف شد) و برای بردار $\Phi(N)$ به ترتیب تخمین‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{\theta}(N) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(N) & \hat{A}_2(N) & \hat{B}_1(N) \\ \hat{A}_3(N) & \hat{A}_4(N) & \hat{B}_2(N) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{\Phi}(N) = \hat{T}(N) \Psi(N) \quad (13)$$

که در آن $\hat{T}(N)$ ماتریسی عین $T(N)$ است با این تفاوت که در تشکیل آن به جای ماتریس‌های $\bar{A}(n)$ ، $\bar{B}(n)$ و $\bar{C}(n)$ به ترتیب ماتریس‌های $\hat{A}_N(n)$ ، $\hat{B}_N(n)$ و $\hat{C}_N(n)$ بکار رفته‌اند ($n = 1, 2, \dots, N$). همچنین $\hat{A}_N(n)$ ، $\hat{B}_N(n)$ و $\hat{C}_N(n)$ به ترتیب دارای همان ساختار داده شده در روابط (۶) و (۷) برای ماتریس‌های $\bar{A}(n)$ ، $\bar{B}(n)$ و $\bar{C}(n)$ هستند ($n = 1, 2, \dots, N$) که در آنها به جای ماتریس‌های A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) و B_l ($l = 1, 2$) به ترتیب $\hat{A}_k(N)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) و $\hat{B}_l(N)$ ($l = 1, 2$) قرار گرفته‌اند.

خطای تخمین بردار $\Phi(N)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$e_{\Phi}(N) = \hat{\Phi}(N) - \Phi(N) \quad (14)$$

تابع شاخص درجه دو $J(N)$ را بر حسب $e_{\Phi}(N)$ چنین در نظر می‌گیریم:

$$J(N) = \frac{1}{2} e_{\Phi}^T(N) e_{\Phi}(N) \quad (15)$$

که در آن T نشان دهنده ترانزپوز (Transpose) است.

برای به دست آوردن بهترین تخمین برای ماتریس‌های ضرایب سیستم دو بعدی (۱) با توجه به اندازه‌گیری‌های داده شده باید ماتریس $\hat{\theta}(N)$ چنان تعیین شود تا شاخص $J(N)$ مینیمم گردد. پس $\hat{\theta}(N)$ را از حل معادله زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{\nabla J(N)}{\nabla \hat{\theta}(N)} = 0 \quad (16)$$

که در آن $\frac{\nabla J(N)}{\nabla \hat{\theta}(N)}$ نشان دهنده گرادیان $J(N)$ نسبت به $\hat{\theta}(N)$ است.

براحتی می‌توان نشان داد که $J(N)$ بر حسب $\hat{\theta}(N)$ چنین است:

دو بعدی است وقتی که برای تخمین پارامترهای سیستم از مدل WAM و روش RLS استفاده می‌شود. البته از آنجا که ماتریس $R(k)$ تعداد q سطر و $k+1$ ستون دارد تحقق این شرط ساده خواهد بود؛ چون تعداد سطرها ثابت و تعداد ستون‌ها رو به افزایش است و این ویژگی جالب به خاطر استفاده از مدل WAM است.

برای اطمینان از اینکه جواب به دست آمده برای $\hat{\theta}(N)$ در (۱۹) موجب مینیم شدن $J(N)$ می‌شود باید $\frac{\nabla^2 J(N)}{\nabla \hat{\theta}^2(N)}$ محاسبه گردد. با استفاده از (۱۷) به دست می‌آید:

$$\frac{\nabla^2 J(N)}{\nabla \hat{\theta}^2(N)} = W(N)W^T(N) \quad (23)$$

اگر ماتریس $W(N)$ رتبه کامل سطر داشته باشد (یعنی $\hat{\theta}(N)$ موجود باشد) آنگاه ماتریس متقارن $W(N)W^T(N)$ مثبت معین خواهد بود؛ پس $\hat{\theta}(N)$ به دست آمده موجب می‌شود شاخص $J(N)$ مینیمم مطلق گردد.

اکنون سعی می‌کنیم تا از (۱۹) یک رابطه بازگشتی برای $\hat{\theta}(N)$ به دست آوریم. برای این منظور ماتریس $Q(N)$ چنین تعریف می‌شود:

$$Q(N) = (W(N)W^T(N))^{-1} \quad (24)$$

با توجه به تعریف $Q(N)$ براحتی می‌توان نشان داد که بین ماتریس‌های $Q^{-1}(N)$ و $Q^{-1}(N+1)$ رابطه زیر وجود دارد:

$$Q^{-1}(N+1) = Q^{-1}(N) + R(N+1)R^T(N+1) \quad (25)$$

که در آن ماتریس $R(N+1)$ طبق (۲۱) محاسبه می‌شود. برای اینکه بتوان از رابطه (۲۵) ماتریس $Q(N+1)$ را به دست آورد، یک اتحاد ماتریسی یادآوری می‌گردد:

$$\text{برای دو ماتریس } A \text{ و } B \text{ به شرط معکوس پذیر بودن } A \text{ داریم:}$$

$$(A + BB^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + B^T A^{-1}B)^{-1} B^T A^{-1} \quad (26)$$

که در آن I ماتریس واحد است.

پس با توجه به اتحاد ماتریسی (۲۶) از رابطه (۲۵) ماتریس $Q(N+1)$ چنین به دست می‌آید:

$$Q(N+1) = Q(N) - Q(N)R(N+1)S(N)R^T(N+1)Q(N) \quad (27)$$

که در آن:

$$S(N) = (I + R^T(N+1)Q(N)R(N+1))^{-1} \quad (28)$$

اکنون با استفاده از روابط (۱۹)، (۲۴) و (۲۷) به محاسبه

نشان داد که داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(N+1) &= \hat{\theta}(N) - \hat{\theta}(N)R(N+1)S(N)R^T(N+1)Q(N) \\ &+ \left(\sum_{l=0}^{N+1} \chi(l, N+1-l)z^T(l, N+1-l) \right) \times \{Q(N) \\ &- Q(N)R(N+1)S(N)R^T(N+1)Q(N)\} \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به تعریف ماتریس $R(N+1)$ براحتی می‌توان نشان داد که داریم:

$$\sum_{l=0}^{N+1} \chi(l, N+1-l)z^T(l, N+1-l) = X(N+1)R^T(N+1) \quad (30)$$

که در آن:

$$X(N+1) = [\chi(0, N+1) \chi(1, N) \chi(2, N-1) \dots \chi(N, 1) \chi(N+1, 0)] \quad (31)$$

بالاخره با استفاده از روابط (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + \{X(N+1) - \hat{\theta}(N)R(N+1)\}G(N) \quad (32)$$

که در آن:

$$G(N) = S(N)R^T(N+1)Q(N) \quad (33)$$

در اینجا حل مسأله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی با استفاده از تکنیک RLS به پایان رسید و الگوریتم (۳۲) به دست آمد. در قسمت بعدی مقاله همگرایی این الگوریتم بررسی می‌شود.

۴- تحلیل همگرایی و تعیین سرعت همگرایی

در این قسمت، همگرایی الگوریتم ارائه شده تجزیه و تحلیل و در مورد سرعت همگرایی آن بحث می‌شود. ماتریس خطای تخمین در مرحله N چنین تعریف می‌شود:

$$\tilde{\theta}(N) = \hat{\theta}(N) - \theta \quad (34)$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های $R(N+1)$ و $X(N+1)$ که به ترتیب در روابط (۲۱) و (۳۱) داده شده‌اند، براحتی می‌توان نشان داد که بین آنها رابطه زیر برقرار است:

$$X(N+1) = \theta R(N+1) \quad (35)$$

با استفاده از (۳۲) و رابطه فوق، دینامیک ماتریس خطای تخمین چنین به دست می‌آید:

$$\tilde{\theta}(N+1) = \tilde{\theta}(N)F(N) \quad (36)$$

که در آن:

$$F(N) = I - R(N+1)G(N) \quad (37)$$

$$\lambda_{\min}(Q^{-1}(N)) \geq \quad (47)$$

$$\lambda_{\min}(Q^{-1}(N-1)) + \lambda_{\min}(R(N)R^T(N))$$

و یا:

$$\lambda_{\min}(Q^{-1}(N)) \geq \lambda_{\min}(Q^{-1}(1)) + \quad (48)$$

$$\sum_{k=2}^N \lambda_{\min}(R(k)R^T(k))$$

از طرفی با توجه به (۲۲) داریم:

$$\sum_{k=2}^N \lambda_{\min}(R(k)R^T(k)) \geq (N-1)\sigma \quad (49)$$

سرانجام از روابط (۴۶) الی (۴۹) نتیجه می‌شود:

$$\text{Trace}\{\tilde{\theta}(N)\tilde{\theta}^T(N)\} \leq \frac{\alpha}{N+\beta} \quad (50)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{V(1)}{\sigma}, \quad \beta = \frac{\lambda_{\min}(Q^{-1}(1))}{\sigma} - 1 \quad (51)$$

رابطه (۵۰) سرعت همگرایی را تعیین می‌کند و بیان می‌دارد که سرعت به سمت صفر رفتن $\text{Trace}\{\tilde{\theta}(N)\tilde{\theta}^T(N)\}$ که نشان دهنده مجموع مربعات خطای تخمین است، سریع‌تر از سرعت میرا شدن تابع هموگرافیک $\frac{\alpha}{N+\beta}$ می‌باشد.

۵- نتایج شبیه‌سازی

به منظور مشاهده عملکرد روش ارائه شده در این مقاله، در این قسمت دو مثال شبیه‌سازی آورده می‌شود.

۵-۱- نتایج شبیه‌سازی یک نمونه کاربردی

برخی فرآیندهای دینامیکی در مکانیک سیالات نظیر پدیده جذب گاز، گرم کردن آب جاری و رطوبت‌گیری از هوا به وسیله معادله دیفرانسیلی به نام معادله Darboux توصیف می‌شوند [۱۹]، این معادله چنین است [۱۹]:

$$\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial l \partial t} = \lambda_1 \frac{\partial y(l,t)}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial y(l,t)}{\partial l} + \lambda_0 y(l,t) + \mu u(l,t) \quad (52)$$

که در آن $0 \leq t$ و $0 \leq l$ به ترتیب متغیرهای مکان و زمان و $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ و μ ضرایبی حقیقی هستند. توابع $u(l,t)$ و $y(l,t)$ هم به ترتیب ورودی و خروجی فرآیند هستند.

در اینجا فرض می‌شود ضرایب چهارگانه فرآیند؛ یعنی اعداد $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ و μ نامعلوم باشند. می‌خواهیم با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله با اندازه‌گیری $u(l,t)$ و $y(l,t)$ این ضرایب را تخمین بزنیم.

متغیرهای l و t به ترتیب با طول گام‌های Δl و Δt

از رابطه (۲۲) مثبت معین بودن ماتریس متقارن $Q^{-1}(N)$ نتیجه می‌شود. بنابراین می‌توان برای تحلیل همگرایی از تابع زیر به عنوان تابع لیاپانوف نامزد استفاده کرد:

$$V(N) = \text{Trace}\{\tilde{\theta}(N)Q^{-1}(N)\tilde{\theta}^T(N)\} \quad (38)$$

که در آن Trace نشان دهنده مجموع عناصر موجود در قطر اصلی ماتریس است.

از (۳۶)، (۳۷)، (۳۸) و با توجه به تعریف ماتریس‌های $S(N)$ ، $G(N)$ و $Q^{-1}(N+1)$ ؛ که در (۲۸)، (۳۲) و (۲۵) نشان داده شده‌اند، با چند عملیات ریاضی رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Delta V(N) &= V(N+1) - V(N) \\ &= -\text{Trace}\{\tilde{\theta}(N)H(N)\tilde{\theta}^T(N)\} \end{aligned} \quad (39)$$

که در $H(N)$ چنین تعریف شده است:

$$H(N) = R(N+1)S(N)R^T(N+1) \quad (40)$$

از (۲۲) (شرط Persistent Excitation) و با توجه به تعریف $H(N)$ در (۲۸)، مثبت معین بودن ماتریس متقارن $H(N)$ نتیجه می‌شود.

بنابراین از (۳۹) داریم:

$$\Delta V(N) \leq 0 \quad (41)$$

و رابطه فوق وقتی تساوی است که $\tilde{\theta}(N) = 0$ باشد.

از (۴۱) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta V(N) = 0 \quad (42)$$

و چونکه $H(N)$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین است

از (۴۲) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(N) = 0 \quad (43)$$

یعنی آلوگوریتیم تخمین ارائه شده همگراست.

برای تعیین سرعت همگرایی از (۴۱) به دست می‌آید:

$$V(N) \leq V(1) \quad ; \quad N = 1, 2, \dots \quad (44)$$

چون $Q^{-1}(N)$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین است نامساوی زیر را داریم [۲۵]:

$$\text{Trace}\{\tilde{\theta}(N)Q^{-1}(N)\tilde{\theta}^T(N)\} \geq \lambda_{\min}(Q^{-1}(N)) \text{Trace}\{\tilde{\theta}(N)\tilde{\theta}^T(N)\} \quad (45)$$

که در آن $\lambda_{\min}(Q^{-1}(N))$ نشان دهنده کوچک‌ترین مقدار ویژه $Q^{-1}(N)$ است.

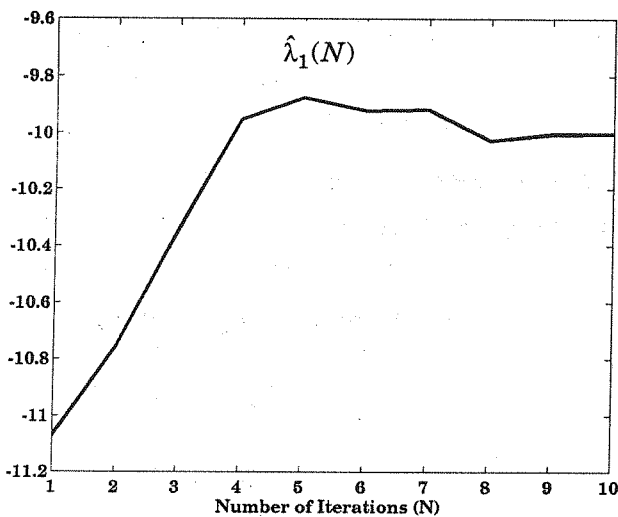
از (۴۴) و (۴۵) نتیجه می‌شود:

$$\text{Trace}\{\tilde{\theta}(N)\tilde{\theta}^T(N)\} \leq \frac{V(1)}{\lambda_{\min}(Q^{-1}(N))} \quad (46)$$

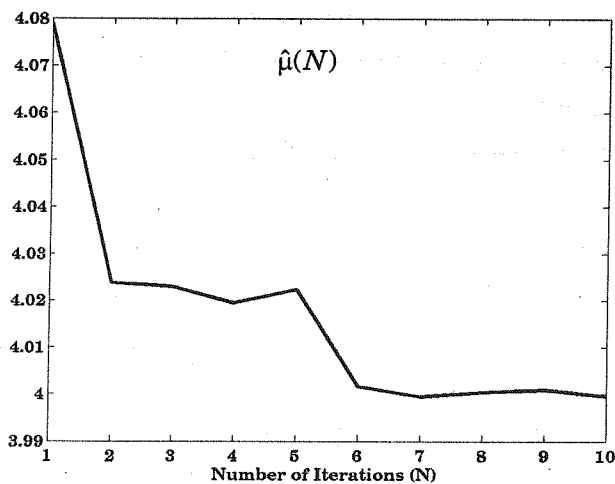
از (۲۵) نامساوی زیر را داریم [۲۵]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = 2, \lambda_1 = -10, \lambda_2 = 5, \mu = 4 \\ u(l, t) = 1; \quad l, t \geq 0 \\ y(l, 0) = 0; \quad l \geq 0 \\ y(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(l, t)}{\partial t} \right|_{l=0} = 0; \quad t \geq 0 \\ \Delta l = 0.01, \Delta t = 0.01 \end{array} \right.$$

روش ارائه شده در این مقاله برای تخمین پارامترهای سیستم فوق بکار گرفته شد. به عنوان نمونه، تخمین‌های به دست آمده برای دو پارامتر سیستم (از بین چهار پارامتر) در شکل‌های (۱) و (۲) نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که تخمین‌ها با سرعت بسیار زیادی به مقادیر واقعی پارامترها همگرا شده‌اند. یادآور می‌شود حدس‌های اولیه از این مقادیر از (۱۹) و با قراردادن $N = 1$ تعیین شده‌اند.



شکل (۱): تخمین به دست آمده برای λ_1



شکل (۲): تخمین به دست آمده برای μ

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial y(l, t)}{\partial t} \right|_{l=i\Delta l, t=j\Delta t} = \frac{y(i\Delta l, (j+1)\Delta t) - y(i\Delta l, j\Delta t)}{\Delta t} \\ \left. \frac{\partial y(l, t)}{\partial l} \right|_{l=i\Delta l, t=j\Delta t} = \frac{y((i+1)\Delta l, j\Delta t) - y(i\Delta l, j\Delta t)}{\Delta l} \\ \left. \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial l \partial t} \right|_{l=i\Delta l, t=j\Delta t} = \frac{1}{\Delta l \Delta t} \{ y((i+1)\Delta l, (j+1)\Delta t) \\ - y((i+1)\Delta l, j\Delta t) - y(i\Delta l, (j+1)\Delta t) + y(i\Delta l, j\Delta t) \} \end{array} \right. \quad (52)$$

توابع $x^h(i, j)$ ، $x^v(i, j)$ و $u(i, j)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^h(i, j) = \frac{y(i\Delta l, (j+1)\Delta t) - y(i\Delta l, j\Delta t)}{\Delta t} - y(i\Delta l, j\Delta t) \\ x^v(i, j) = y(i\Delta l, j\Delta t), \quad u(i, j) = u(i\Delta l, j\Delta t) \end{array} \right. \quad (54)$$

براحتی می‌توان نشان داد که با توجه به (۵۲) و (۵۴) معادله (۵۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left[\begin{array}{c} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right] u(i, j) \quad (55)$$

$$i, j = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن داریم:

$$a_1 = 1 + \lambda_1 \Delta l, \quad a_2 = (\lambda_0 + \lambda_1 \lambda_2) \Delta l, \quad a_3 = \Delta t \quad (56)$$

$$a_4 = 1 + \lambda_2 \Delta t, \quad b_1 = \mu \Delta l, \quad b_2 = 0$$

مشاهده می‌شود که رابطه (۵۵) عین رابطه (۱) است که

در آن داریم:

$$m_1 = m_2 = p = 1 \quad (57)$$

بنابراین می‌توان با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله پارامترهای فرآیند (۵۲) را تخمین زد؛ زیرا با داشتن اندازه‌گیری‌های $u(l, t)$ و $y(l, t)$ (در نقاط $l = i\Delta l$ و در لحظات $t = j\Delta t$) مستقیماً $u(i, j) = u(i\Delta l, j\Delta t)$ و $x^v(i, j) = y(i\Delta l, j\Delta t)$ را خواهیم داشت و از رابطه (۵۴) هم $x^h(i, j)$ قابل محاسبه است.

برای اجرای شبیه‌سازی مقادیر واقعی پارامترهای فرآیند، ورودی و شرایط مرزی آن و طول گام‌های گسسته‌سازی به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

آمده از روش LMS

در اینجا برای مقایسه عملکرد روش ارائه شده در این مقاله با [۲]، همان مثال شبیه‌سازی ارائه شده در [۲] به عنوان دومین مثال در نظر گرفته می‌شود. سیستم دو بعدی مورد نظر در آن مثال؛ که شش پارامتر دارد، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (59)$$

مقادیر واقعی پارامترهای سیستم، ورودی و شرایط مرزی آن به صورت زیر بوده‌اند:

$$a_1 = 0.2, a_2 = 0.8, b_1 = 3 \quad (60)$$

$$a_3 = -0.7, a_4 = 0.5, b_2 = -5$$

$$u(i, j) = \frac{(-1)^{i+j}}{1 + \sin(i+j)}, \quad x^h(0, j) = x^v(i, 0) = 0$$

به منظور ارزیابی عملکرد روش، همانند [۲] از شاخص زیر؛ که نشان دهنده مجموع مربعات خطای تخمین در مرحله N است، استفاده می‌شود:

$$\Lambda(N) = \text{Trace}[\bar{\theta}(N)\bar{\theta}^T(N)] \quad (61)$$

روش ارائه شده در این مقاله برای تخمین پارامترهای سیستم فوق بکار گرفته شد. مقادیر به دست آمده برای $\Lambda(N)$ در جدول (۱) آورده شده است.

جدول (۱): مجموع مربعات خطای تخمین بر حسب N

N	$\Lambda(N)$
1	41.42
2	1.3315×10^{-28}
3	2.2905×10^{-29}
4	4.4135×10^{-30}
5	2.1031×10^{-31}

مشاهده می‌شود که در دومین مرحله ($N=2$) مجموع مربعات خطای تخمین تقریباً صفر شده است؛ یعنی در دومین مرحله مقادیر تخمین‌ها با مقادیر واقعی پارامترها برابر شده‌اند؛ در حالی که در [۲] در هشتمین مرحله ($N=8$) از تخمین چنین اتفاقی افتاده است. پس نتیجه می‌شود که سرعت همگرایی روش ارائه شده در این مقاله نسبت به روش [۲] (روش LMS) بسیار زیادتر است.

۶- نتیجه‌گیری

یکی از شیوه‌های بسیار مؤثر در تخمین پارامترهای سیستم‌های یک بعدی معمولی استفاده از روش RLS است. روش RLS مبتنی بر ترتیب و مرحله است؛ یعنی با داشتن تخمین پارامترها در یک مرحله و با داشتن اندازه‌گیری‌های

جدید از سیگنال‌های مرتبط با سیستم، تخمین پارامترها در مرحله بعدی به دست می‌آید و همین روند به پیش می‌رود تا تخمین‌های به دست آمده برای پارامترها به مقادیر واقعی آنها همگرا شوند؛ اما در سیستم‌های دو بعدی؛ که متغیرهای مستقل سیستم تشکیل یک صفحه می‌دهند؛ ترتیب و مرحله مفهومی ندارد و به همین دلیل روش RLS به طور مستقیم بر روی سیستم‌های دو بعدی قابل اجرا نیست. در این مقاله با استفاده از مدل WAM این مشکل برطرف شد و نشان داده شد که چگونه می‌توان در حل مسائل سیستم‌های دو بعدی با استفاده از مدل WAM از روش‌های یک بعدی سود جست. این مقاله توانست برای اولین بار از روش RLS در تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی استفاده کند.

در مورد مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با روش [۲] در یک جمله می‌توان گفت که عمده تفاوت این دو روش آن است که در این مقاله از روش RLS استفاده شده در حالی که در [۲] مسأله از طریق روش LMS حل شده است. به همین خاطر نکات زیر حائز اهمیت هستند:

الف- در الگوریتم به دست آمده در [۲] مسأله انتخاب شرایط اولیه وجود دارد که در سرعت همگرایی مؤثر است؛ یعنی ممکن است با انتخاب شرایط اولیه نامناسب سرعت همگرایی الگوریتم تخمین بسیار کم شود و این در حالی است که معیار شناخته شده‌ای برای انتخاب شرایط اولیه مناسب و بهینه وجود ندارد؛ ولی در روش پیشنهادی در این مقاله چنین مشکلی وجود نداشته و حدس‌های اولیه از پارامترها از رابطه (۱۹) و به ازای $N=1$ به دست می‌آید.

ب- در روش ارائه شده در [۲] مسأله انتخاب ضریبی به نام طول گام الگوریتم وجود دارد. گرچه حدود این ضریب برای همگرا شدن الگوریتم مشخص شده است؛ اما ملاک معینی برای انتخاب بهینه آن وجود ندارد. در حالی که در روش ارائه شده در این مقاله چنین مسأله‌ای وجود ندارد.

ج- نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های متعدد (که به خاطر محدودیت در تعداد صفحات مقاله تنها دو مورد از آنها در قسمت ۵ آورده شده‌اند) نشان می‌دهند که سرعت همگرایی روش ارائه شده در این مقاله نسبت به روش‌های قبلی (از جمله نسبت به [۲]) بسیار زیادتر است. در قسمت ۴ این موضوع به صورت نظری نیز بررسی شد و ثابت گشت که سرعت همگرایی الگوریتم ارائه شده سریع‌تر از یک تابع هموگرافیک است.

Two-Dimensional Systems", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 49 no 1, p.p. 116-125, 2002.

Fan, H.; Wen, C.; "Adaptive Control of a Class of 2-D Discrete Systems", IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications vol. 50 p.p. 166-172, 2003

Fan, H.; Wen, C.; Xu, L.; Suda, H.; Anazawa, Y.; "Robust Adaptive Control of a Class of 2-D Discrete Systems in the Presence of Disturbances", Proceedings of the 47th Midwest Symposium on Circuits and Systems, vol. 2, p.p. II553-II556, 2004.

Yang, R.; Xie, L.; Zhang, C.; " H_2 and Mixed H_2/H_∞ Control of Two-Dimensional Systems in Roesser Model", Automatica, vol. 42 p.p. 1507-1514, 2006

Dhawan, A.; Kar, H.; "LMI-Based Criterion for the Robust Guaranteed Cost Control of 2-D Systems Described by the Fornasini-Marchesini Second Model", Signal Processing, vol. 87, p.p. 479-488, 2007.

Madady, A.; Shafiee, M.; "Two-Dimensional Adaptive Parameters Estimation", Proceedings of the European Control Conference (ECC-2003), paper no. 110, University of Cambridge, UK, 1-4 September 2003.

Fan, H.; Wen, C.; "Two-Dimensional Adaptive Filtering Based on Projection Algorithm", IEEE Trans. on Signal Processing vol. 52, p.p. 832-838, 2004.

Heath, W. P.; Wellsted, P. E.; "Self-Tuning Prediction and Control for Two-Dimensional Processes -part 2: Parameter Estimation, Set-Point Tracking and Offset Handling", International Journal of Control, vol. 62, p.p. 239-269, 1995.

Glentis, G. O.; "An Efficient Affine Projection Algorithm for 2-D FIR Adaptive Filtering and Linear Prediction", Signal Processing, vol. 86 p.p. 98-116, 2006.

Bernstein, D. S.; *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*, Princeton University Press, ISBN: 0691118027, 2005.

[۱] مددی، علی؛ شفیعی، مسعود؛ "تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی"، مجله بین‌المللی علوم مهندسی (دانشگاه علم و صنعت ایران)، ج ۱۲، ش ۴، ص ۲۲۱ تا ۲۴۴، ۱۳۸۰

[۲] مددی، علی؛ شفیعی، مسعود؛ "تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی با استفاده از مدل یک بعدی WAM"، مجله علمی و پژوهشی امیر کبیر، ش ۵۱، ص ۲۳۹ تا ۲۵۲، ۱۳۸۱

[۳] Roesser, R. P.; "A Discrete State- Space Model for Linear Image Processing", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 20 p.p. 1-10, 1975

[۴] Bose, N. K.; *Applied Multidimensional Systems Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1982.

[۵] Mitra, S. K.; Michael, P. E.; *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Marcel Dekker, New York, 1992

[۶] Li, X.-D.; Ho, J. K. L.; Chow, T. W. S.; "Iterative Learning Control for Linear Time-Variant Discrete Systems Based on 2-D System Theory", IEE Proceedings: Control Theory and Applications, vol. 152, no 1, p.p. 1318 2005

[۷] Gakowski, K.; "State-Space Realization of MIMO Discrete Linear Systems-Elementary Operation and Variable Inversion Approach", International Journal of Control, vol. 73 no 3, p.p. 242-253, 2000.

[۸] Bistritz, Y.; "Testing Stability of 2-D Discrete Systems by a Set of Real 1-D Stability Tests", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 51 no. 7, p.p. 1312-1320 2004

[۹] Leonov, G. A.; "Necessary and Sufficient Conditions for the Absolute Stability of Two-Dimensional Time-Varying Systems", Automation and Remote Control, vol. 66 no 7, p.p. 1059 - 1068, 2005

[۱۰] Ebihara, Y.; Ito, Y.; Hagiwara, T.; "Exact Stability Analysis of 2-D Systems Using LMIs", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51, no. 9, p.p. 1509-1513 2006.

[۱۱] Fua, P.; Chena, J.; Niculescub, S. I.; "Generalized Eigenvalue-Based Stability Tests for 2-D Linear Systems: Necessary and Sufficient Conditions", Automatica, vol. 42, p.p. 1569-1576, 2006

[۱۲] Lam, J.; Xu, S.; "Robust Output Feedback Stabilization for Two-Dimensional Continuous Systems in Roesser Form", Applied Mathematics Letters, vol. 17, no 11 p.p. 1331-1341, 2004

[۱۳] Santarelli, K. R.; Megretski, A.; "On the Stabilizability of Two-Dimensional Linear Systems via Switched Output Feedback", Proceedings of the 2005 American Control Conference, vol. 6, p.p. 3778-3783, 2005

[۱۴] Klamka, J.; "Controllability of Linear 2-D Systems", Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS), vol. 3, p.p. 935-938, Dubrovnik Croatia, 2002.

[۱۵] Wood, J.; Oberst, U.; Rogers, E.; Owens, D. H.; "A Behavioral Approach to the Pole Structure of One-Dimensional and Multi-Dimensional Linear Systems", SIAM Journal of Control and Optimization, vol. 38 p.p. 627-661, 2000.

[۱۶] Tsai, J. S. H.; Li, J. S.; Shieh, L. S.; "Discretized Quadratic Optimal Control for Continuous-Time

۸- زیر نویس‌ها

- ¹ Least Mean Square
- ² Recursive Least Square
- ³ Wave Advanced Model

-
- ^ Least Mean Square
 - ^ Recursive Least Square
 - ^ Wave Advanced Model