

استفاده از اتلاف مصنوعی جهت بهبود روش TVD در جریان ماوراءصوت

محمد مهدی رشیدیⁱ؛ وحید اصفهانیانⁱⁱ

چکیده

در این تحقیق جریان تقارن محوری، دائم و لزج در رژیم ماوراءصوت با استفاده از معادلات TLNS و روش TVD حول مخروط سرپخ شبیه‌سازی شده است. در روش TVD از تابع آنترופی جهت اعمال اتلاف مصنوعی استفاده شده است. استفاده از شرط آنترופی "بی" برای اتلاف مصنوعی در سرعت‌های پایین دارای دقت و همگرایی مناسب می‌باشد ولی در جریان‌های ماوراءصوت در بعضی از موارد دقت و کارایی آن کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکلات شرط آنترופی جدیدی جهت افزایش دقت، کارایی و نرخ همگرایی روش TVD ارائه شده است. به منظور تأیید صحت محاسبات، نتایج به دست آمده با روش عددی دقیق (برازش شوک) مقایسه شده است.

کلمات کلیدی

معادلات TLNS ، TVD ، اتلاف مصنوعی، لزج

Using Artificial Viscosity for Improvement TVD Method in the Hypersonic Flow

M. M. Rashidi.; V. Esfahanian

ABSTRACT

In this paper, the TVD method is applied to the numerical solution of the flow over axisymmetric steady hypersonic viscous flow using TLNS equations over blunt cone. In the TVD schemes, the artificial viscosity is implemented using entropy condition. For hypersonic flow, Yee entropy condition has better stability and convergence rate. This paper presents a new entropy condition for increasing the accuracy and convergence rate of the TVD scheme which does not have the difficulty associated with Yee entropy condition for viscous flow in the hypersonic regime. The numerical solution has been compared with the Beam & Warming shock fitting approach which shows that this approach has better convergence rate and accuracy.

KEYWORDS

TLNS Equations, TVD, Artificial Viscosity, Viscous HYPERSONIC FLOW

نرخ گرمایش از دماغه سرپخ استفاده می‌کنند. از مشخصات

۱- مقدمه

مهم جریان در اطراف این هندسه می‌توان به شوک کمائی قوی

یکی از مباحث مهم آیرودینامیک مربوط به وسایل پرنده با

منفصل و لایه شوک نازک با ناحیه مادون صوت در قسمت جلو سرعت مافوق صوت می‌باشد، وسایل فوق به دلیل ملاحظات

اشاره کرد. در جریان ماوراءصوت مرتبه ضخامت لایه مرزی

ⁱ استادیار، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، Email: mm_rashidi@yahoo.com

ⁱⁱ دانشیار، دانشگاه تهران، دانشکده فنی، گروه مهندسی مکانیک

به صورت زیر است:

$$\frac{\delta^*}{x} \propto \frac{M_\infty^2}{\sqrt{Re}} \quad (1)$$

بنابراین ضخامت لایه مرزی در جریان ماوراءصوت بیش از ضخامت لایه مرزی در جریان‌های سرعت پایین (با همان عدد رینولدز) می‌باشد. با توجه به این موضوع دقت روش حل عددی در ناحیه لایه مرزی بسیار حائز اهمیت است.

استفاده از اتلاف عددی مصنوعی شیوه عمومی برای پایدار کردن حل عددی است و برای فیلتر کردن مؤلفه‌های خطا دارای فرکانس بالا و تسخیر شوک مورد نیاز می‌باشد [۱]. از سوی دیگر استفاده از اتلاف عددی مصنوعی دقت حل را کاهش می‌دهد، این نقیصه در جریان‌های لزج محسوس‌تر است، زیرا موجب ایجاد لزجت ناخواسته شده و پروفیل‌های لایه مرزی را کم‌دقت می‌کند [۲].

پارامتر دیگری که در حل عددی حائز اهمیت است نُرُم خطا می‌باشد. روش عددی مطلوب، روشی است که بتواند تا دقت ماشین قابلیت همگرایی داشته باشد. مشاهده شده‌است که در بعضی از حالت‌ها رسیدن به دقت ماشین امکان‌پذیر نیست، یکی از علل این موضوع کافی نبودن اتلاف عددی می‌باشد، در این موارد برای رسیدن به جواب حالت دائم باید اتلاف عددی را افزایش داد.

"بی" برای افزایش اتلاف عددی تابع آنتروپی "هارتن" را جهت استفاده در ماخ‌های بالا تصحیح کرده‌است. در ادامه نشان خواهیم داد که تابع فوق در جریان‌های لزج، مشکلاتی را دارا می‌باشد. "وانگ" و همکاران [۳] روابطی برای بهبود روش "بی" و کاهش مشکلات آن ارائه داده‌اند، آنها هیچگونه اشاره‌ای به نرخ همگرایی ناشی از اصلاح روش "بی" نکرده‌اند، زیرا اگر بهبود جواب‌ها به قیمت کاهش بسیار زیاد نرخ همگرایی باشد، قابل قبول نیست. در مرجع فوق حل عددی برای حالت یک‌بعدی و اندرکنش شوک لایه مرزی (برای صفحه تخت) انجام شده‌است.

در این تحقیق با بررسی‌های به عمل آمده، مشخص شده‌است که می‌توان با اصلاح سرعت صوت مورد استفاده در تابع آنتروپی "بی"، کارایی آن را افزایش داد. اگرچه این اصلاح باعث بهتر شدن روش حل عددی می‌شود، ولی بازم مشکلاتی در حل جریان لزج باقی می‌ماند، یکی از مشکلات این است که روش برای شبکه‌های بسیار غیریکنواخت قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را ندارد. برای رفع این مشکلات تابع آنتروپی جدیدی پیشنهاد شده‌است که نرخ همگرایی را افزایش داده و باعث می‌شود که برنامه تا دقت ماشین قابلیت همگرایی داشته باشد. مزیت بارز روش ابداع شده این است که به کمک آن

می‌توان از اعداد *CFL* (Courant Friedrichs Lewy) بزرگ (در حدود ۱۰ برابر بزرگتر) استفاده نمود. این امکان کاربر را قادر می‌سازد که زمان اجرای برنامه را حدوداً به یک دهم کاهش دهد.

۲- معادلات حاکم

به دلیل وجود اندرکنش قوی بین لایه لزج و غیرلزج در ناحیه ایجاد شوک، از معادلات "ناویر-استوکس" لایه-نازک (TLNS) که کارایی خیلی خوبی برای شبیه‌سازی عددی جریان دارند، استفاده شده‌است. این معادلات در جریان‌هایی که دارای عدد رینولدز بالا هستند (لایه مرزی نازک)، قابل کاربرد می‌باشند. معادلات *FNS* به فرم بقایی در مختصات کارتزین با توجه به تغییر متغیرهای زیر به مختصات منحنی الخط انتقال داده شده‌اند:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (2)$$

با در نظر گرفتن متغیر مستقل η در جهت عمود بر جسم و با صرف نظر کردن از مشتقات در جهت جریان (ξ)، معادلات *TLNS* در مختصات منحنی الخط و بی‌بعد شده به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + H = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial S}{\partial \eta} + T \right] \quad (3)$$

بردار متغیرهای وابسته U و بردارهای غیرلزج F ، G ، H و همچنین بردارهای لزج S و T به فرم زیر ارائه می‌شوند:

$$U = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$F = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (E + p) U \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$G = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (E + p) V \end{pmatrix} \quad (6)$$

۳- روش حل عددی

روش اختلاف محدود بکار رفته، یک الگوریتم فاکتورگیری شده تقریبی، ضمنی، غیرتکراری و به شکل دلتا می باشد. فرمولاسیون روش عددی بکاررفته به صورت زیر است:

جاروب در جهت ξ :

$$\left[I + \Delta t \begin{pmatrix} \Lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} - \Lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{n\xi} + K_{i,j}^n \\ -\frac{1}{\text{Re}} \left(L_{i,j}^n + \frac{N_{i,j+1}^n - N_{i,j-1}^n}{2} \right) \end{pmatrix} \right] \Delta U_{i,j}^* = \quad (17)$$

$$- \Delta t \begin{pmatrix} \bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n + \bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \\ \mathbf{H}_{i,j}^n - \frac{1}{\text{Re}} \left(\mathbf{T}_{i,j}^n + \frac{\mathbf{S}_{i,j+1}^n - \mathbf{S}_{i,j-1}^n}{2} \right) \end{pmatrix} \Delta U_{i,j}^* = \Delta U_{i,j}^* \quad (18)$$

معادلات فوق به صورت دو دستگاه قطری می باشند که با حل این دستگاهها توسط الگوریتم توماس، در نهایت مقادیر بردار $U_{i,j}^{n+1}$ مربوط به هر نقطه به دست می آید:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n \quad (19)$$

در روابط فوق از توابع زیر استفاده شده است:

$$\Lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} = \frac{1}{2} \left[A_{i+\frac{1}{2},j} + \Pi_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} \right] \quad (20)$$

$$\Lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{n\eta} = \frac{1}{2} \left[B_{i,j+\frac{1}{2}} + \Pi_{i,j+\frac{1}{2}}^{n\eta} \right] \quad (21)$$

عبارت $\Pi_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi}$ جمله اتلاف عددی مربوط به روش IVD

است که در آن از تابع محدودکننده استفاده می شود، این عبارت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Pi_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} = R_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} \text{Diag} \left[\beta^k - \psi(\lambda^k + \gamma^k) \right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (R^{-1})_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} \Delta \\ \beta_{i+\frac{1}{2},j}^k &= \frac{g_{i,j}^k + g_{i+1,j}^k}{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (23) \end{aligned}$$

$g_{i,j}^k$ تابع محدودکننده است، در این تحقیق از چهار تابع محدودکننده زیر استفاده شده است:

$$\mathbf{H} = (\gamma J)^{-1} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \\ (E + p)v \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = J^{-1} \begin{pmatrix} \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)u_\eta + (\mu/3)\eta_x(\eta_y u_\eta + \eta_y v_\eta) \\ - (2/3)\mu\eta_x v/y \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)v_\eta + (\mu/3)\eta_y(\eta_y u_\eta + \eta_y v_\eta) - (2/3)\mu\eta_y v/y \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)(u^2 + v^2)_\eta / 2 + \gamma \text{Pr}^{-1} e_\eta \\ - (2/3)\mu(\eta_x u + \eta_y v)v/y + \\ \left(\mu/6 \left[\mu_x^2 (u^2)_\eta + \mu_y^2 (v^2)_\eta + \right] \right) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{T} = (\gamma J)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(u_\eta \eta_y + v_\eta \eta_x) \\ 2\mu v_\eta \eta_y - 2\mu v/y \\ \mu u(u_\eta \eta_y + v_\eta \eta_x) + (2/3)\mu \\ (2v_\eta \eta_y - u_\eta \eta_x) - \\ (2/3)\mu v^2/y + \gamma \mu \text{Pr}^{-1} e_\eta \eta_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

مؤلفه های غیرفیزیکی جریان (پادوردا) U و V در دامنه محاسباتی به صورت زیر بیان می شوند: (۱۰)

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (11) \text{ و } (12)$$

روابط مورد نیاز بین متغیرهای جریان با توجه به معادله حالت گاز ایده آل به صورت زیر می باشند:

$$T = (\gamma - 1)e, \quad E = \rho \left[e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (13)$$

به منظور بی بعد کردن متغیرها، پارامترهای بی بعد به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$$x_i = \frac{x_i^*}{R_N}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{c_\infty} \sqrt{\gamma}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty} \quad (14)$$

$$T = \frac{T^*}{T_\infty}, \quad e = \frac{e^*}{c_\infty^2} \gamma, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty}$$

جملات متریک عبارتند از:

$$\xi_x = -J\eta_y, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \eta_x = Jy_\xi, \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (15)$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با:

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \quad (16)$$

$$\Phi_{i+\frac{1}{2},j}^{nk} = g_{i,j}^k + g_{i+1,j}^k - \psi \left(\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^k + \gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \quad (22)$$

متغیرها توسط رابطه زیر متوسط‌گیری می‌شوند:

$$b = \sqrt{\frac{\rho_{i+1,j}}{\rho_{i,j}}} \quad (23)$$

$$s_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{bs_{i+1,j} + s_{i,j}}{1+b}$$

پارامتر s می‌تواند با مقادیر سرعت و انتالپی جایگزین شود. سرعت صوت (در مختصات کارتیزین) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c_{i+\frac{1}{2},j} = \sqrt{(\gamma-1) \left(h_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^2 + v_{i+\frac{1}{2},j}^2}{2} \right)} \quad (24)$$

عبارت‌های $Residual$ و $Error_{max}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Error_{max} = \frac{\text{حداکثر خطا در میدان حل}}{\text{گام زمانی}} \quad (25)$$

$$Residual = \frac{1}{m \times n} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)^2} \quad (26)$$

مقادیر اولیه برای متغیرهای جریان با توجه به تحلیل آیزونتروپیک و در بعضی از حالت‌ها از روش "روش مرتبه اول" [4]، بدست آمده و تولید شبکه با استفاده از روش جبری [5] انجام شده‌است، ضریب کشش برابر ۱/۰۱ می‌باشد. برای انجام محاسبات، عدد رینولدز ۳۱۲۵۰ و عدد ماخ ۸ حول مخروط سرپخ با نیم‌زاویه رأس ۷ درجه در نظر گرفته شده‌است. در تمامی اجراها (در شبکه‌های درشت) عدد CFL برابر یک در نظر گرفته شده‌است. به منظور افزایش نرخ همگرایی، گام زمانی (Δt) بر اساس مقادیر ویژه، متغیر در نظر گرفته شده و با استفاده از عدد CFL بدست می‌آید. به منظور مقایسه نتایج از روش برازش شوک "بیم-وارمینگ" [6]، استفاده شده‌است. این روش کمترین مقدار اتلاف عددی را مورد استفاده قرار می‌دهد و به همین دلیل دارای دقت زیادی (بویژه در داخل لایه مرزی) می‌باشد. نتایج مربوط به روش برازش شوک مطالعه شبکه شده‌اند تا جواب‌های آنها مستقل از شبکه باشند.

۱-۳- اعمال شرایط مرزی

شرط مرزی دیواره برای جریان لزج با توجه به شرط عدم لغزش مقادیر u و v روی جسم برابر صفر می‌باشند. برای

$$g_{i,j}^k = s \times \max \left[0, \min \left[\begin{array}{l} \sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k \left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right| \\ s \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^k \left| \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k \right| \end{array} \right] \right] \quad (24)$$

$$g_{i,j}^k = \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k + \left| \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right|}{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k + \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k + \delta} \quad (25)$$

$$g_{i,j}^k = \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k \left[\left(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right)^2 + \delta \right] + \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \left[\left(\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k \right)^2 + \delta \right]}{\left(\alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k \right)^2 + \left(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right)^2 + 2\delta} \quad (26)$$

$$g_{i,j}^k = s \max \left[\begin{array}{l} 0, \min \left[2\sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k \left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right|, s\sigma_{i-\frac{1}{2},j}^k \right] \\ \min \left[\left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right|, 2s\sigma_{i-\frac{1}{2},j}^k \right] \end{array} \right] \quad (27)$$

که در آن $s = \text{sgn} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right)$ تابع علامت

و $10^{-7} \leq \delta \leq 10^{-5}$ می‌باشد، تابع $\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k$ به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k = \begin{cases} \frac{g_{i+1,j}^k - g_{i,j}^k}{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k} & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k = \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^{n\epsilon} \right)^{-1} \left(U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n \right) \quad (29)$$

روابط مشابهی برای جهت η مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تابع $\sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k(x) = \frac{1}{2} \psi_{i+\frac{1}{2},j}^k(x) \quad (30)$$

تابع $\psi_{i+\frac{1}{2},j}^k$ شرط آنتروپی نامیده می‌شود و از ایجاد امواج شوک انبساطی که غیرفیزیکی هستند، جلوگیری می‌کند. استفاده از تابع آنتروپی به حل، لزجت عددی اعمال می‌کند. بردار شار غیرلزج از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{2} \left[F_{i,j}^n + F_{i+1,j}^n + \Phi_{i+\frac{1}{2},j}^{nk} \right] \quad (31)$$

شرط مرزی فشار از معادله زیر استفاده می‌شود:

$$P_n (\eta_x^2 + \eta_y^2)^{\frac{1}{2}} = (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta = 0 \quad (37)$$

به دلیل آدیاباتیکی بودن دیواره از رابطه‌ای مشابه با معادله فوق برای دما استفاده شده است. از گسسته‌سازی عددی معادله فوق، معادلاتی به شکل ماتریس سه‌قطری حاصل می‌شود که با استفاده از روش توماس حل می‌گردند.

شرط مرزی جریان ورودی

چون جریان ورودی مافوق صوت می‌باشد، متغیرها در ورود برابر مقادیر جریان آزاد در نظر گرفته شده‌اند.

شرط مرزی جریان خروجی

به دلیل مافوق صوت بودن جریان خروجی، از میان‌یابی مرتبه صفر استفاده شده است.

شرط مرزی صفحه تقارن

در این مرز از شرط تقارن (آینه‌ای) استفاده شده است.

۳-۲- شرط آنتروپی ثابت

مشکل اصلی روش خطی‌سازی 'رو' در نقض آنتروپی در انبساط صوتی است، البته این مسئله مختص این روش نیست، برای حل این مشکل از توابع آنتروپی ثابت استفاده می‌شود. در مراجع از سه نوع شرط آنتروپی (معروف) استفاده شده است، متغیر اصلی این توابع مقادیر ویژه هستند. شایان‌ذکر است که شرط آنتروپی می‌تواند میزان همگرایی را شدیداً تحت تأثیر قرار دهد. در حالت تقارن محوری دو مقدار ویژه جابجایی $\lambda_{1,2} = U$ و دو مقدار ویژه آکوستیک پیشرو و پسرو $\lambda_3 = U + C\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} = U + C$ و $\lambda_4 = U - C$ وجود دارند. $\lambda_{1,2}$ در نزدیکی نقاط سکون به صفر نزدیک می‌شوند و λ_3 یا λ_4 در نزدیکی خطوط صوتی به صفر نزدیک می‌شوند. در اثر صفر شدن مقادیر ویژه مشکلاتی (مانند ناپایداری غیرخطی) برای روش عددی ایجاد می‌شود. برای جلوگیری از صفر شدن مقادیر ویژه سه نوع شرط آنتروپی توسط محققین پیشنهاد شده است که به قرار زیرند:

شرط آنتروپی ثابت "چاکراواری" [۷]

شرط آنتروپی ثابت "هارتن-هایمن" [۸]

شرط آنتروپی ثابت "هارتن" [۹]

شرط آنتروپی ثابت "هارتن" به صورت زیر است:

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| \geq \varepsilon^* & \text{اگر} \\ \frac{|\lambda|^2 + \varepsilon^{*2}}{2\varepsilon^*} & |\lambda| < \varepsilon^* & \text{اگر} \end{cases} \quad (38)$$

بطوریکه $0.02 \leq \varepsilon^* \leq 0.25$. شرط آنتروپی "هارتن"

برای محاسبات جسم سرپخ در اعداد ماخ بالا مناسب نیست و استفاده از آن در اعداد ماخ بالا موجب واگرایی حل شده و یا نُرُم خطا از حد خاصی پایین‌تر نمی‌آید. "یی" شرط آنتروپی ثابت "هارتن" را برای جریان‌های با ماخ بالا ($4 \leq M \leq 25$) و ماوراءصوت به صورت زیر اصلاح نمود [۱۰]:

$$\varepsilon = \varepsilon^* \left[\frac{|U|_{i+\frac{1}{2},j} + |V|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2} C_{i+\frac{1}{2},j}}{(|\nabla \xi| + |\nabla \eta|)_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \quad (39)$$

U و V مؤلفه‌های سرعت پادوردا در جهت‌های ξ و η می‌باشند و $0.02 \leq \varepsilon^* \leq 0.25$ در نظر گرفته می‌شود.

با بررسی‌های انجام شده مشخص شد که در بیشتر رژیم‌های جریان (بویژه در جریان‌های ماوراءصوت) شرط آنتروپی ثابت "یی" نرخ همگرایی مناسبی دارد و از پایداری بهتری برخوردار است، در عین حال نُرُم خطای آن نیز کوچکتر است، به همین دلیل در این تحقیق از آن به عنوان مبنا استفاده شده است، این تابع نیز دارای مشکلاتی است که در این تحقیق سعی شده است به آنها پرداخته شود و اصلاحات لازم در مورد آن صورت گیرد.

۳-۳- بررسی تابع آنتروپی "یی" در جریان لزج

"یی" برای افزایش پایداری، نرخ همگرایی و کاهش نُرُم خطا، شرط آنتروپی، "هارتن" را اصلاح نمود. در این تابع آنتروپی سرعت صوت در مختصات منحنی‌الخط از متوسط‌گیری در دو جهت ξ و η بدست آمده است. در مقالات و گزارش‌های منتشرشده توسط "یی" محاسبات مربوط به جریان لزج نیز انجام شده است، ولی در قریب به اتفاق این منابع از ضریب بزرگ کشش شبکه (که موجب یکنواختی شبکه می‌شود و در نتیجه تعداد نقاط کمتری در ناحیه لزج و لایه مرزی قرار می‌گیرند) استفاده شده است. با استفاده از ضریب بزرگ کشش شبکه اثرات لزجت در حل عددی کاهش خواهد یافت.

در شکل ۱ شبکه‌بندی نقاط در دامنه فیزیکی نشان داده شده است. در شکل ۲ منحنی نُرُم خطا برای روش "یی" به ازای $\varepsilon^* = 0.05$ قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را ندارد. این مسئله نشان می‌دهد که حساسیت روش "یی" نسبت به انتخاب ε^* زیاد است. RIC نشان‌دهنده این است که برای بدست آوردن شرایط اولیه از روش "رو" مرتبه اول استفاده شده است. از سوی دیگر IIC به حلی اشاره می‌کند که برای شرایط اولیه آن از مقادیر آیزنتروپیک استفاده شده است.

در جریان‌های غیرلزج معمولاً از ضریب بزرگ کشش شبکه استفاده می‌شود، به همین دلیل ابعاد شبکه در جهات ξ و η به

خطای موضعی روش پیشنهادی شروع به کاهش نموده است، در حالی که خطای موضعی روش "بی" نوسانی می‌شود و مقدار متوسط آن ثابت باقی می‌ماند.

۳-۴- پیشنهاد شرط آنتروپی ثابت

در توابع آنتروپی ابداع شده توسط محققین دیگر، محل شوک و تشخیص آن به صورت مستقیم وارد محاسبات نمی‌شود، اگر چه در شرایط آنتروپی ثابت "بی" در محل‌های دارای شوک مقادیر بردارهای سرعت پادوردا و سرعت صوت عوض می‌شود، این تغییرات به نوعی موجب تشخیص شوک می‌شود. از سوی دیگر شرط آنتروپی ثابت "بی" در ناحیه مادون صوت و درون لایه مرزی نیز موجب افزایش اتلاف عددی می‌شود. برای کاهش این اثرات به دنبال یک تابع تشخیص دهنده شوک $v_{i,j}$ هستیم که در نواحی دارای شوک حداکثر (به صورت بی‌بعد برابر یک) و در نقاط هموار میدان مقداری قابل صرف نظر باشد. طبق مشاهدات انجام شده، در جریان‌های غیرلزج تابع آنتروپی "بی" بخوبی عمل می‌کند، از سوی دیگر کاربرد این تابع در جریان‌های لزج موجب افزایش اتلاف عددی می‌شود. استفاده از روابط زیر بهبود تابع آنتروپی پیشنهاد می‌شود:

$$\varepsilon_{1,2} = a_1 + a_3 v_{i,j} (U + V + C) \quad (40)$$

$$\varepsilon_{3,4} = a_2 + a_4 v_{i,j} (U + V + C) \quad (41)$$

با الهام از تابع آنتروپی ثابت "هارتن" مقادیر a_1 و a_2 مقادیر کوچکی (کوچکتر مساوی ۰/۲۵) انتخاب شده‌اند. ضریب a_3 و a_4 با استفاده از اجزای عددی انتخاب خواهند شد. تابع $v_{i,j}$ در ادامه معرفی خواهد شد. مزیت استفاده از توابع آنتروپی فوق این است که اولاً نرخ همگرایی را افزایش می‌دهد و ثانیاً فقط در نواحی دارای شوک به اتلاف عددی اجازه افزایش می‌دهد، به دلیل کاهش اتلاف عددی در نواحی هموار جریان، دقت جواب‌ها افزایش خواهد یافت. علاوه بر موارد فوق، در مسائلی که در آنها شوک‌های قوی وجود دارد، می‌توان با افزایش ضرایب a_3 و a_4 قابلیت تسخیر شوک روش را (بدون کاهش محسوس دقت در نواحی هموار میدان حل) افزایش داد.

سئوالی که در اینجا مطرح می‌شود، این است که $v_{i,j}$ را تابع چه متغیر مستقلی در نظر بگیریم، متغیر مناسب برای تابع فوق متغیری است که در ناحیه شوک بیشترین تغییرات و در نواحی هموار میدان و بویژه لایه مرزی کمترین تغییرات را داشته باشد، از متغیرهای سرعت، فشار، دما، چگالی و آنتروپی می‌توان به عنوان متغیرهای تابع استفاده نمود.

همانطور که می‌دانیم در ناحیه شوک آنتروپی شدیداً افزایش می‌یابد. از سوی دیگر تغییرات آنتروپی در داخل لایه مرزی قابل

هم نزدیک است، از سوی دیگر در جریان‌های لزج، بویژه در حالت آشفته، لازم است که از ضریب کشش بسیار کوچک استفاده شود تا حل در ناحیه لزج (و آشفته) دارای دقت کافی باشد. با کوچک شدن ابعاد شبکه اتلاف عددی کاهش می‌یابد. با استفاده از نتایج عددی بدست آمده، مشاهده شده است که استفاده از سرعت متوسط سرعت صوت، قابلیت همگرایی برنامه را (برای محاسبات جریان لزج) کاهش می‌دهد، زیرا در محاسبات جریان لزج اتلاف عددی در جهت η کمتر از جهت ξ است، (البته این مطلب ممکن است در نقاط دور از سطح و خارج لایه مرزی صادق نباشد)، استفاده از سرعت متوسط صوت موجب کاهش سرعت صوت (نسبت به حالتی که در آن از سرعت صوت در جهت η استفاده شود) می‌شود، در نتیجه مقدار اتلاف عددی روش کاهش می‌یابد. از سوی دیگر استفاده از سرعت متوسط صوت در جهت ξ موجب زیاد شدن سرعت صوت در این جهت می‌شود، در نتیجه اتلاف عددی در این راستا افزایش می‌یابد. شایان ذکر است که با کاهش ضریب کشش شبکه مقدار $\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$ افزایش می‌یابد. با توجه به توضیحات فوق در محاسبات جریان لزج بهتر است که از متوسط‌گیری فوق اجتناب شود (که از این پس با عنوان تابع آنتروپی "بی" اصلاح شده نامیده می‌شود). در این حالت نرخ همگرایی روش "بی" اندکی بیشتر از روش پیشنهادی می‌باشد.

به منظور بررسی اثر شرایط اولیه در نرخ همگرایی در شکل ۴ از شرایط اولیه بدست آمده از تحلیل آیزنتروپیک، استفاده شده است. مشاهده می‌شود که نرخ همگرایی دو روش تفاوت چندانی با هم ندارد و از سوی دیگر نرم خطا از ۵/۵- کمتر نشده است. این امر نشان می‌دهد که روش عددی نتوانسته است با توجه به شرایط اولیه، مقدار اتلاف مورد نیاز را جهت همگرایی تا دقت ماشین ایجاد کند. برای اثبات مستقل بودن مطلب بیان شده از نوع محدودکننده، چهار نوع تابع محدودکننده مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. در شکل‌های ۵ و ۶ نرخ همگرایی برای تابع آنتروپی "بی" و تابع پیشنهادی ما، ارائه شده است.

از نتایج بدست آمده می‌توان دریافت که نرخ همگرایی برای تابع آنتروپی پیشنهادی بسیار بهتر از تابع آنتروپی "بی" می‌باشد. از سوی دیگر برای محدودکننده اول تابع "بی" قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را ندارد. رفتار محدودکننده‌های دوم تا چهارم شباهت بسیار زیادی به هم دارد و نرخ همگرایی آنها با شرایط یکسان بیشتر از تابع محدودکننده اول است. در شکل ۷ مشاهده می‌شود که خطای موضعی مربوط به دو روش در مراحل اولیه تقریباً برهم منطبق است، با افزایش تعداد تکرار

ملاحظه است، نکته مهمتر اینکه در محاسبات جسم سرپخ حداکثر آنتروپی در نقطه سکون ایجاد می‌شود و علاوه بر آن لایه آنتروپی در ابتدای جسم سرپخ تشکیل می‌شود و سطح جسم را می‌پوشاند [۱۱] و [۱۲]. با توجه به موارد فوق استفاده از متغیر آنتروپی (به دلیل تغییرات قابل توجه در نواحی هموار میدان حل) مناسب نیست.

برای بررسی متغیرهای دیگر روابط شوک یک‌بعدی را برای حالت گاز کامل $\gamma = 1/4$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2.4M_1^2}{0.4M_1^2 + 2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1 + 0.2M_1^2)(7M_1^2 - 1)}{7.2M_1^2}, \quad (42)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{7}{6}M_1^2 - \frac{1}{6},$$

با توجه به معادلات فوق نسبت فشار در دو طرف شوک بیشتر از نسبت بقیه متغیرهاست و تغییرات سرعت نیز مشابه چگالی (البته به صورت معکوس) است، در عین حالی که سرعت در درون لایه مرزی تغییرات زیادی دارد. نکته دیگر این است که ورتیسیت (که مرتبط با سرعت است) در حوالی خط صوتی بیشترین تغییرات را دارد، بنابراین انتخاب سرعت به عنوان متغیر مستقل تابع، انتخاب مناسبی نیست. با توجه به استدلال‌های فوق، فشار به عنوان متغیر مستقل تابع در نظر گرفته می‌شود.

در روش‌های مرکزی همانند روش "بیم-وارمینگ" [۱۳] و "جیمسون" [۱۴] در عبارت اتلاف عددی مرتبه دوم از تابع تشخیص‌دهنده شوک به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$v_{i,j} = \frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{P_{i+1,j} + 2P_{i,j} + P_{i-1,j}} \quad (43)$$

در نواحی شوک عبارت فوق به حداکثر مقدار خود می‌رسد و در نواحی هموار میدان مقدار آن بسیار کوچک است، همین تغییرات موجب اعمال اتلاف مرتبه دوم یا مرتبه چهارم در روش‌های فوق می‌شود. با توجه به خواص فوق از این تابع به عنوان تشخیص‌دهنده شوک استفاده شده است، به منظور افزایش همگرایی روش، از حداکثر مقدار عبارت فوق در نقاط i و $i+1$ (برای جاروب در جهت ξ) استفاده شده است. برای بررسی تابع آنتروپی جدید در ابتدا از شرایط اولیه بدست آمده از معادلات آیزنتروپیک استفاده شده است. در شکل ۸ ضرایب a_1 و a_2 تغییر داده شده‌اند. از مقایسه نتایج مربوطه می‌توان دریافت که تابع پیشنهادی به ضرایب a_1 و a_2 چندان حساس نیست. در شکل ۹ با ثابت بودن ضرایب a_1 و a_2 ,

ضرایب a_3 و a_4 عوض شده‌اند. از آنجا که دو روش نسبت به ضرایب a_1 و a_2 چندان حساس نیستند، در این شکل از سوی دیگر $a_1 = a_2 = 0.25$ استفاده شده است. از سوی دیگر ضرایب a_3 و a_4 تأثیر زیادی در نرخ همگرایی روش دارند. در شکل ۱۰ توزیع دمای روی سطح با تغییرات ضرایب a_1 و a_2 در شکل ۱۱ برای ضرایب a_3 و a_4 ترسیم شده است. با رجوع به شکل ۴ مشاهده می‌شود که روش‌های "بی" و "یی" اصلاح‌شده با مقادیر اولیه بدست آمده از تحلیل آیزنتروپیک قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را ندارند. از سویی روش "بی" نسبت به مقادیر \mathcal{E}^* حساس است (شکل ۲) در صورتی که تابع آنتروپی پیشنهادی حساسیت کمتری نسبت به ضرایب (بویژه برای همگراشدن) دارد. به منظور اظهار نظر دقیق‌تر در مورد کارایی تابع آنتروپی پیشنهادی باید از مقادیر بدست آمده از روش "رو" مرتبه اول استفاده شود. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نرخ همگرایی برای تابع آنتروپی جدید ارائه شده است. مشاهده می‌شود که در این حالت نیز نرخ همگرایی (به‌زای مقادیر مناسب ضرایب $a_1 = a_2 = 0.25$ و $a_3 = a_4 = 1.0$) بیشتر از روش "بی" و "یی" اصلاح‌شده است. شایان ذکر است که توزیع دمای روی سطح نیز در این حالت‌ها دقیقاً مشابه شکل‌های ۱۰ و ۱۱ است. در شکل ۱۴ توزیع دمای روی سطح برای روش‌های مختلف بازای شبکه 40×60 و ضرایب کشش $1/0.1$ ترسیم شده است. برای مقایسه نتایج از روش برازش شوک "بیم-وارمینگ" استفاده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج مربوط به روش "بی" و "یی" اصلاح شده برهم منطبق هستند. از نظر همگرایی حل به روش "بی" برای شبکه ریز (80×150) و $\beta = 1/0.1$ تا دقت ماشین قابلیت همگرایی ندارد و بازای شبکه 40×60 نیز فقط با $CFL = 0.1$ تا دقت ماشین همگرا می‌شود. روش "بی" اصلاح شده نیز فقط برای شبکه (80×150) و $\beta = 1/0.1$ و $CFL = 0.1$ تا دقت ماشین قابلیت همگرایی دارد. این در حالی است که روش پیشنهادی بازای $CFL = 1$ حتی برای شبکه بسیار غیریکنواخت (80×150 و $\beta = 1/0.05$) تا دقت ماشین همگرا می‌شود. در شکل ۱۵ توزیع فشار روی سطح برای روش‌های مختلف نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که فشار روی سطح به اندازه دما، به روش بکاررفته حساس نیست. در شکل ۱۶ توزیع دما روی سطح برای روش‌های مختلف نشان داده شده است. در این شکل سعی بر مطالعه شبکه بوده است (تا جواب‌های بدست آمده مستقل از شبکه باشند). البته روش‌های "بی" و "یی" اصلاح شده برای شبکه ریز قابلیت همگرایی نداشته‌اند. مشاهده می‌شود که تطابق دما روی سطح روش پیشنهادی با نتایج برازش شوک (بویژه تا

$X/R_N \approx 0.185$ بسیار خوب است.

در شکل‌های ۱۷ و ۱۸ پروفیل‌های دما و سرعت در ناحیه لایه مرزی، شوک و خارج از شوک ترسیم شده‌اند. با مقایسه نتایج مشخص می‌شود که اولاً مقادیر بدست آمده تفاوت زیادی با هم ندارند و ثانیاً جواب‌های بدست آمده توسط روش‌های اصلاحی به نتایج حل دقیق (حل برازش شوک) نزدیکتر است. این مقایسه برتری روش‌های اصلاحی را نسبت به روش "بی" نشان می‌دهد.

۴- بحث و نتیجه‌گیری

شرط آنتروپی "بی" با وجود کاربردهای بسیاری که در روش‌های TVD پیدا کرده‌است، در جریان‌های لزج با مشکل مواجه می‌شود. در این تحقیق یک اصلاح اولیه در شرط آنتروپی ثابت "بی" اعمال گردید که موجب شد حساسیت زیاد این توابع به مقدار ϵ^* کاهش یابد و نرخ همگرایی آن نیز بیشتر شود. پس از انجام این اصلاح مشاهده شد که باز هم روش اصلاحی مانند روش "بی" کارایی زیادی ندارد، به‌عنوان مثال با شرایط اولیه بدست آمده از تحلیل آیزنتروپیک که یک توزیع تقریبی را برای متغیرها ایجاد می‌کند، قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را ندارد. از سوی دیگر هردو روش فوق در شبکه‌های بسیار غیریکنواخت (با ضریب کشش کوچک) که در حل مسائل جریان لزج و بویژه آشفته مورد استفاده قرار می‌گیرند، تا دقت ماشین قابلیت همگرایی نداشتند. این مشکل حتی با کوچک

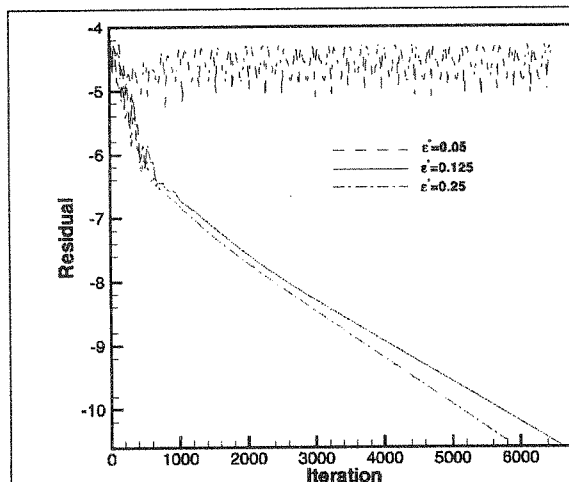
کردن عدد CFL نیز قابل رفع نبود.

برای رفع این مشکلات و افزایش بیشتر دقت، تابع آنتروپی جدیدی پیشنهاد شد. نتایج بدست آمده از حل عددی نشان دادند که تابع فوق اتلاف عددی را به‌صورت هوشمندانه اعمال می‌کند و موجب افزایش دقت، انعطاف‌پذیری و نرخ همگرایی می‌شود. شایان‌ذکر است که در حالت شبکه 80×150 و $\beta = 1/0.1$ روش "بی" قابلیت همگرایی ندارد و روش "بی" اصلاح شده نیز با عدد $CFL = 0.1$ همگرا می‌شود، در صورتیکه روش جدید (که از تابع آنتروپی پیشنهادی استفاده می‌کند) با عدد $CFL = 1$ قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را حتی برای شبکه غیریکنواخت‌تر (با ضریب کشش $\beta = 1/0.05$) دارا می‌باشد. عدد CFL در این حالت حدود ۱۰ برابر حالت‌های قبلی است که موجب می‌شود زمان اجرای برنامه نسبت به حالت قبل حدوداً به یک دهم کاهش یابد.

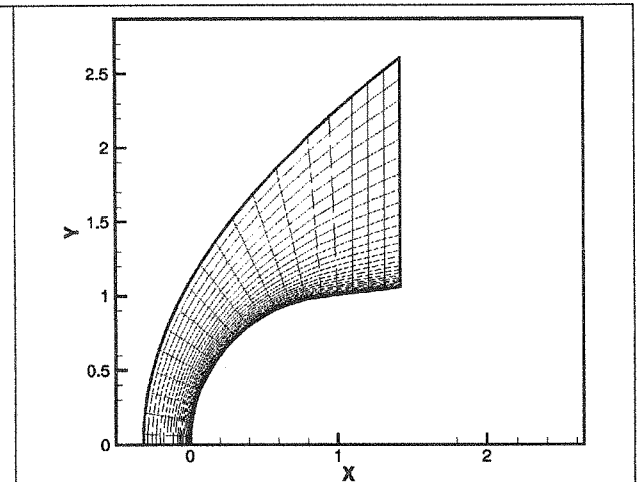
۵- قدردانی

نگارندگان از مسئولین محترم دانشگاه بوعلی سینا به‌دلیل در اختیار قرار دادن امکانات مورد نیاز برای انجام این تحقیق، کمال تشکر را دارند.

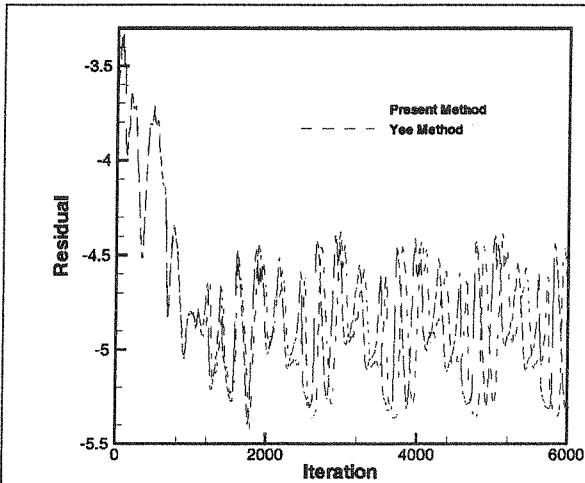
۶- ضمائم



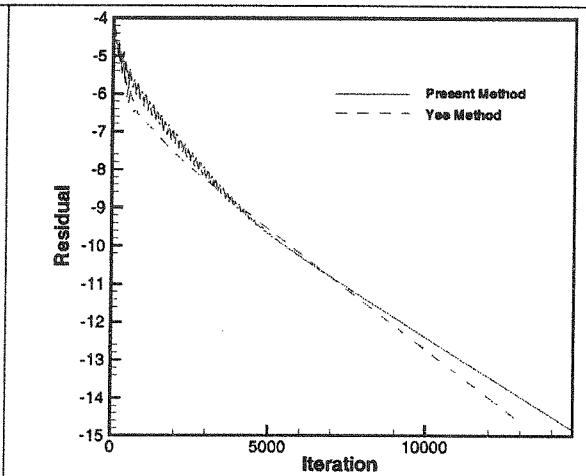
شکل (۲): منحنی نرّم خطا برای روش "بی" (RIC)



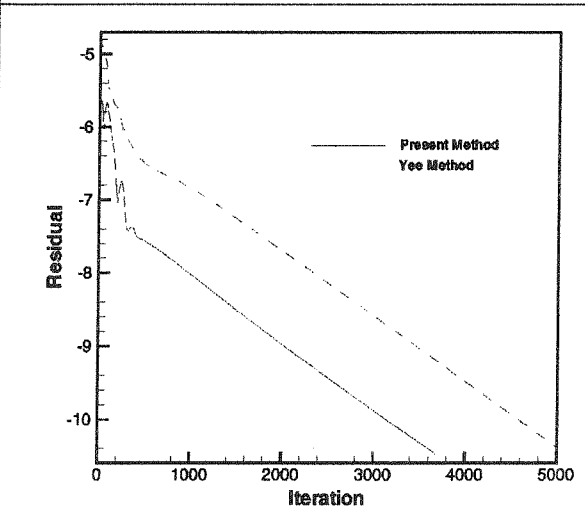
شکل (۱): شبکه‌بندی نقاط در دامنه فیزیکی



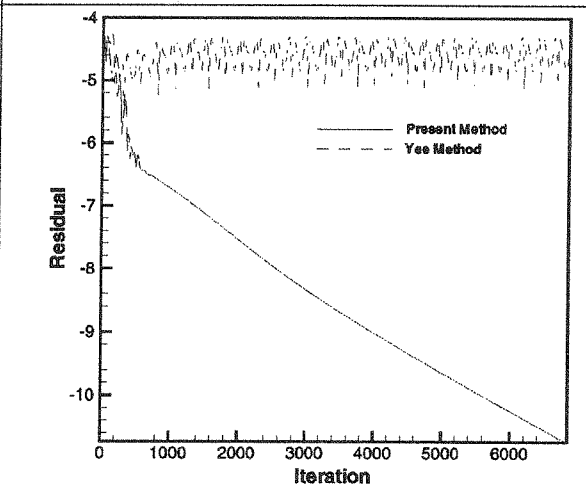
شکل (۳): مقایسه منحنی نرم خطا برای تابع آنتروپی 'یی' اصلاح شده و تابع 'یی' (IIC)



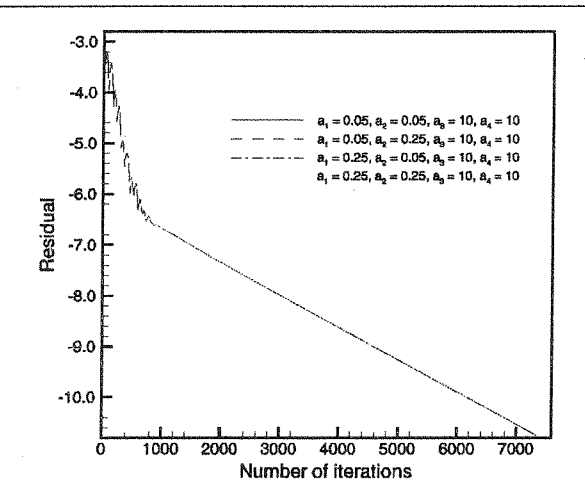
شکل (۴): مقایسه منحنی نرم خطا برای حالت تابع آنتروپی 'یی' اصلاح شده و تابع 'یی' به ازای $\varepsilon^* (RIC) = 0.125$



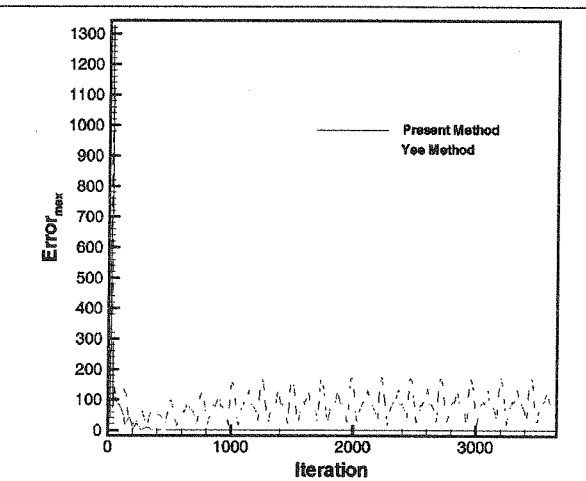
شکل (۵): مقایسه منحنی نرم خطا برای تابع پیشنهادی و تابع 'یی' (محدودکننده اول و $\varepsilon^* (RIC) = 0.05$)



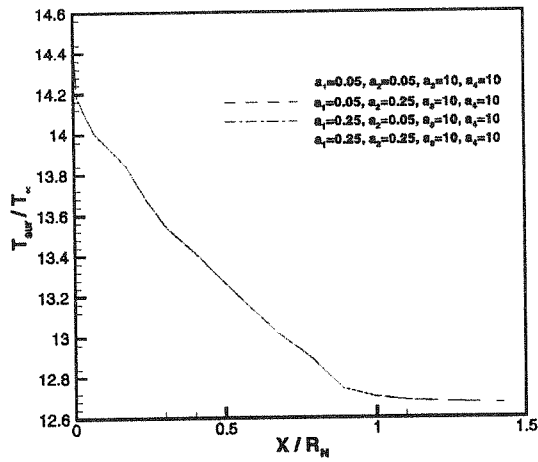
شکل (۶): مقایسه منحنی نرم خطا برای تابع پیشنهادی و تابع 'یی' (محدودکننده دوم و $\varepsilon^* (RIC) = 0.05$)



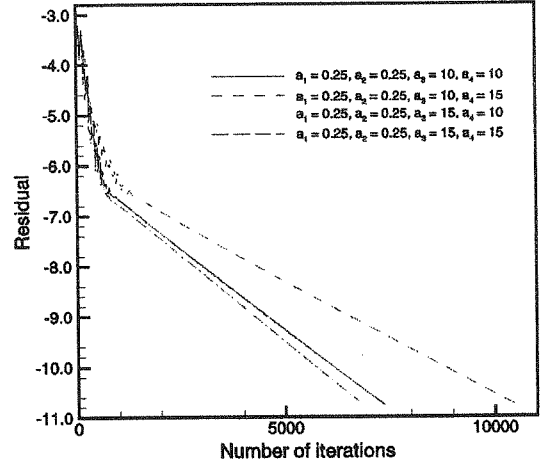
شکل (۷): مقایسه حداکثر خطای موضعی برای تابع پیشنهادی و تابع 'یی' (محدودکننده اول و $\varepsilon^* (RIC) = 0.05$)



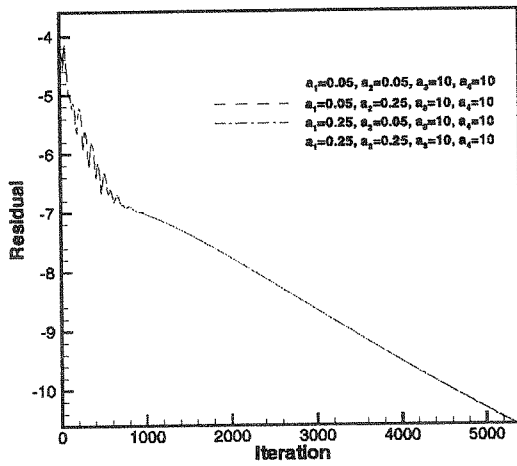
شکل (۸): رفتار همگرایی حل به ازای ضرایب متفاوت پیشنهادی (IIC)



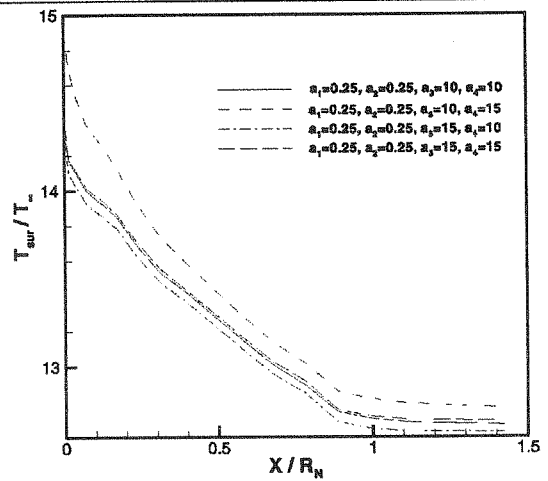
شکل (۱۰): مقایسه توزیع دمای روی سطح به ازای ضرایب متفاوت تابع پیشنهادی (IIC)



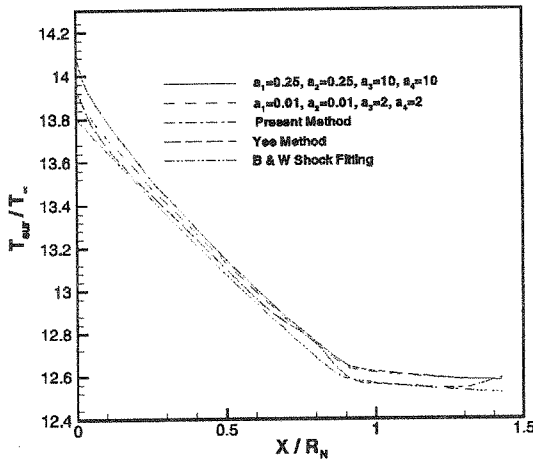
شکل (۹): رفتار همگرایی حل به ازای ضرایب متفاوت پیشنهادی (IIC)



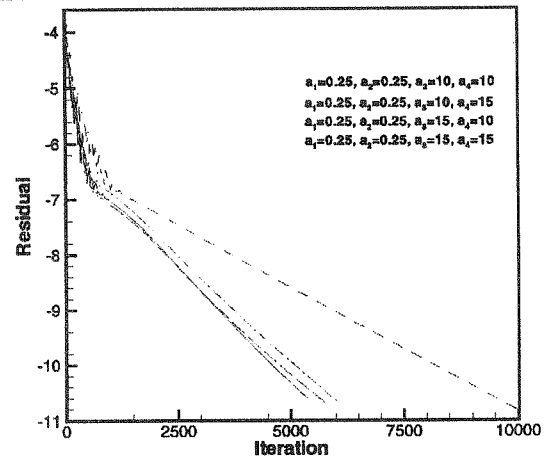
شکل (۱۲): رفتار همگرایی به ازای ضرایب متفاوت تابع پیشنهادی (RIC)



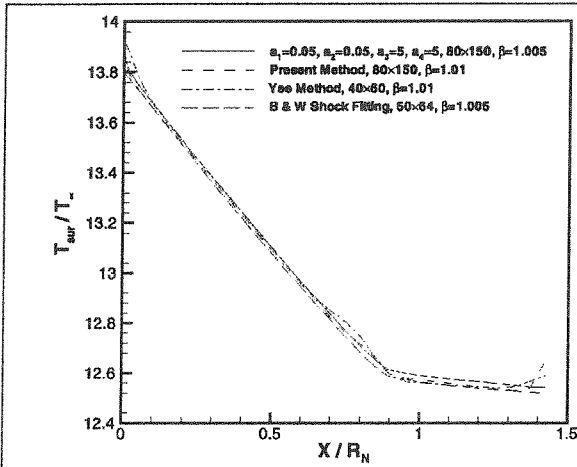
شکل (۱۱): مقایسه توزیع دمای روی سطح به ازای ضرایب متفاوت تابع پیشنهادی (IIC)



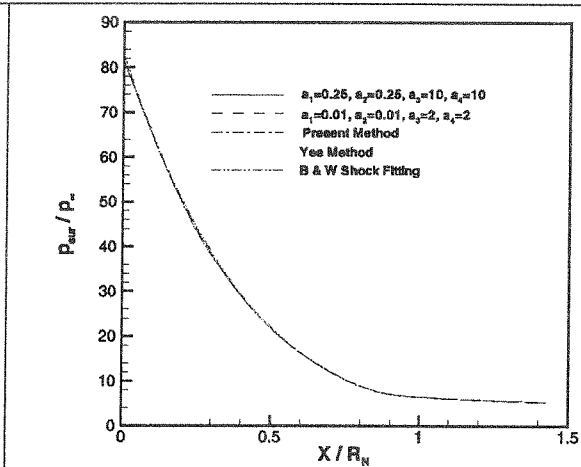
شکل (۱۴): مقایسه توزیع دمای روی سطح برای روشهای مختلف (RIC)



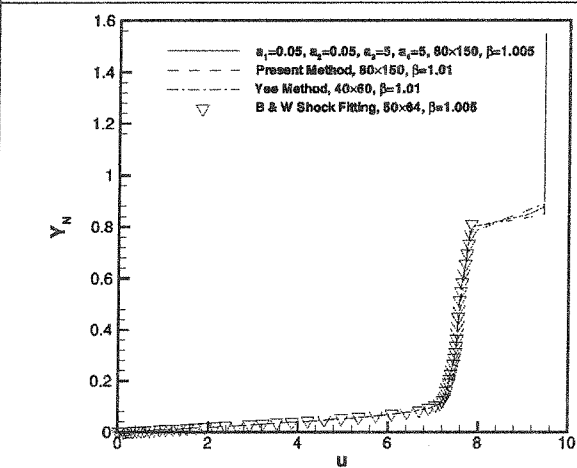
شکل (۱۳): رفتار همگرایی حل به ازای ضرایب متفاوت تابع پیشنهادی (RIC)



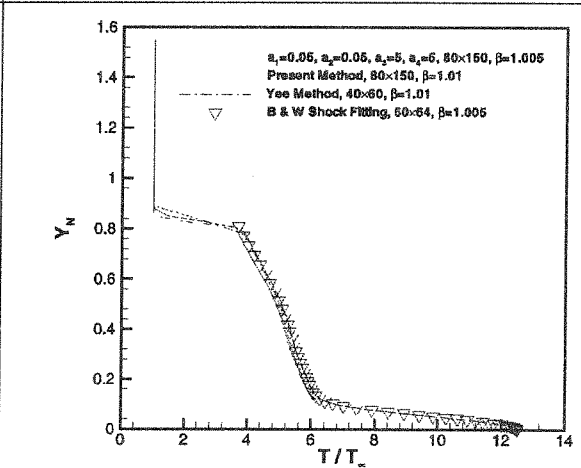
شکل (۱۶): مقایسه توزیع دمای روی سطح برای روشهای مختلف (RIC)



شکل (۱۵): مقایسه توزیع فشار روی سطح برای روشهای مختلف (RIC)



شکل (۱۸): مقایسه پروفیل سرعت برای روشهای مختلف (RIC)



شکل (۱۷): مقایسه پروفیل دما برای روشهای مختلف (RIC)

۷- مراجع

Unsteady Implicit Scheme", Naval Surface Weapons Center Silver Spring, Maryland 20910.

Chakravarthy, S. R., "High Resolution Upwind Formulation for the Navier-Stokes Equations", Computational Fluid Dynamics, Von Karman Inst. Lecture Series, 1988-05 1988 [۷]

Harten, A., "A Self-Adjusting Grid for the Computational of Weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws", Journal of Computational Physics, Vol. 50, pp 235-269, 1983 [۸]

Harten, A., "On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite Difference Schemes", SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 2] pp. 1-23 1984. [۹]

Yee, H. C., Klopfer, G. H., and Montagne, J. L., "High Resolution Shock-Capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows", NASA TM-100097, April, 1988 [۱۰]

Ferri, A., and Libby, P. A., "Note on Interaction between the Boundary Layer and Inviscid Flow", [۱۱]

Hanel, D., and Krause, E., "The Influence of Numerical Damping on the Solution of the Conservation Equations", 1992 [۱]

Kallinderis, Y., and McMorris, H., "Magnitude of Artificial Dissipation for Numerical Simulations", AIAA Journal Vol. 33 No.8, pp 1526-1529. [۲]

Wang, Z., and Richards, B. E., "High Resolution Schemes for Steady Flow Computations", Journal of Computational Physics, Vol. 97 pp 5372 1991. [۳]

Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", Journal of Computational Physics", Vol. 43 pp. 357-372, 1981 [۴]

Anderson, D. A., Tanehill, J. C., and Pletcher, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw Hill Book Company, New York, 1984 [۵]

Hsieh, T., "Heat Transfer Calculation for Hypersonic Flows over Blunt Noses Using an [۶]

- Journal Aeronaut. Science, 21:130, 1954
- Hayes, W. D., and Probstein, R. F., "Hypersonic Flow Theory", Academic Press, New York, 1959. [۱۲]
- Pulliam, T. H., "Implicit Solution Methods in Computational Fluid Dynamics", Applied Numerical Mathematics, Vol. 2, No. 6, pp 441-474, 1986 [۱۳]
- Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes", AIAA paper 81-1259, 1981. [۱۴]