ارزیابی کارایی ماشین‌ها با بازدیدهای تصادفی

سید کریم علی محمدی[i]؛ اسماعیل خرّم[ii]

چکیده

این مقاله کارایی N ماشین را که به‌صورت خطی در فواصل مساوی کنار هم نصب شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌دهد. بازرسی توسط یک اپراتوریا ربات صورت می‌گیرد. درا ین مقاله فرض می‌شود تعداد خرابی ماشین‌ها دارای توزیع پواسن است، زمان تعمیر آنها و زمان پیمودن دو ماشین متوالی‌ثابت است، و خط مشی تعمیر و نگهداری به‌صورت دورهای تصادفی توسط اپراتور یا ربات صورت می‌گیرد. در این مقاله میزان کارایی ماشین‌ها در دو حالت همگن و ناهمگن به‌طور تحلیلی محاسبه شده است. در پایان با توجه به‌نتایج به‌دست آمده نتیجه گیری می‌شود که خط مشی تعمیر و نگهداری به شیوه جدید سبب افزایش کارایی می‌شود.

کلمات کلیدی

زنجیرهای مار کف، کارایی، بازرسی تصادفی، تعمیر و نگهداری.

Evaluation of Machines Performance with Random Patrolling

K. Alimohamadi; E. Khorram

ABSTRACT

THIS PAPER SOLVES THE PROBLEM OF PERFORMANCE CALCULATION FOR A SET OF N MACHINES, WHICH ARE BI-DIRECTIONALLY PATROLLED BY ONE OPERATIVE WORKER OR ROBOT. THE TIME TAKEN TO WALK FROM ONE MACHINE TO THE NEXT AND INSPECT AND SERVICE THEM IS ASSUMED TO BE A CONSTANT, AND ALSO THE MACHINES ARE EQUALLY SPACED INSTALLED ON THE FLOOR OF FACTORY. IT IS SUPPOSED WHEN THE OPERATOR REACHES TO A STOPPED MACHINE HE SPENDS AN ADDITIONAL CONSTANT REPAIR TIME C PUTTING IT IN ORDER BEFORE PROCEEDING TO THE NEXT MACHINES, AND ALSO, THE OPERATOR GETS RANDOM CYCLES AS A NEW REPAIR POLICY PROPOSED IN THIS PAPER .IT IS ASSUMED THAT THE MACHINES BREAKDOWN OCCUR RANDOMLY WITH POISSON DISTRIBUTION. WE HAVE FORMULATED A PERFORMANCE RATE FOR EACH MACHINE IN BOTH HOMOGENOUS AND HETEROGENEOUS CASES AND NOTIFY NUMERICAL RESULTS. WE APPROVED THAT THE NEW REPAIR POLICY LEADS TO AN INCREASE IN THE PERFORMANCE RATE OF THE MACHINES.

KEYWORDS

Markov Chains; Performance; Random Patrolling; Repair Policy

[i] مربی دانشگاه مازندران؛ دانشکده فنی و مهندسی؛ بخش مهندسی صنایع.

[ii] استادیار دانشگاه صنعتی امیر کبیر؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر:eskhor@aut.ac.ir

۱- مقدمه

مساله نگهداری یک مجموعه متشکل ازN ماشین نساجی را که در کنارهم به‌طور خطی قرار گرفته‌اند، درنظر بگیرید ماشین‌ها با شماره‌های$1,2,...,N$ از چپ به‌راست شماره گذاری شده‌اند. روش تعمیر و بازرسی ماشین‌ها به‌صورت دورهای تصادفی است که توسط یک ربات یا اپراتورانجام می‌شود به‌این صورت‌که ماشین‌ها به وسیله اپراتور ابتدا ازچپ به‌راست و سپس از راست به‌چپ مورد بازدید قرار می‌گیرند و این شامل بازرسی و سرویس نیز می‌شود. بازدید از چپ به‌راست از ماشینi ام شروع می‌شود و به‌ماشین$(i+k)$ ام می‌رسد و سپس دور می‌زند و در موقع بازدید از راست به‌چپ از ماشین $(i+k)$ ام شروع می‌کند و دوباره به‌ماشینi ام برمی‌گردد. در حالتی که ماشین‌ها همگن هستند تابع توزیع خرابی ماشین‌ها پواسن با مقدار متوسط و درحالتی که ماشین‌ها ناهمگن هستند، تابع توزیع خرابی ماشین i ام γ_i فرض می‌شود. زمان لازم برای اپراتور برای پیمودن فاصله بین دو ماشین متوالی، که شامل هر گونه بازرسی نیز می‌شود، برابر با ω فرض می‌شود.

در این مقاله مقدار کارایی ماشین‌ها را در حالت همگن و ناهمگن محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم با خط مشی دورهای تصادفی کارایی افزایش می‌یابد و نتایج قبلی بهبود می‌یابد.

این مساله به‌علت استفاده در زمینه‌های مختلف دارای تاریخچه ای طولانی است که ماسعی می‌کنیم برخی از آنها را که با زمینه کاری ما مربوط می‌شود، بیان کنیم. اولین بار Ashcroft [۱] در سال ۱۹۵۰ مساله $M/G/1/N$ را در نظرگرفت وآنرا فرمولبندی کرد. او در واقع همین مساله را وقتی زمان سرویس نمایی است در نظر گرفت و زمان لازم برای پیمودن ماشین‌ها یعنیω را صفر و زمان تعمیر همه ماشین‌ها را یکسان فرض نمود؛ اما درواقع زمان لازم جهت پیمودن دوماشین متوالی صفر نیست، در سال۱۹۵۷،Mack ، Webb، وMurphy [۸]، ونیز در سال ۱۹۷۳ Mack و Bunday [۲] تلاش کردند زمان پیمودن بین ماشین‌ها به‌طریقی در محاسبات خود منظور کنند و به‌این منظور روشهای متفاوتی را بکار گرفتند، این پژوهشگران دریکی روشهای خود مدل$M/D/1$ را در نظر گرفتند که برای مقادیر کوچکN مناسب بود ولی وقتی تعداد ماشین‌ها از حدود ده بیشتر می‌شد حجم محاسبات تا اندازه‌ای طولانی می‌شد. در سال ۱۹۸۵،Bunday،Spanekar وEl.Badri [۳] کارایی ماشین‌ها را به‌طور تقریبی برای هر تعداد ماشین محاسبه کردند این مساله در زمینه بکارگیری مدلهای کامپیوتری، که به اصطلاح Scan system گفته می‌شود، توجه تعداد زیادی از پژوهشگران را جلب کرد، در چنین مسائلی ماشینi ام به عنوان ایستگاهi ام و پیام‌های دریافتی آن ایستگاه، فرآیند پواسن وبا مقدار متوسط γ (γ_i) در نظر گرفته می‌شود. در چنین سیستمی هر پیامی که به یک ایستگاه اشغال شده وارد می‌شود از دست رفته تلقی می‌شود ونیز زمان پردازش پیام در ایستگاهi ام در حالت همگنc (در حالت ناهمگن ci)و زمان انتقال پیام مابین دو ایستگاه متوالی ω فرض می‌شود. از جمله پژوهشگرانی که در این زمینه کار کرده‌انداز Takagi[۱۱]-[۱۳] Coffmaو Hofri [۵]، Swartz [۱۰]،Gilbertو Coffman[۶]می‌توان نام برد.

مساله مورد بحث در سیستم‌های مخابراتی نیز بکار گرفته شده است و تاکنون مقالات زیادی درحالت‌های همگن و ناهمگن به چاپ رسیده است که در این جا تنها بهSzrik و Bunday [٤] اشاره می‌کنیم.

در سالهای اخیر در بحث فرآیندهای صف غیر متمرکز این مساله مورد توجه قرار گرفته است که این نوع صف‌ها در اقتصاد از اهمیت زیادی برخوردارند، برای توضیح بیشتر مثالی می‌آوریم. فرض‌کنید شرکتی چندین نوع‌کالا، مثلا کامپیوتر، تولید می‌کند، فرض کنید تعداد نامعلومی مشتری که هریک نوعی کالا به‌اندازه های مختلف سفارش می‌دهد وجود دارند، مثلا برخی از مشتریان تعدادی کامپیوتر نوع۱ وبرخی دیگرتعدادی کامپیوتر نوع ۲، و، ...سفارش می‌دهند از طرف دیگر تولید هر کامپیوتر نیاز به مواد و عناصر مختلفی دارد که برخی از آنها برای انواع کامپیوترها مشترک است. فرض کنید میزان تقاضا و زمان آماده سازی سفارشات توسط شرکت دارای توزیع نمایی است و، توجه داریم که نرخ تقاضا به‌طور کامل به‌مشتریان بستگی دارد و نمی‌تواند تحت تاثیر بازار باشد در حالی که نرخ سرویس یا تأمین سفارشات متأثر از بازار است. افزایش نرخ سرویس یا تأمین سفارشات به‌معنی افزایش سرعت تحویل کالا است. روشهای متفاوتی برای افزایش نرخ سرویس وجود دارد که پژوهشگران زیادی در آن کار کرده‌اند و برای این کار سعی می‌شود صف‌های متمرکز را به صف‌های غیرمتمرکز تبدیل کنند. مشکلی که در این روش وجود دارد تعداد زیاد صف‌های غیرمتمرکز موازی است که به‌طور تحلیلی تا کنون حل نشده است و اغلب از شبیه سازی در حل آنها استفاده می‌شود. ازجمله کسانی‌که از صف‌های غیرمتمرکز به‌روش الگوریتم‌های بازارمبنا کار کرده اند می‌توان Voos و Litz [١٤]، Falkو Spieckz [٧]، Rainerو Runkier [۹] اشاره کرد .

آنچه تاکنون در مورد کارایی ماشین‌ها مورد بحث قرار

گرفته است، محاسبه کارایی تنها در یک دور کامل بوده است، اما در عمل در کارخانه‌هایی نظیر کارخانه‌های ریسندگی که بویژه آنهایی که با نیروی انسانی اداره می‌شود، نیروی انسانی در تعمیر و نگهداری بجای دورکامل از دورهای تصادفی استفاده می‌کند، در این‌جا از این نوع روش برای محاسبه کارایی استفاده شده است و نتایج حاصل حاکی از بهبود نتایج قبلی است و در حالت خاص، یعنی یک دور کامل، نتایج قبلی حاصل می‌شود.

۲- مدل احتمالی سیستم

تعدادی کارگر یا ربات که ما در این‌جا آنها را اپراتور می‌نامیم‌مسئول بازرسی‌و راه‌اندازی N ماشین‌هستند، ماشین‌ها به‌طور خطی با فواصل یکسان در کنار هم قرار گرفته اند که آنها رااز چپ به‌راست با $1,2,\ldots,N$شماره گذاری می‌کنیم. روش بازدید باین ترتیب است که اپراتور کار خود را در طول خط از نقطه دلخواهی شروع می‌کند، در صورت لزوم، آن را بازرسی وسرویس می‌نماید و سپس در ادامه کار به ماشین بعدی می‌پردازد. این کار ممکن است تا انتهای خط ادامه یابد و ممکن است در هر نقطه دلخواه در امتداد ماشین‌ها به‌طور تصادفی دور زده شود و به عقب بر گردد وکار خودرا در جهت مقابل ادامه دهد و دو باره پس از بازرسی وسرویس یک یا چند ماشین بطور تصادفی دوربزند و این فرآیند را ادامه دهد. در هر صورت، در این جا فرض می‌شود طول خطی را که انتخاب می‌کند صرفنظر از این که از کدام ماشین شروع کرده است تصادفی است، برای مثال فرض کنید٤ =N، که در این صورت تمام بازدیدهای ممکن عبارتند از ۱۲۳٤، ۲۳٤، ۱۲۳، ۳٤، ۲۳، ۱۲. اگر برای مثال بازدید ۱۲۳ را در نظر بگیریم آن وقت منظور این است که ابتدا اپراتور ماشین ۱ را بازدیدمی‌کند و سپس به ماشین ۲واز آنجا به ماشین۳ می‌رود وسپس به عقب برمی‌گردد، ماشین ۲و۱ را بازدید می‌کند، توجه کنید که هرکدام از این بازدیدها را به تصادف و با احتمال یکسان انتخاب می‌کند. مدت زمان لازم برای قدم زدن اپراتور از یک ماشین تا ماشین بعدی مقدار ثابت ω فرض می‌شود.

مساله را در دو حالت همگن و ناهمگن به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. منظور از همگن این است که زمان لازم جهت بازرسی وسرویس ماشین‌های از کار افتاده و خراب شده برای همه آنها یکسان و مساویc در نظر می‌گیریم و فرض می‌شود خرابی ماشین‌ها به طور تصادفی در حین کار اتفاق می‌افتد و متوسط خرابی مقدار γ (γ_i) است، منظور از نا همگن این است که زمانهای لازم جهت بازرسی وسرویس ماشین‌های مختلف متفاوت‌است و برای ماشینi ام، c_i است و متوسط خرابی ماشین i ام γ_i است. هر ماشین در حین کار در فاصله زمانیδt با احتمال $\gamma\delta t+o(\delta t)$ و در حالت ناهمگن با احتمال $\gamma_i\delta t+o(\delta t)$، $1\le i\le N$، خراب می‌شود. به عبارت دیگر فاصله‌های زمانی خرابی‌ها دارای توزیع یکسان است. درنتیجه اگر ماشینی در زمان t درحال کار کردن باشد، احتمال این که بعد از گذشت فاصله زمانی δt باز هم در حالت کار باقی بماند $\exp(-\gamma\delta t)$ واحتمال این که منوقف شود$1-\exp(-\gamma\delta t)$ خواهد بود، در حالت نا همگن این‌احتمال به ترتیب $\exp(-\gamma_i\delta t)$ و$1-\exp(-\gamma_i\delta t)$ ، $1\le i\le N$، خواهند بود.

۳- حالت سیستم و توزیع احتمالی آن

ابتدا فرض می‌شود اپراتور از ماشین i ام،$1\le i\le N$ ، از چپ به‌براست شروع به‌حرکت می‌کند، و بازدید $(i,i+1,\ldots,i+k)$ را به طور تصادفی انتخاب می‌کند، که در آن $i+k\le N$، $i\ge 1$، $k\ge 1$. اپراتور بعد از ترک ماشین i ام به‌طرف ماشین $(i+1)$ ام حرکت می‌کند پس از بازدید آن در صورت لزوم آنرا سرویس و راه اندازی می‌کند. پس از در خط در آوردن آن به طرف‌ماشین $(i+1)$ ام حرکت می‌کند پس از بازدید آن در صورت لزوم آنرا سرویس وراه اندازی می‌کند. این عمل را تا ماشین$(i+k)$ ام ادامه می‌دهد، این عمل را بازدید یک‌طرفه چپ به‌راست تعریف می‌کنیم، بازدید یک‌طرفه راست به‌چپ رابه طریق مشابه تعریف می‌کنیم، اپراتور پس از ترک ماشین$(i+k)$ ام به سراغ ماشین $(i+k-1)$ام می‌رود و مانند قبل کار ادامه می‌یابد. از این رو، هربازدید یک طرفه‌چپ به‌راست ازیک بازدید یک طرفه راست به چپ نتیجه‌می‌شود و با توجه به خاصیت مارکفی به بازدیدهای قبلی بستگی ندارد.

با شماره گذاری ماشین ها از چپ به‌راست با $1,2,\ldots,N$ فرض کنید

$$P(u_i \mid u_{i+1},\ldots,u_{i+k}) \tag{۱}$$

احتمال یک بازدید یک طرفه چپ به‌راست را نشان دهد که در آن با ترک ماشین i ام در حالت u_i اپراتور ماشین$(i+1)$ ام را در حالت u_{i+1}،... و ماشین $(i+k)$ ام را در حالت u_{i+k} می‌یابد که در آن $u_j=0$ دلالت بر کارکردن و$u_j=1$ دلالت برخراب بودن‌ماشینj ام دارد$i \le j \le i+k$، ونیزفرض‌کنید$P(u_i|u_{i+1},\ldots,u_{i+k})$ احتمال این بازدید یک‌طرفه چپ به‌راست را در حالت پایدار نشان دهد. به طریق مشابه

$$P(v_{N-i+1},\ldots,v_{N-i-k+2} \mid v_{N-i-k+1}) \tag{۲}$$

احتمال بر خورد اپراتور با حالت

$(\nu_{N-i+1},\dots,\nu_{N-i-k+2} \mid \nu_{N-i-k+2})$

در بازدید یک‌طرفه راست به‌چپ را نشان می‌دهد، در حالت پایدار، واضح است که به علت تقارن سیستم

$$P(u_i \mid u_{i+1},\dots,u_{i+k}) = P(u_{i+k},\dots,u_{i+1} \mid u_i) \quad (۳)$$

بنابراین در هر بازدید حداکثر2N حالت ممکن احتمالی وجود دارد که باید به‌دست آورده شود. هر بازدید یک‌طرفه چپ به راست از یک بازدید یک‌طرفه راست به‌چپ نتیجه شده است، از این رو

$$P(A) = \sum_B P(A \mid B)P(B) \quad (٤)$$

که درآن،

A={ui|ui+1,…,ui+k} و B={vN-i+1,…,vN-i-k+2|vN-i-k+1)

ونیز P(A|B) احتمال آن که بازدید یک طرفه چپ به‌راست

$(u_i \mid u_{i+1},\dots,u_{i+k})$

بلافاصله بعد از بازدید یک طرفه راست به‌چپ

$(\nu_{N-i+1},\dots,\nu_{N-i-k+2} \mid \nu_{N-i-k+1})$

صورت گیرد، نشان می‌دهد .

این2k+1 معادله همراه با شرط

$$\sum_A P(A) = 1 \quad (٥)$$

احتمالات حالتهای سیستم را به‌طور منحصر به‌فردی مشخص می‌کند.

محاسبه احتمالات حالتهای سیستم به‌صورت زیر دنبال می‌شود: برا ی j امین ماشین i ≤j≤ i+k ، زمان دو بازدید متوالی یک طرفه چپ به‌راست و بازدید یک طرفه راست به‌چپ عبارت است از

$$T_j = 2(i+k-j)\omega + c(u_{i+2}+\dots+u_{j-1}) + c(\nu_{n-i+2}+\nu_{N-i+3}), \quad j=i,\dots,i+k \quad N-k \ge i \ge 1 \quad (٦)$$

اگر Pij(ui|vN-j+1) احتمال یافتن ماشین j ام در حالت uj در یک بازدید یک طرفه چپ به‌راست باشد به‌شرط آن که حالت قبلی آن در بازدید راست به‌چپ بلافاصله قبل از آن vN-j+1 است، در این صورت

$$P_{rj}(0|0) = \exp(-\gamma T_j), P_{rj}(1|0) = 1-\exp(-\gamma T_j)$$
$$P_{rj}(0|0) = Q\exp(-\gamma T_j), P_{rj}(1|1) = 1-Q\exp(-\gamma T_j) \quad (٧)$$

برای حالت j=i+k احتمال یافتن ماشین (i+k) ام در حالتui+k به‌شرط آن‌که حالت قبلی آن در بازدید یک طرفه راست به‌چپ بلا فاصله قبل از آن vN-i-k+1 بوده است، داریم

$$P_{i+k}(0|0) = \exp(-\gamma T_{i+k})$$
$$P_{i+k}(1|0) = 1-\exp(-\gamma T_{i+k})$$
$$P_{i+k}(0|1) = 0, P_{i+k}(1|1) = 1 \quad (٨)$$

اگرj=i، آنگاه احتمال ترک کردن ماشین i ام در حالت ui که حالت قبلی آن در بازدید یک طرفه راست به‌چپ بلافاصله قبل از آن vN-i-k+1 بوده باشد، را بررسی می‌کنیم :

$$P_i(0|0) = 1, P_i(1|0) = 0$$
$$P_i(0|0) = Q, P_i(1|1) = 1-Q \quad (٩)$$

اکنون با بکار گیری نتایج (٥)و(٨) احتمالات

$$P(A|B) = \prod_{j=1}^{i+k} P_j(u_j \mid \nu_{N-j+1}), \quad i=1,2,\dots,N-k \quad (١٠)$$

را می‌توانیم محاسبه کنیم. بنابراین 2k+1 معادله از رابطه (٤) به‌ازای j=i,…,i+k و به‌ازای هر i می‌توانیم برقرار کنیم که همراه با شرایط (٥) حل می‌شود. قابل ذکر است که درحالت ناهمگن در روابط (٧)تا (٩) به جای پارامتر γ از پارامتر γi استفاده می‌شود.

٤- محاسبه کارایی در حالت همگن

کارایی با رابطه بسیار ساده‌ای با متوسط زمان بازدید ارتباط پیدا می‌کند. متوسط زمان بازدید با معلوم بودن P(ui,…ui+k)به نوبه خود قابل محاسبه است. اگر ρi,i+k کارایی ماشین‌ها در دراز مدتT در بازدید تصادفی ماشینi تاماشینi+k باشد ، آنگاه جمعاً (k+1)ρi,i+kT ساعت‌کار وجود خواهد داشت. از این رو زمانی که صرف سرویس و راه اندازی می‌شود برابر است با γc(k+1)ρi,i+kT و زمانی که صرف قدم زدن شده است برابر باT-γc(k+1)ρi,i+kT. بنابراین تعداد ماشین بازدید شده در زمان T برابر است با

$$\frac{T(1-\gamma(k+1)\rho_{i,i+k}c)}{\omega} \quad (١١)$$

بنابراین متوسط زمان یک بازدید عبارت است از

$$\tau_{i,i+k} = \frac{k\omega}{1-\gamma(k+1)\rho_{i,i+k}c} \quad (١٢)$$

که در آن،

$$\rho_{i,i+k} = \frac{\tau_{i,i+k} - k\omega}{\gamma(k+1)c\tau_{i,i+k}} \quad (١٣)$$

اکنون اگر تعداد سرویس انجام شده دریک بازدید (ui,…,ui+k) را به صورت:

$$S(u_1,...,u_{i+k})=\sum_{j=i}^{i+k}u_j \tag{۱۴}$$

تعریف کنیم، آنگاه

$$\tau_{i,i+k}=k\omega+c\sum_{\{u_i,...,u_{i+k}\}}P(u_i,...,u_{i+k})S(u_1,...,u_{i+k}) \tag{۱۵}$$

از این رو $\tau_{i,i+k}$ و از آنجا $\rho_{i,i+k}$ قابل محاسبه است. اما $\rho_{i,i+k}$ کارایی ماشین در طول یک بازدید $u_i,...,u_{i+k}$ است. با توجه به اینکه تعداد بازدیدهای تصادفی مختلف است، طبیعتاً در هر بازدید تعداد ماشین‌ها هم متفاوت است. با در نظر گرفتن انتخاب تصادفی بازدیدهای با توزیع یکسان داریم،

$$\rho=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}(N-i)^{-1}\sum_{k=1}^{N-i}\rho_{i,i+k} \tag{۱۶}$$

که در آن به‌ازای هر i، $1\le i\le N-1$، $(N-i)$ تعداد دورهایی را نشان می‌دهد که از i شروع می‌شود به $N-i$ ختم می‌شود و نیز $N-1$ تعداد متوسط مجموعه دورها را بیان می‌کند.

۵- محاسبه کارایی در حالت نا همگن

همانطورکه در ابتدای بحث آمد هر بازدید تصادفی وقتی شروع می‌شودکه‌اپراتورقصدبازدیدماشین $(N-k-i+1)$ ام رادارد ووقتی پایان می‌یابدکه به‌ماشین $(i+k)$ ام یا $(N-k-i+1)$ ام رسیده باشد. از این رو هر بازدید تصادفی شامل k ماشین می‌شود. اگر بازدید تصادفی از ماشین i ام شروع شود، بازدید تصادفی بعدی بلافاصله بعد از آن از ماشین $(i+k)$ ام شروع خواهد شد و این عمل ادامه خواهد یافت .

فرض می‌کنیم p_m، $i\le m\le i+k$، احتمال این باشد که در حالت پایدار ماشین m ام در یک بازدید تصادفی چپ به‌راست در حال کار دیده شود، با استفاده از تقارن سیستم احتمال این که ماشین m که در یک بازدید راست به‌چپ در حال کار دیده شود عبارت است از:

$$p'_m=p_{N+1-m},\ m=i,i+1,...,i+k \tag{۱۷}$$

که در آن،

$$p_m=\sum^{(m)}P(u_i|u_{i+1},...,u_{i+k}) \tag{۱۸}$$

در اینجا نماد $\sum(m)$ کلیه‌ی حالتهایی را نشان می‌دهد که در آن ماشین m در کار است. به ازای $i\ge 2$ یک دور چپ به‌راست ماشین m، $(i\le m\le i+k)$ را به‌صورت زمان سپری شده بین حرکت اپراتور از ماشین m تا ماشین m از طریق i تعریف می‌کنیم. دورچپ به‌راست ماشین m،شامل زمان تعمیرآن ماشین‌هایی که در دو بازدید متوالی ماشین m متوقف بوده اند(درصورت وجود) نمی‌شود. دورراست به‌چپ ماشین m به‌طریق مشابه به‌صورت زمان سپری شده بین حرکت اپراتور از ماشین m تا ماشین m از طریق ماشین $i+k$ تعریف می‌کنیم. تقارن سیستم ایجاب می‌کند که دور چپ به‌راست ماشین m و دور راست به‌چپ ماشین $N-m+1$ در حالت پایدار هم توزیع یکسان داشته باشند. اکنون متغیرهای تصادفی T_{jm} رابه‌صورت

$$t_{jm}=2(m-1)+\sum_k c_k,\ j=1,2,...,M_m,\ m\ge i\ge 2 \tag{۱۹}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $\sum_k c_k$ کل زمان تعمیر آن ماشین‌هایی است که در دو بازدید متوالی متوقف بوده‌اند .با فرض این که در دور راست به‌چپ، ماشین m در حال کار دیده شود احتمال اینکه دور چپ به‌راست و راست به‌چپ مقدار t_{jm} زمان نیاز داشته باشد را به‌ترتیب با $\upsilon(t_{jm})$ و $\omega(t_{jm})$ نشان می‌دهیم. واضح است که:

$$\sum_{j=1}^{M_m}\upsilon(t_{jm})=\sum_{j=1}^{M_m}\omega(t_{jm})=1 \tag{۲۰}$$

احتمال اینکه دور چپ به‌راست ماشین m مقدار t_{jm} را بگیرد، عبارت است از:

$$\begin{aligned}u(t_{jm})&=p_{N-m+1}\upsilon(t_{jm})+Q(1-p_{N-m+1})\omega(t_{jm})\\&=p'_m\upsilon(t_{jm})+Q(1-p'_m)\omega(t_{jm})\end{aligned} \tag{۲۱}$$

اکنون کارایی سیستم در n دور یعنی E_n عبارت است از نسبت تولید واقعی در n دور بر ماکزیمم تولید ممکن در n دور. آنگاه اگر T_i زمان دور i ام باشد داریم

$$E_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\omega_{i\ell}}{k\sum_{i=1}^{n}T_i} \tag{۲۲}$$

بنابراین کارایی در حالت پایدار عبارت است از

$$E=\lim_{n\to\infty}E_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{n}} \tag{۲۳}$$

حالا با استفاده از قانون اعداد بزرگ می‌دانیم که

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\omega_{ij}}{n}=\omega_{av}(j) \tag{۲۴}$$

که در آن $\omega_{av}(j)$ میانگین زمان کار j امین ماشین دریک دور

را نشان می‌دهد. همچنین

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{n}=T_{av} \qquad (۲۵)$$

که در آن Tav میانگین زمان یک دور را نشان می‌دهد.

اکنون میانگین زمان‌کار ماشین m ام در دور چپ به‌راست عبارت است از:

$$R_m = p_{N+1-m}\times\sum_{j=1}^{M_m}\upsilon(t_{jm})\{\int_0^m \gamma_m t e^{-\gamma_m t}dt\}$$

$$+t_{jm}\exp(-\gamma_m t_{jm})+Q(1-p_{N+1-m})\times\sum_{j=1}^{M_m}\omega(t_{jm})\times$$

$$\{\int_0^{t_{jm}} t\gamma_m e^{-\gamma_m t}dt+t_{jm}\exp(-\gamma_m t_{jm})\}$$

$$=p_{N+1-m}\sum_{j=1}^{M_m}\upsilon(t_{jm})\times(\frac{1-\exp(-\gamma_m t_{jm})}{\gamma_m})$$

$$+Q(1-p_{N+1-m}\times\sum_{j=1}^{M_m}\omega(t_{jm})\times(\frac{1-\exp(-\gamma_m t_m)}{\gamma_m})$$

$$=\frac{p_{N+1-m}+Q(1-p_{N+1-m})-p_m}{\gamma_m}$$

$$=\frac{Q(1-p_{N+!-m})}{\gamma_m}$$

که در آن،

$$p_m = p_{N+1-m}\times\sum_{j=1}^{M_m}\upsilon(t_{jm})\exp(-\gamma_m t_{jm})$$

$$+(1-p_{N+1-m})\times Q\sum_{j=1}^{M_m}\omega(t_{jm})e^{-\gamma_m t_{jm}}$$

بنا براین

$$\omega_{av}(m)=R_m+R_{N+1-m} \quad ;1+i\le m\le i+k-1$$

اما،

$$\omega_{av}(i)=\omega_{av}(i+k)=R_{i+k}$$

در نتیجه

$$\sum_{m=1}^{i+k}\omega_{av}(m)=Q\sum_{m=1}^{i+k}\frac{(1-p_m)}{\gamma_m} \qquad (۲۶)$$

بنا براین

$$E_{i,i+k}=\frac{Q\sum_{m=1}^{i+k}(\frac{1-p_m}{\gamma_m})}{k\tau_{i,i+k}} \qquad (۲۷)$$

که در آن Ei,i+k کارایی ماشین در دور i-- k و τi,i+k میانگین زمان لازم برای اپراتور در دور مزبور است. از این رو

$$\tau_{i,i+k}=(k-1)\omega+$$

$$\sum_{\{u_i|u_{i+1},\ldots,u_{i+k}\}}P(u_i\,|\,u_{i+1},\ldots,u_{i+k})\times\sum_{j=i+1}^{i+k}c_j u_j$$

$$=(k-1)\omega+\sum_{j=i+1}^{i+k}c_j(1-p_j) \qquad (۲۸)$$

حال کارایی کل سیستم را بصورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$E=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{N-i}\sum_{k=1}^{N-i}E_{i,i+k} \qquad (۲۹)$$

۶- روش محاسبه

در محاسبه عددی، برای سهولت، حالت همگن را در نظر می‌گیریم و آن را در مورد بحث قرار می‌دهیم. حالت ناهمگن به مراتب مشکل‌تر و محاسباتی پیچیده‌تر دارد. با استفاده از فرمول (٤) به‌معادله‌ای به‌صورت Ax=x می‌رسیم که باید آنرا حل کنیم، که در آن x=P(u1,…,uN) و A ماتریس ضرایب است.

برای‌روشن‌تر شدن ماتریس A فرض کنید

$$Q\ne 1, b=e^{-\gamma c}, a=e^{-\gamma\omega}, N=2 \qquad (۳۰)$$

در این صورت

$$A=\begin{bmatrix} a^2 & Qa^2b & 0 & 0\\ 1-a^2 & Qa^2b & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1-Q)a^2b & 0\\ 0 & (1-Q)(1-a^2b) & 0 & 1-Q\end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

که در این جا

$$x=(p(0\,|\,0),p(0\,|\,1),p(1\,|\,0),p(1\,|\,1))$$

مولفه‌های اول تا چهارم نظیر با ستون های اول تا چهارم ماتریس A هستند. از این رو مسئله ما به حل معادله Ax=x منجر می‌شود. برای حل معادله ابتدا A*x=0 را در نظر می‌گیریم که در آن A*=A-I ، در نتیجه

$$\ldots, x_3=\frac{|A^*13|}{|A^*11|}x_1 \,،\, x_2=\frac{|A^*12|}{|A^*11|}x_1$$

با توجه به

$$\sum_{i=1}^{N}x_i=1$$

بردار x مشخص می‌شود، پس از آن

$$S(u\ ,u_2,\ldots,u_N)=\sum_{j=1}^{N}u_j$$

را محاسبه می‌کنیم و با استفاده از فرمول

$$\rho_{1,N}=\frac{(N-1)\omega}{\gamma Nc\tau_{1,N}} \qquad (۳۲)$$

کارایی یک بازدید کامل به‌دست می‌آید. به‌طریق مشابه $\rho_{i,i+k}$ را به‌ازای بازدیدهای تصادفی با طول‌های $k,\ldots,3,2$ را به‌طور جداگانه برای هر کدام محاسبه می‌کنیم و سپس از فرمول (۱۶) کارایی کل سیستم محاسب می‌شود. نتایج عددی بر حسب $Q=1, N\gamma\omega, \gamma c$ برای $N\leq 8$ به‌صورت جدول(۱) حاصل می‌شود .

۷- نتیجه گیری

نتایج عددی نشان می‌دهد کارایی به‌دست آمده نسبت به‌آنچه تاکنون گزارش شده به‌مراتب بالاتر است؛ در حالی که سیستم با مدلهای واقعی هماهنگی بیشتری دارد. آنچه تاکنون گزارش شده است فقط کارایی سیستم $\rho_{1,N}$ برای یک بازدید کامل است. پر واضح است که در صنایعی که صرفاً از کارگر استفاده می‌کنند لزوماً اپراتور تا انتهای خط به‌طور کامل حرکت نمی‌کند، بلکه به‌طور تصادفی از هر نقطه ای دلخواه دور می‌زند و بازرسی خود را ادامه می‌دهد.

در جدول (۱) کارایی ماشین در یک دور کامل با خط مشی جدید نشان داده شده است، ثابت شده است کارایی فقط به‌عوامل $N\gamma\omega$، γc بستگی دارد [۳]. نکته دیگری که در نظر گرفته شده است عامل احتمال موفقیت ربات در هر بار تعمیر ماشین یعنی Q است، در حالتی که کارگر مورد نظر باشد، $Q=1$ فرض شده است در این مقاله کارایی سیستم را در حالت کلی مورد بررسی قرار داده‌ایم به طور یکه $\rho_{1,N}$، تنها حالتی که تا کنون بررسی شده، حالت خاص آن است و کارایی سیستم را فقط در یک دور کامل محاسبه می‌کند در دنیای واقعی، وقتی دو اپراتور مسئول سرویس تعدادی ماشین که به‌طور خطی در کف کارخانه نصب شده‌اند می باشند و هر اپراتور مسئول بخشی از خط است، محاسبه کارایی از اهمیت ویژه‌ای بر خوردار است. زیرا، هر اپراتور تعمیر و نگهداری تعداد کمتری ماشین نسبت به تعداد کل ماشین‌ها را به‌عهده دارد، در نتیجه گمان می‌رود این رویه سبب افزایش کارایی سیستم می‌شود. این مطلب موضوع تحقیق بعدی مولفین است که پیش‌بینی می‌شود، صرفنظر از محدودیت‌های مکانیکی‌که برای طراحی چنین سیستمی می‌توان تصورکرد، بسیار مفید باشد.

جدول(۱) : کارایی ماشین‌ها در یک دور کامل

N	$N\gamma$ $\omega\rightarrow$ $\gamma c\downarrow$	.00	.05	.10	.15	.20	.25
2	0.00	100	97.45	95.16	92.86	90.66	88.48
3		100	97.45	94.99	92.62	90.23	88.12
4		100	97.39	94.86	92.44	90.1	87.85
5		100	97.34	97.77	92.30	89.92	87.64
6		100	97.29	94.69	92.18	89.77	87.4
7		100	97.25	94.60	92.11	89.65	87.32
8		100	97.22	94.56	92.00	89.55	87.19
2	.05	95.13	79.92	90.54	88.36	86.26	84.25
3		95.09	92.63	90.26	87.99	85.80	83.7
4		95.04	92.48	90.02	87.67	85.41	83.25
5		95.00	92.34	89.80	87.38	85.06	82.84
6		94.95	92.20	89.59	87.10	84.72	82.45
7		94.90	92.93	86.40	86.83	84.41	82.09
8		94.85	91.93	89.21	86.57	84.09	81.74

۸- مراجع

[1] Ashcroft,H;"Productivity of several machines *under the care of a operator*", Journal of the Royal Stistical Society, B12, 1950(145-151)

[2] Bunday B.D; Mack,C"The efficiency of bi-statistical *directionally traversed machines*", Journal of Royal society 22,74-81,(1973).

[3] BundayB.D.;Spankar R.E; El-Badri;, *"The efficiency of bi - directionally machines when repairs are not always successful*",Eur.J.op.Res.19 324-330,1985.]

[4] Bunday,B.D; Sztrik,J; *"The maintenance of bi- directionally patrolled machines*", IMA Journal of Mathematics applied in business industry (1992) 3,337-386

[5] Coffman E.G; Hofri, M; *"On the expected performance of scanning disks* ",SIAM Journal of compution,(1982),60.

[6] Coffman.E.G; Gilbert; *"polling and greedy services*",queueing systems/2/115-145, 1987.

[7]Falk,J;Spieckz; *"Weigelt,M.,Mertens,p. "Cooperative and competitive approaches with agents in logistics and production*", Thirteenth International conference. Artificial Intelligence, Expert systems Natural language proceedings ,France p-519-528 (1993)

[8] Mack.C; Murphy.T; Webb.N.L, *" The efficiency of N machines uni-directionlly patrolled by one operative when walking times and repair times are constants*", Journal of Royal statistical society B19(1957)166-1720.

[9] Rainer, P;Runkier,T; *"Multi-agent control of Queuing processes."*, 15th triennial world congress, Barcelona, Spain,(2002).

[10] Swartz, G.B; *"Analsis of a scan policy in agaled loop System "*, In applied Probability computer science, meferfac, Vol.2 (R.L.Disney, T.J.oth.Eds) Birkhauser Boston, pp.241-52.1982.

[11] Takagi,H; *"Analysis of polling systems"*, The Mit.Press.cambridge Massachusets, 1986.

[12] Takagi,H; *"Analysis of single*-buffer polling *systems"*,TRL Research Report,TR87- 0043,IBM.Research Laboratory ,Tokyo,1988.

[13] Takagi,H; "Queueing analysis of polling models*: An update. In stochastic analysis of computer and communication systems*, Ed.Takagi H.North-Holland, Amsterdam, 1990.

[14] Voos, H;Litz, L.A; *" new approach for optimal control u sing market-control"*, conference of European, Karlsruhe,(1999).