

# ارائه یک روش بهینه وارانتی برای محصولات با $N$ مرحله کاری ( $N \geq 1$ ) در حالت دو بعدی

مسعود ربانی<sup>i</sup>؛ ندا معنوی زاده<sup>ii</sup>؛ سید حمید میرمحمدی<sup>iii</sup>

## چکیده

در این مقاله به منظور کمینه کردن متوسط هزینه‌های وارانتی یک قطعه، روشی توسعه یافته ارائه می‌شود. در این روش برای تعمیر یا تعویض قطعاتی که با شکست مواجه می‌شوند، تصمیم گیری شده است. عملکرد این قطعات از چندین مرحله تشکیل شده و ممکن است در هر مرحله با شکست مواجه شوند. در حالتی که قطعات دارای سرویس وارانتی یک بعدی (بعد زمان) و غیر قابل تجدید می‌باشند، برای به حداقل رساندن هزینه‌های وارانتی روش‌هایی ارائه شده است. در اینجا نیز همان موضوع برای قطعاتی که سرویس وارانتی دو بعدی (بعد زمان و بعد کارکرد) دارند، مطرح شده است. روش به کار گرفته شده در تصمیم گیری برای تعمیر یا تعویض قطعه به دو پارامتر بستگی دارد. یکی از آن دو میزان افت عملکرد قطعه در لحظه شکست و دیگری مقدار کارکرد باقیمانده از پریود وارانتی می‌باشد. تعیین مقدار بهینه این دو پارامتر برای به حداقل رساندن متوسط هزینه‌های وارانتی، به دو روش تحلیلی و شبیه سازی انجام می‌شود. سپس با استفاده از حل مسائل تصادفی اعتبار هر یک از روش‌ها بررسی می‌گردد.

## کلمات کلیدی

وارانتی، شکست، تعمیر، تعویض

## A New Two-Dimensional Optional Warranty Policy for Products With $N$ Processing Stages ( $N \geq 1$ )

M. Rabbani ; N. Manavizadeh; S.H. Mirmohammadi

### ABSTRACT

In this paper, a method is developed to minimize the expected warranty servicing cost per item sold. In this method, to be decided to repair or replace a failed item. These kinds of items work in multi-state deteriorating and they may fail in every state. The last decades some researches for minimizing the expected warranty servicing cost under one-dimensional (Time) and nonrenewable warranty policy have been published. But here, the warranty policy has two-dimensions (Time & Usage). The decision to repair or replace a failed item depends on two parameters, the deterioration degree of the item and the length of the residual warranty period. The optimality of these two parameters for minimizing the expected warranty servicing cost are examined by two methods, analytically and simulation. Then an offered algorithm is used as an approximating method for performing the warranty policy.

### KEYWORDS:

Warranty, Fail, Repair, Replace

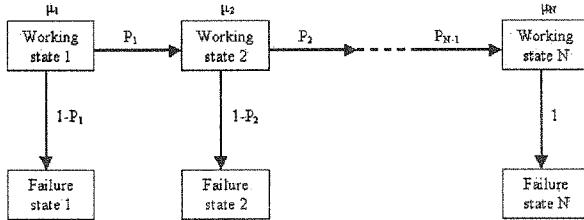
<sup>i</sup>دانشیار دانشکده فنی دانشگاه تهران؛ صندوق پستی ۱۱۶۳۶۵-۴۵۴۲؛ [mrabani@ut.ac.ir](mailto:mrabani@ut.ac.ir)

<sup>ii</sup>کارشناس ارشد مهندسی صنایع

<sup>iii</sup>کارشناس ارشد مهندسی صنایع

## - مقدمه

متوسط هزینه وارانتی در طول پریود ثابت زمانی  $T$ , توانستند برای به حداقل رساندن هزینه وارانتی، سیاست تعمیر - تعویض مناسبی ارائه دهند. نحوه عملکرد قطعه طی  $N$  مرحله کاری در شکل (۱) نشان داده شده است. در این مقاله، مدل ارائه شده در شکل (۱)، در حالت دو بعدی بررسی می‌گردد. مدت زمان پریود وارانتی ( $T$ ) و میزان کارکرد پریود وارانتی ( $U$ ), دو بعد مدل را تشکیل می‌دهند. هدف تعیین سیاست تعمیر - تعویض بهینه، برای کمینه کردن هزینه‌های وارانتی می‌باشد.



شکل (۱): نحوه عملکرد قطعه طی  $N$  مرحله کاری

## ۲- نمادها

$N$ : تعداد حالت‌های کاری = تعداد حالت‌های شکست.

$T$ : مدت زمان پریود وارانتی.

$U$ : میزان کارکرد پریود وارانتی.

$k$ : متغیر تصمیم گیری تعداد حالت‌های شکست ( $1 \leq k \leq N-1$ ).

$\theta$ : متغیر تصمیم گیری میزان کارکرد پریود وارانتی ( $0 \leq \theta \leq U$ ).

$c_{Ti}$ : هزینه تعمیر قطعه هنگامی که شکست در مرحله  $i$  ام قرار دارد ( $i=1,2,\dots,N$ ).

$c_{mi}$ : هزینه تعویض قطعه هنگامی که در مرحله  $i$  ام قرار دارد ( $i=1,2,\dots,N$ ).

$\pi_i$ : نرخ تابع توزیع نمایی کارکرد قطعه در حالت  $i$  ام ( $i=1,2,\dots,N$ ).

$p_i$ : احتمال تغییر وضعیت قطعه به حالت کاری  $i+1$  هنگامی که در پایان حالت کاری  $i$  ام است ( $i=1,2,\dots,N$ ).

$p_{i-1}$ : احتمال تغییر وضعیت قطعه به حالت شکست  $i$  هنگامی که در پایان حالت کاری  $i$  ام است ( $i=1,2,\dots,N$ ).

$y_i$ : میزان استفاده مشتری از قطعه در مدت زمان  $i$ .

$Z$ : پریود وارانتی قطعه بر حسب کارکرد قطعه:  $Z = \min\{U, y_i\}$

$u$ : کارکرد باقیمانده از پریود وارانتی، در هنگام شکست قطعه (میزان کارکرد قطعه تا لحظه شکست آن) -  $Z$ .

وارانتی، قراردادی است به مدت معلوم که بین سازنده و خریدار یک محصول (قطعه) منعقد می‌شود. سازنده برای محصولات فروخته شده‌ای که دچار عیب می‌شوند، تعهد می‌کند تا نسبت به تعمیر یا تعویض آنها اقدام نماید [۱]. وارانتی در قالب سیاست‌های گوناگون تعویض انجام می‌شود [۲]. یک مسئله مهم در انتخاب و اجرای سیاست وارانتی، مقدار هزینه صرف شده توسط سازنده است. به این ترتیب سازنده برای به حداقل رساندن هزینه‌های وارانتی محصول می‌تواند سیاست مناسبی را اتخاذ نماید. تعیین این سیاست به خصوصیات محصول و شرایط مصرف آن بستگی دارد.

نگوین و مورتی (۱۹۸۴) [۳] مدلی برای محاسبه متوسط هزینه وارانتی و واریانس آن ارائه دادند که در آن تابع توزیع زمان طول عمر قطعه مشخص بود و هزینه تعمیر، تابعی از طول عمر قطعه در نظر گرفته شده بود. آنها در مقاله‌ای دیگر (۱۹۸۶) [۴] مدلی را بررسی کردند که از سیاست تعویض آزاد با پریود ثابت  $T$ ، استفاده می‌کند. در آن مدل سازنده می‌توانست در خصوص تعویض قطعه معیوب با یک قطعه نو یا قطعه‌ای که قبلاً تعمیر شده، تصمیم گیری نماید. همچنین آنها در مقاله‌ای دیگر (۱۹۸۹) [۵] مدلی را بررسی کردند که سیاست تعویض آزاد با پریود زمانی ثابت  $T$  و پریود زمانی قابل تجدید  $W$  را در نظر می‌گیرد. رائو (۱۹۹۵) [۶] الگوریتمی تحت سیاست تعویض آزاد برای محاسبه هزینه وارانتی ارائه داد. در آن الگوریتم تابع توزیع طول عمر قطعه بصورت فازی بیان شده بود. یون (۱۹۹۵) [۷] تحت یک سیاست ترکیبی، معادله‌ای برای محاسبه متوسط هزینه وارانتی و واریانس آن ارائه داد. در آن معادله، طول عمر قطعه بر حسب تابع توزیع واپیل بیان شده بود. چان و تانگ (۱۹۹۵) [۸] با فرض ثابت بودن نرخ شکست و هزینه تعمیر قطعه، مقدار هزینه وارانتی را برای سیاست تعویض آزاد تخمین زدند.

در تمام این مقالات، وضعیت قطعه تنها در دو حالت کاری و شکست در نظر گرفته شده و در هیچیک افت عملکرد قطعه در طول زمان دیده نشده است. درمن، لیرمن و راس (۱۹۷۸) [۹] مسئله تعویض بهینه مجموعه‌ای از قطعات را مطالعه کردند که در آن  $N$  نوع تعویض با قیمت‌های متفاوت وجود داشت. همچنین قطعات دارای توابع توزیع نمایی، با نرخهای شکست متفاوت بودند. زوو، لیو و مورتی (۲۰۰۰) [۱۰] برای آن دسته از قطعاتی که در طول زمان دچار افت عملکرد می‌شوند، مدلی ارائه دادند که دارای  $N$  مرحله کاری بود. قطعات در هر یک از مراحل کاری دارای تابع توزیع نمایی بودند. آنها با تخمین



۱-۵  $y_t$  دارای قابع توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda/T$  باشد.

$$f(y_T) = \lambda/T e^{(-\lambda T)y_T} \quad (4)$$

$$P(y_T > U) = e^{(-\lambda T)U} \quad (5)$$

$$P(y_T < \theta) = 1 - e^{(-\lambda T)\theta} \quad (6)$$

$$P(\theta < y_T < U) = e^{(-\lambda T)\theta} - e^{(-\lambda T)U} \quad (7)$$

$$F(y_T | y_T < \theta) = (1 - e^{(-\lambda T)y_T}) / (1 - e^{(-\lambda T)\theta}) \quad (8)$$

آنگاه:

$$f(y_T | y_T < \theta) = (\lambda T e^{(-\lambda T)y_T}) / (1 - e^{(-\lambda T)\theta}) \quad (9)$$

$$F(y_T | \theta < y_T < U) = (1 - e^{(-\lambda T)y_T}) / (e^{(-\lambda T)\theta} - e^{(-\lambda T)U}) \quad (10)$$

آنگاه:

$$f(y_T | \theta < y_T < U) = (\lambda T e^{(-\lambda T)y_T}) / (e^{(-\lambda T)\theta} - e^{(-\lambda T)U}) \quad (11)$$

با استفاده از مرجع [۱۰]، روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} CW_1 &= [c_1(1-p_1)\mu_1[\mu_2(U-\theta)+(p_1\mu_1(1-e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(U-\theta)})) \\ &\quad /(\mu_2+p_1\mu_1)+(1-e^{-p_1\mu_1\theta})(\mu_2+p_1\mu_1e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(U-\theta)}) \\ &\quad /p_1\mu_1](\mu_2+p_1\mu_1)+c_2\mu_2[(\mu_2+p_1\mu_1)\theta-(1-e^{-p_1\mu_1\theta}) \\ &\quad (\mu_2+p_1\mu_1/p_1\mu_1)/(\mu_2+p_1\mu_1)+cm_2\mu_1\mu_2(U-\theta- \\ &\quad (1-e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(U-\theta)})) /(\mu_2+p_1\mu_1))] \\ &\quad (\mu_2+p_1\mu_1)] \end{aligned} \quad (12)$$

طبق (۹):

$$CW_2 = \int_{y_T=\theta}^{\theta} [(\lambda T \cdot e^{(-\lambda T)y_T}) / (1 - e^{(-\lambda T)\theta})] [c_2\mu_2 y_T + \quad (13)$$

$$[c_1(1-p_1)-c_2\mu_2/\mu_1](1-e^{-p_1\mu_1 y_T}) / p_1] \cdot dy_T \quad \text{طبق (۱۱)}$$

$$\begin{aligned} CW_3 &= \int_{y_T=\theta}^U [(\lambda T \cdot e^{(-\lambda T)y_T}) / (e^{(-\lambda T)\theta} - e^{(-\lambda T)U})] \\ &\quad [c_1(1-p_1)\mu_1[\mu_2(y_T-\theta)+(p_1\mu_1(1-e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(y_T-\theta)})) \\ &\quad /(\mu_2+p_1\mu_1)+(1-e^{-p_1\mu_1\theta})(\mu_2+p_1\mu_1e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(y_T-\theta)}) \\ &\quad /p_1\mu_1](\mu_2+p_1\mu_1)+c_2\mu_2[(\mu_2+p_1\mu_1)\theta-(1-e^{-p_1\mu_1\theta}) \\ &\quad (\mu_2+p_1\mu_1e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(y_T-\theta)}) / p_1\mu_1]/(\mu_2+p_1\mu_1)+ \\ &\quad cm_2\mu_1\mu_2(y_T-\theta-(1-e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(y_T-\theta)})) \\ &\quad /(\mu_2+p_1\mu_1)\mu_2(y_T-\theta-(1-e^{-(\mu_2+p_1\mu_1)(y_T-\theta)}))] dy_T \end{aligned} \quad (14)$$

CW : متوسط هزینه سرویس وارانتی برای هر قطعه.

CW<sub>1</sub> : متوسط هزینه سرویس وارانتی، اگر  $U > y_T$ .

CW<sub>2</sub> : متوسط هزینه سرویس وارانتی، اگر  $0 < y_T < U$ .

CW<sub>3</sub> : متوسط هزینه سرویس وارانتی، اگر  $U < y_T < 0$ .

### ۳- فرضیات

فرض ۱-۳ نشان می‌دهد که با افزایش افت عملکرد قطعه، میل قطعه برای شکست بیشتر می‌شود.

$$(1-p_1)\mu_1 < (1-p_2)\mu_2 < \dots < (1-p_{N-1})\mu_{N-1} < \mu_N \quad (1)$$

فرضهای ۲ و ۳ نشان می‌دهند که با افزایش افت عملکرد قطعه، هزینه‌های تعویض و تعمیر آن افزایش می‌یابند.

$$cm_1 \leq cm_2 \leq \dots \leq cm_n \quad (2)$$

$$cr_1 < cr_2 < \dots < cr_N \quad (3)$$

### ۴- سیاست وارانتی تعویض آزاد چند مرحله‌ای، در

#### حالت دوبعدی و غیر قابل تجدید

این سیاست وارانتی برای قطعه‌ی که با شکست مواجه شده است، در صورت تحقق دو شرط زیر قابل اجرا خواهد بود.

(الف) مقدار استفاده‌ای که از قطعه شده است، کمتر از  $U$  باشد.

(ب) مدت زمانی که از ابتدای وارانتی سپری شده است، کمتر از  $T$  باشد.

در صورتیکه حداقل یکی از دو شرط (الف) یا (ب) برقرار نباشد، به معنی پایان پریود وارانتی خواهد بود؛ در غیر اینصورت، سازنده باید قطعه را تعمیر یا تعویض کند. سیاست تعمیر – تعویض برای به حداقل رساندن هزینه‌های وارانتی، به شکل زیر تعریف می‌شود:

- اگر قطعه در حالت شکست  $\theta$  باشد، آنگاه در صورتی تعویض خواهد شد که  $i \leq k+1$  و  $0 \leq u \leq N$  باشد؛ در غیر اینصورت تعمیر خواهد شد.

به این ترتیب مسئله، تعیین مقدار بهینه  $k$  و  $\theta$  برای به حداقل رساندن CW است.

### ۵- حل مسئله در حالت ۲

چنانچه عملکرد قطعه در دو حالت کاری و دو حالت شکست باشد، طبق سیاست ارائه شده در بخش ۴،  $k$  برابر یک می‌باشد. پس کافی است تنها مقدار  $\theta$  بهینه محاسبه شود. با توجه به تعریف تابع توزیع  $y_t$ ، مقادیر CW متفاوت خواهد بود.



مقدار داشته باشد. در این حالت برای تعیین  $k$  و  $\beta$  بهینه روش تحلیلی وجود ندارد. همانطور که در بخش قبلی مشخص شد، روش شبیه سازی تقریب خوبی از مقدار بهینه، در ابعاد بزرگ مسئله می باشد و می توان با استفاده از این روش (شکل ۲) به ازای تمام ترکیبات حاصل از  $k$  و  $\beta$ ، مقدار CW را محاسبه نمود. سپس با توجه به حداقل مقدار CW، مقادیر  $k$  و  $\beta$  بهینه تعیین می شوند.

استفاده از روش شبیه سازی این امکان را می دهد تا بتوان بعضی از فرضیات در نظر گرفته شده برای مسئله را حذف نمود. به عنوان مثال می توان هر نوعتابع توزیع دلخواهی جهت مقدار کارکرد قطعه در حالت  $\alpha$  و مصرف مشتری در طول زمان، در نظر گرفت. با همین روش می توان با تغییر مدل شبیه سازی، کارایی الگوریتم فوق را برای سایر توابع توزیع  $y$ ، به دست آورد.

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله برای قطعاتی که دارای  $N$  مرحله کاری و مرحله شکست بودند، یک سیاست وارانتی ارائه شد. در این سیاست بمنظور به حداقل رساندن هزینه های وارانتی، روشی برای تصمیم گیری در خصوص تعویض یا تعمیر قطعه در هنگام شکست تعیین شد. روش بکارگرفته شده، توسعه ای از روش زوو، لیو و مورتی ( $2000$ ) [۱۰] بود، با این تفاوت که سیاست وارانتی را در حالت دو بعدی بررسی می کرد. در این روش در حالت  $N=2$ ، متغیرهای تصمیم گیری مسئله ( $\beta^*, k^*$ ) با استفاده از روش تحلیلی مشخص شدند. همچنین مشخص شد که در این حالت روش تحلیلی با تفاوت اندکی نسبت به روش تحلیلی ترجیح دارد و روش شبیه سازی می تواند در ابعاد بزرگ مسئله، تقریب بسیار خوبی از مقدار بهینه جواب ها باشد. با این حال مدل ارائه شده در این مقاله قابل توسعه خواهد بود. در زیر به بخش هایی که هنوز می توان مطالعات بیشتری در مورد آنها انجام داد، اشاره شده است.

۱- تعیین  $\beta^*$  در حالت  $N=2$  برای سایر توابع توزیع  $y$   
۲- تغییر افت عملکرد قطعه از حالت گسته به حالت پیوسته و ارائه راه حل تحلیلی و تغییر مدل شبیه سازی برای حالت پیوسته.

۳- تغییر مدل شبیه سازی برای حالت هایی که قطعه پس از کار در حالت زام به حالت  $\alpha$  برود،  
بطوریکه:  $N = j+2, \dots, j+1$

۴- استفاده از سایر سیاست های سرویس وارانتی برای قطعاتی که در طول زمان دارای افت عملکرد

باید آن را با یک روش حل دیگر مسائله مقایسه کرد. از آنجا که در بین روش های مختلف، روش شبیه سازی و نرم افزار های مربوط به آن از کارایی قابل توجهی برخوردارند، این روش برگزیده شده است. برای این منظور از نرم افزار Visual Slam Pentium IV 2.8 GHz محاسبات بروی کامپیوتر CPU و 512MB RAM انجام شده است.

## ۶- الگوریتم شبیه سازی

در این الگوریتم به ازای مقدار مشخصی از  $k$ ، مسئله یک بار شبیه سازی می شود. به ازای هر بار شبیه سازی مقادیر مختلف  $\beta$  به مدل داده می شود و مقدار CW محاسبه می شود. از آنجا که  $\beta$  کمیتی پیوسته در بازه  $[0, U]$  می باشد، این بازه به  $h$  (عدد صحیح و مثبت) بخش مساوی تقسیم و  $\beta$  به صورت  $\beta = \frac{U}{h}, j=1, 2, \dots, h$  محاسبه می شود. هر چه مقدار شبیه سازی بکار رفته در شکل (۲) ارائه شده است.

## ۷- مقایسه روش ها

به منظور مقایسه دو روش تحلیلی و روش شبیه سازی ۱۰ مسئله در حالت دو مرحله ای ( $N=2$ )، از توزیع های مختلف عمر قطعه ( $y$ ) به صورت تصادفی تولید کرده و با دو روش شبیه سازی و روش تحلیلی حل می کنیم. مقادیر پارامترهای مختلف مسائل، به جز  $N$ ، به صورت تصادفی، توسط نرم افزار تهیه شده، از بازه های جدول (۱) به صورت یکنواخت ایجاد شده است. هر یک از مسائلی که به طریق فوق ایجاد می شود به ازاء ۶ توزیع مختلف از عمر قطعه، که در جدول (۲) آمده است، حل می شود. مقدار میانگین ۱۰ مسئله تصادفی ایجاد شده، در جدول (۲) خلاصه شده است.

لذا نتایج حاصل از حل ۶۰ مسئله به دو روش شبیه سازی و تحلیلی در جدول (۲) خلاصه شده است. بر اساس اطلاعات جدول (۲) می توان نتیجه گرفت که روش تحلیلی در حالت  $N=2$  به طور کلی نسبت به روش شبیه سازی از کارایی بهتری برخوردار می باشد و می تواند جواب های بهتری بدست دهد. همچنین تفاوت ناچیز بین جواب های حاصل از دو روش نشان می دهد که در ابعاد بزرگ مسئله،  $\beta >> 2$  که حل مسئله به روش تحلیلی پیچیده و مشکل می شود، می توان از روش شبیه سازی به عنوان تقریب بسیار مناسبی از حل بهینه استفاده نمود.

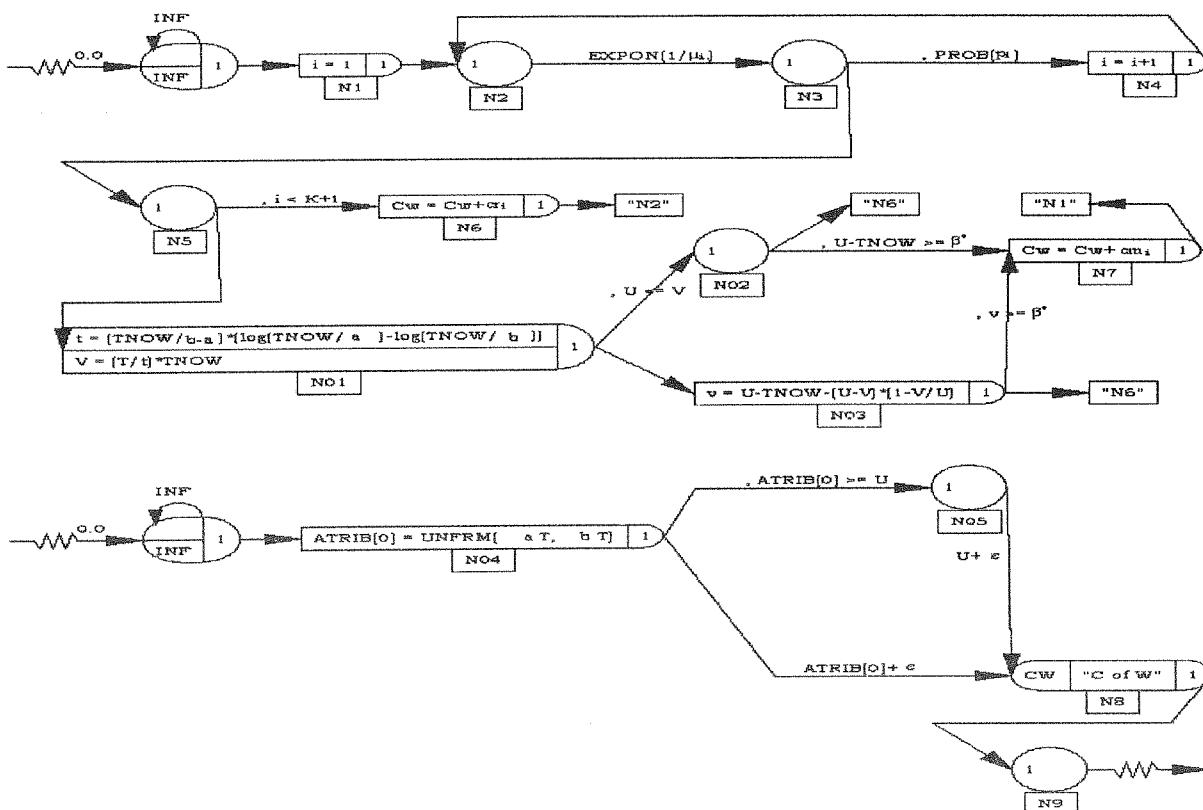
## ۷- حل مسئله در حالت $N \geq 3$

در حالت کلی که  $N \geq 3$  می باشد،  $k$  می تواند بیش از یک

اجرای سیاست وارانسی ارائه شده.

تصویرت گستته یا پیوسته دارد.

- حذف فرض مستقل بودن هزینه‌های تعمیر و تعویض، نسبت به مدت زمان عمر قطعه.
- ارائه الگوریتم‌های اجرایی با کارائی بیشتر در



شکل (۲): ساختار مدل شبیه سازی

جدول (۱): بازه های تغییر پارامترهای مسائل

پارامتر مربوطه	$p_1$	$\mu_1$	$\mu_2$	$cr_1$	$cr_2$	$cm_1$	$cm_2$	T
بازه تغییر	[0,1]	[0,1]	[0,3]	[20,100]	[ $cr_1, 2cr_1$ ]	[100,300]	[ $cm_1, 2cm_1$ ]	[1,5]

جدول (۲): نتایج مقایسه ای مسائل حل شده با روش های شبیه سازی و تحلیلی

yt	روش تحلیلی		روش شبیه سازی	
	$E(\beta^*)$	$E(CW^*)$	$E(\beta^*)$	$E(CW^*)$
Uniform[0.5T, 2T]	1.40	152.44	1.52	155
Uniform[0.5T, 3T]	1.90	20.585	1.96	212
Uniform[2T, 3T]	0.7	285.47	0.7	285
Exp[0.5T, 2T]	2.21	45.95	2.1	51
Exp[0.5T, 2T]	1.84	162.88	1.85	181
Exp[0.5T, 2T]	0.89	254.15	0.92	259

- [۱] Murthy, D.N.P., Blischke, W.R., "Warranty management I: A taxonomy for warranty policies", European Journal of Operational Research. Vol. 62 pp 127-148, 1992.
- [۲] Murthy, D.N.P., Blischke, W.R., "Warranty management III: A review of mathematical models", European Journal of Operational Research. Vol. 62 pp 1-34 1992.
- [۳] Neguyen, D.G., Murthy, D.N.P., "A general model for estimating warranty costs for repairable item", IIE Trans. Vol. 16, pp 379-386, 1984.
- [۴] Neguyen, D.G., Murthy, D.N.P., "An optimal policy for servicing warranty", Journal of Operational Research Society. Vol. 11, pp 1084 1088, 1986.
- [۵] Neguyen, D.G., Murthy, D.N.P., "Optimal replace-repair strategy for servicing items sold under warranty", European Journal of Operational Research. Vol. 39 pp 206-212, 1989.
- [۶] Rao, B.M., "Algorithms for the free replacement warranty with phase-type lifetime distributions", IIE Trans. Vol. 27 pp 348-357, 1995
- [۷] Bohoris, G.A., Yun, W., "Warranty costs for repairable products under hybrid warranty", IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry. Vol. 6, pp. 13-24 1995
- [۸] Chun, Y.H., Tang, K., "Determining the optimal warranty price based on the producer's and customer's risk preferences", European Journal of Operational Research. Vol. 85, pp 97 110, 1995
- [۹] Derman, C., Lieberman, G.J., Ross, S.M., "A renewal decision problem", Management Science. Vol. 24 pp 554-561, 1978
- [۱۰] Zuo, M.J., Lio, B., Murthy, D.N.P., "Replacement-repair policy for multi-state deteriorating products under warranty", European Journal of Operational Research. Vol. 123, pp 519-530, 2000.
- [۱۱] Chun, Y.H., "Determining the optimal warranty policy for deteriorating products". Production research .Vol. 77 pp. 123-139,2005.