# زمان بهینه تعمیر یا تعویض قطعات دستگاه‌ها

اسماعیل خرم[i] ؛ صادق رضائی[ii]

## چکیده

در این مقاله پس از معرفی فرآیند تجدید بویژه فرآیندهای پواسن همگن و ناهمگن و نیز معرفی مدل‌های Kijima[۲]، تابع هزینه برای برخی از مدل‌های آماری نظیر توزیع ارلنگ، وایبل و نمایی به دست می‌آید، سپس با استفاده از تابع نرخ شکست و تابع هزینه بهترین تابع چگالی احتمال برای طول عمر تعویض‌های متوالی ارلنگ و وایبل، معرفی می‌شود به نحوی که تابع هزینه به ازای آنها بهینه شود. در بررسی توزیع وایبل چند معادله با هدف بهینه کردن هزینه حاصل می‌شود که باید با روش‌های عددی آنها را حل کرد.

## کلمات کلیدی

فرآیند های تجدید؛ فرآیندهای تجدید کلی؛ تعمیر کامل؛ تعمیر ناقص؛ تعمیر مینیمم.

# *Optimum time of Repair or Replacement of Equipments*

Esmaile Khorram ; Sadegh Rezaei

***ABSTRACT***

In this paper, the renewal process, for the homogeneous and non-homogeneous Poisson process as well as Kijima models, are reviewed. Given the distribution function of time of the successive repair time's form, the corresponding cost function is defined. Then, using the failure function the optimal time of repair is achieved.

***KEYWORDS***

Perfect Repair; Imperfect Repair; Renewal Process; Homogeneous Poisson Process; Non-homogeneous Poisson Process;

## ۱- مقدمه

مدل‌های معمول ومورد استفاده در تحلیل داده‌های سیستم‌های تعمیرپذیر مدل Perfect Renewal Process (PRP)، یا تعمیر کامل و مدل Non-homogeneous Poisson Process (NHPP) یا تعمیر مینیمم است. در واقع، بیشتر فعالیت‌های تعمیر به‌صورت تعمیر کامل یا تعمیر مینیمم نیست؛ بلکه در عمل چیزی بین این دو عمل غایی است که تعمیر کلی یا تعمیر ناقص (Imperfect) Repair) گفته می‌شود. وقتی سیستم‌های تعمیر پذیر خراب می‌شوند به ناچار باید تعمیر یا تعویض شوند و دوباره در خط قرار گیرند. این‌گونه تعمیرات رفتار کلی سیستم را بسته به نوع تعمیر تغییر می‌دهند. اساساً دو گروه تعمیر و نگهداری وجود دارد: تعمیر سیستم‌هایی که فعالیت آنها کاملاً متوقف شده و تعمیر پیشگیرانه. هرکدام از دو گروه بسته به میزان تعمیر به یکی از خط مشی‌های زیر مربوط می‌شود:

الف) تعمیر و نگهداری کامل ؛ به تعمیری اتلاق می‌شود که سیستم بعد از تعمیر و تعویض بخوبی یک سیستم نو کار کند.

[i] استادیار دانشگاه صنعتی امیر کبیر ؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر؛ گروه آمار : eskhor@aut.ac.ir

[ii] استادیار دانشگاه شهید چمران اهواز؛ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر؛ گروه آمار : srezaei@aut.ac.ir

ب) تعمیر و نگهداری مینیمم؛ به‌تعمیری گفته می‌شود که سیستم بعد از تعمیر و تعویض به‌همان شرایط قبل از تعمیر بر گردد.

ج) تعمیر و نگهداری ناقص؛ به تعمیری گفته می‌شود که سیستم بعد از تعمیر در شرایطی بین شرایط الف و ب قرار گیرد.

د) تعمیر و نگهداری بدتر؛ به تعمیری گفته‌می‌شود که سیستم بعد از تعمیر و تعویض به شرایطی بد تر از شرایط قبل از تعمیر تبدیل شود [۱۴].

درتئوری فرض می‌شود که سیستم بعد از هر بار تعمیر یا تعمیر پیشگیرانه بخوبی یک سیستم نو کار می‌کند یا حداقل بخوبی شرایط قبل از تعمیر بر می‌گردد؛ اما این دو وضعیت در عمل کمتر کاربرد پیدا می‌کند و بیشتر فعالیت‌های تعمیر و نگهداری منحصر به‌آنها نمی‌شود؛ بلکه ممکن است شرایطی بین شرایط وضعیت نو و شرایطی بخوبی شرایط قبل از تعمیر پیدا کند که این همان تعمیر ناقص است که اشاره شد. مدل بندی تحلیل سیستم‌های تعمیر پذیر با شیوه تعمیر ناقص، همان‌طور که Guo، Ascher و Love [۷] شرح داده‌اند، به‌واسطه کاربردهای زیاد مورد توجه محققین قرار گرفته است. Kijima [۱۰] و [۸] دو مدل احتمالی در این مورد پیشنهاد کرده است. مدل $I$ فرض می‌کند که تعمیرات تنها روی آخرین دوره تعمیر اثر گذار است و در دوره‌های قبل از آن اثری ندارد، مدل $II$ فرض می‌کند که تعمیرات روی تمام دوره‌های قبلی اثر گذار است. علی‌رغم نتایج حاصل از این دو مدل شکل تحلیلی آنها به واسطه پیچیدگی روابط ریاضی در دست نیست و حتی دسترسی به جواب‌های عددی آنها بسیار مشکل است. بر اساس کار Kijima [۱۰] و Sumita و همکاران [۹]، یک جواب تقریبی برای مدل $I$ با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو پیشنهاد کردند. Yanez و همکاران [۱۶] با ترکیب روش مونت کارلو و روش عددی برآورد درستنمایی احتمال مدل $I$ را به‌دست آوردند. Mettas و Zhao [۱۳] مدل $II$ را مورد بحث قرار دادند و فرمول تابع درستنمایی سیستم‌های تکی و چند تایی را به‌دست آوردند. Scarsini و Shaked [۱۵] مدل $I$ را وقتی میزان تعمیر، $q$، است توسعه دادند، که در آن $q$ درجه یا میزان $n$ امین تعمیر را نشان می‌دهد. Love و Guo [۵]،[۶] و Love و Guo [۱۱]،[۱۲] استنباط آمار مدل‌های با تعمیرات ناقص را بررسی کردند. Khalil و Chukova [۱]،[۲] و نیز Chukova [۳] این مدل‌ها را با رویه تعمیرات ناقص از دیدگاه هزینه‌های محصولات گارانتی‌دار مطالعه کردند، Dmiitrovlng [۴] مدل $I$ را با رویه تعمیرات ناقص وقتی، $q>1$ به‌منظور مدل بندی هزینه‌های محصولات گارانتی دار بحث و بررسی کرد.

در این مقاله بعد از معرفی مساله، در بخش [۲] فرآیند تجدید و فرآیندهای پواسن همگن و نا همگن و مدل‌های $I$ و $II$ بازگو و سپس در بخش [۳] پس از معرفی تابع نرخ شکست تابع هزینه تعویض قطعات معرفی می‌شود و آن‌گاه در بخش [۴] کار اصلی و هدف مقاله؛ یعنی، زمان بهینه تعویض برای توزیع‌های مختلف عمر برای اولین بار محاسبه می‌گردد. پس از بحث و بررسی توزیع‌های ارلنگ و وایبل به‌ازای $0<\beta<1$ مناسب جهت انتخاب طول عمر فواصل متوالی تعویض قطعات تشخیص می‌دهیم و سرانجام در بخش [۵] نتیجه گیری‌می‌کنیم.

قبل از شروع بخش بعدی فرض می‌کنیم توزیع زمان اولین خرابی معلوم است و از داده های موجود می‌توان آن را بر آورد کرد و نیز مدت زمان تعمیر یا تعویض قابل اغماض است به‌نحوی که خرابی‌ها را بتوان به‌صورت یک فرآیند نقطه ای در نظر گرفت.

## ۲- فرآیند های تجدید و پواسن همگن

اگر یک سیستم در سرویس را بتوان در هرتعمیر به طریقی تعمیر کرد که بخوبی سیستم نو باشد، آن وقت آن فرآیند تعمیر را فرآیند تجدید می‌گویند. در فرآیندهای تجدید زمان‌های بین تعمیرات مستقل و هم توزیع هستند.

فرآیند همگن پواسن حالت خاصی از آن است که در آن زمان‌های بین تعمیرات مستقل و هم توزیع نمایی هستند. $N(t)$ تعداد پیشامدها تا زمان $t$ یک فرآیند شمارشی پواسن با پارامتر $\lambda > 0$ است اگر:

۱) $N(0)=0$

۲ فرآیند دارای نموهای مستقل باشد،

۳) تعداد خرابی ها در فاصله ای به طول توزیع پواسن با پارامتر $\lambda t$ باشد

توزیع تعداد پیشامدها در $(t_1,t_2]$ دارای پواسن با پارامتر $\lambda(t_1-t_2)$ با تابع جرم احتمال زیر است:

$$P(N(t_2)-N(t_1)=n)=\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^n}{n!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}, n=0,1,2,\ldots \quad (1)$$

تعدادخرابی‌ها موردانتظار تا زمان $t$ عبارت است از $E(N(t))=\lambda t$، که در آن $\lambda$ متوسط میزان رخداد خرابی‌ها در واحد زمان است.

اگر $X_1, X_2,$ متغیرهای تصادفی نمایی مستقل هم‌توزیع باشند، آن وقت $N(t)$ از فرآیند پواسن پیروی می‌کند.

## ۲-۱- فرآیند پواسن نا همگن

یک دسته کلی از فرآیندهای تصادفی‌مهندسی قابلیت اعتماد فرآیند پواسن ناهمگن است که به‌طور موفقیت آمیزی در مطالعه مسائل سخت افزاری مهندسی قابلیت اعتماد به‌کار گرفته شده است. مدل‌های ناهمگن، به‌ویژه، در توصیف فرآیندهای خرابی که روند معینی دارند نظیر افزایش یا کاهش اعتماد مفید هستند. تعداد خرابی‌ها تا زمان $t$، $N(t)$ را می‌توان با فرآیند نا همگن بیان کرد، در این صورت

$$P(N(t)=n)=\frac{[\Lambda(t)]^n}{n!}e^{-\Lambda(t)}, n=0,1,2,...$$

$\Lambda(t)$ تابع میانگین است. این تابع متوسط تعداد خرابی‌ها را بیان می‌کند.

فرآیند نا همگن از فرض‌های زیر پیروی می‌کند:

۱) $N(0)=0$

۲) $\{N(t), t\geq 0\}$ دارای نموهای مستقل هستند

۳) $\{N(t+h)-N(t)=1\}=u(t)+o(h)$
( که در آن $\lim_{h\to 0} o(h)=0$ )،

۴) $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$

احتمال این که دقیقاً $n$ پیشامد در $[a,b)$ واقع شود عبارت است از:

$$P(N(b)-N(a)=n)=\frac{[\int_a^b u(t)dt]^n}{n!}e^{-\int_a^b u(t)dt}, n=0,1,2,.. \quad (۲)$$

تابع $u(t)$ ضریب تراکم خرابی (failure intensity) است. با مفروض بودن $u(t)$ تابع مقدار میانگین $\Lambda(t)=E(N(t))$ در

$$\Lambda(t)=\int_0^t u(s)ds \quad (۳)$$

صدق می‌کند و برعکس با مفروض بودن $\Lambda(t)$، تابع $u(t)$ را می توان از طریق $u(t)=d\Lambda(t)/dt$ به‌دست آورد.

یکی از معمول‌ترین فرم ضریب تراکم خرابی مورد استفاده در سیستم تعمیرپذیر به‌صورت $u(t)=\lambda\beta t^{\beta-1}$ و $E(N(t))=\lambda t^{\beta}$ است، که در آن $N(t)$ تعداد خرابی‌های مشاهده شده در فاصله $(0,t)$ و $u(t)$ ضریب تراکم خرابی و $\lambda>0$ و $\beta>0$ پارامترهای مدل است.

## ۲-۲- فرآیند تجدید کلی

### الف) - مدل I

Kijima و همکاران [۱۰]و [۸] مدل تعمیر ناقص را با استفاده از فرآیند سن متغیر یک سیستم تعمیر پذیر معرفی کردند. با فرض این که سیستم بلافاصله بعد از $(n-1)$ امین تعمیر دارای سن متغیر $V_{n-1}=y$ است، آن‌وقت زمان $n$ امین تعمیر، $X_n$، دارای توزیع زیر است:

$$P(X_n\le x\mid V_{n-1}=y)=\frac{F(x+y)-F(y)}{1-F(y)} \quad (۴)$$

که در آن $F(x)$ تابع توزیع زمان خرابی یک سیستم جدید است. سن واقعی سیستم

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i \quad (۵)$$

است. اکنون فرض کنید که $q$ درجه $n$ امین تعمیر باشد که در آن $V_0=0, 0\le q\le 1$، آن وقت با توجه به این که $n$ امین‌تعمیر حالت سیستم قبل از $(n-1)$ امین تعمیر را تحت تاثیر قرار نمی‌دهد، سن متغیر سیستم بعد از $n$ امین تعمیر عبارت است از:

$$V_n=V_{n-1}+qX_n \quad (۶)$$

از این رو:

$$V_n=q(X_1+X_2+...+X_n) \quad (۷)$$

### ب) - مدل II

یک سیستم تعمیر پذیر در زمان $t=0$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $t_1, t_2,...$ زمان‌های تعمیر متوالی را نشان دهد و نیز $x_1, x_2,...$ فاصله زمانی بین تعمیرهای متناظر باشد. بنابر این $x_i=t_i-t_{i-1}$ که در آن برای سهولت $t_0=0$ انتخاب می‌شود. دنباله $t_1, t_2,...$ زمان‌های متوالی خرابی و دنباله $x_1, x_2,...$ طول زمان خرابی‌های متوالی متناظر اطلاعات یکسانی درباره تحقق یک فرآیند بخصوص فراهم می‌آورند. در مدل I فرض کردیم $n$ امین تعمیر تنها در$(n-1)$ امین تعمیر در سیستم اثر گذار است و در تعمیرات قبلی سیستم اثری ندارد. در عمل، نه تنها $n$امین تعمیربه$(n-1)$ امین تعمیر بلکه به‌تمام تعمیرهای قبلی نیز وابسته است. از این رو فرض می‌کنیم عمل تعمیر سیستم را تا $n$امین تعمیر تحت تاثیر قرار می‌دهد، در نتیجه سن متغیر بعد از $n$ امین تعمیر عبارت است از:

$$V_n=q(V_{n-1}+x_{n-1}) \quad (۸)$$

که در آن $q$، $0\le q\le 1$، درجه $n$ امین تعمیر را نشان می‌دهد. بنابراین:

$$V_0 = 0, V_1 = qx_1, V_2 = q(qx_1 + x_2), \ldots, \quad V_n = q(q^{n-1}x_1 + q^{n-2}x_2 + \ldots + x_n) \qquad (۹)$$

با فرض این که سیستم بلافاصله بعد از $(n-1)$ امین تعمیر دارای سن متغیر $V_{n-1}=y$ است، آن وقت زمان $n$ امین تعمیر $X_n$ همانند بخش [۲-۲] دارای چگالی احتمال (۱) است.

واضح است که $q=0$ تعمیر کامل و $q=1$ تعمیر مینیمم و حالت $0<q<1$ تعمیر ناقص را در حالت خاص نتیجه می‌دهد، و نیز $q>1$ به تعمیر بدتر منجر می‌شود.

اکنون بعد از توضیح مختصر فرآیندهای مرتبط، فرآیند تجدید $\{N(t): t\geq 0\}$، متغیر تصادفی $X_n$ را طول‌فاصله زمانی بین $(n-1)$ امین و $n$ امین تعویض در نظر بگیرید- عمل تعویض خود یک نوع تعمیر در نظر گرفته می‌شود - و نیز فرض کنید هر وقت تجدیدی رخ می‌دهد هزینه‌ای بر آن مترتب می‌شود. فرض کنید هزینه در زمان $n$ امین تجدید $R_n$ باشد، و بعلاوه $R_n$ ها مستقل و هم‌توزیع هستند و سرانجام می‌پذیریم که ممکن است $R_n$ ها به $X_n$ ها بستگی داشته باشد، اگر قرار دهیم:

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n(t) \qquad (۱۰)$$

آن گاه $R(t)$ کل هزینه تا زمان $t$ را نشان می‌دهد. با فرض $E(R)=E(R_n), E(X)=E(X_n)$ قضیه زیر هزینه تعویض قطعه را ارائه می‌دهد.

قضیه ۱: اگر $E(R)<\infty, E(X)<\infty$ آن گاه با احتمال ۱

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R)}{E(X)} \qquad (۱۱)$$

اثبات: می‌دانیم که:

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n(t)}{N(t)} \times \frac{N(t)}{t} \qquad (۱۲)$$

حال، با استفاده از قانون اعداد بزرگ داریم:

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ or N(t)\to\infty}} \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n(t)}{N(t)} = E(R) \qquad (۱۳)$$

یا:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n(t)}{t} = \lim_{N(t)\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n(t)}{N(t)} \times \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{E(R)}{E(X)} \qquad (۱۴)$$

این قضیه نشان می‌دهد که در دراز مدت، متوسط هزینه برابر است با حاصل تقسیم هزینه پرداختی در زمان تعویض بر متوسط طول $n$ امین فاصله تعویض.

در بخش بعدی تابع هزینه تعویض قطعات دستگاه‌ها را ارائه می‌دهیم که در آن زمان شکست یک قطعه متغیر تصادفی در نظر گرفته شده است. سپس تابع هزینه را برای چند توزیع مهم بر حسب پارامتر های آنها محاسبه می‌کنیم و در آخر مقدار زمان بهینه تعویض قطعه را که به‌ازای آن هزینه مینیمم می‌شود، محاسبه می‌کنیم.

## ۳- تابع هزینه تعمیر قطعات

هزینه مربوط به تعویض قطعه بعد از بروز خرابی $C_2$، بیش از حالت تعمیر به‌هنگام قطعه؛ یعنی $C_1$ در نظر گرفته‌می‌شود، زیرا از کار افتادن یک قطعه در دستگاه به سایر تجهیزات آسیب می‌رساند و طبیعی است که هزینه آن بیشتر باشد، و بعلاوه، نرخ خرابی یک دستگاه که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، افزایشی فرض می‌شود:

$$r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\Pr(t \leq T \leq t+\Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \qquad (۱۵)$$

در صورتی که تابع نرخ شکست ثابت‌باشد (نظیر توزیع نمایی)، آن وقت در چنین شرایطی تعویض قطعه قبل از بروز خرابی با فرض آن‌که دستگاه در زمان تعویض سالم باشد احتمال خرابی‌های بعدی را تحت تاثیر قرار نمی‌دهد. از این رو، تعویض قطعه، زمانی مفید است که نرخ شکست آن افزایشی باشد، افزون بر آن عمل تعویض قطعه وضعیت دستگاه را به‌وضعیت (اولیه) سالم بر می‌گرداند.

برای محاسبه تابع هزینه فرض می‌کنیم:

الف) $T$ طول مدت زمان کار کرد دستگاه در لحظه تعویض قطعه است،

ب) قطعه مورد نظر دستگاه بعداز کارکردن $T$ واحد زمانی به‌طور سیستماتیک تعویض‌می‌شود یا این که به‌محض از کار افتادن آن تعویض‌صورت می‌گیرد،

ج) $C(T)$ هزینه این خط مشی را ارائه می‌دهد.

فرض می‌کنیم طول عمر مورد نظر در $j$امین دفعه که فرآیند تعمیر و تعویض تکرار می‌گردد $U_j$ است، و نیز $U_j$ ها مستقل و هم‌توزیع هستند. در این‌صورت، مدت زمانی در $j$امین نوبت که از این قطعه بهره برداری می‌شود عبارتنداز $X_j=min(U,T)$ که در آن $X_j$ ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند.

اگر هزینه تعویض و تعمیر را در $j$ امین نوبت $C_j$ فرض کنیم، در این صورت:

$$C_j=\begin{cases} C_1, & U_j>T \\ C_2, & U_j\leq T \end{cases} \qquad (۱۶)$$

که در آن $C_1$ هزینه تعویض و تعمیر $C_2=C_1+d$ هزینه ساقط شدن دستگاه است. به‌عبارت دیگر، هزینه ساقط شدن دستگاه از دو قسمت تشکیل شده است، یک هزینه تعویض و تعمیر و دیگری هزینه حاصل از ساقط شدن است که در این جا آن را با $d>0$ نمایش می‌دهیم.

از فرآیند تجدید می‌دانیم که $C(T)$ :

$$C(T)=\frac{E(C_j)}{E(X_j)} \qquad (۱۷)$$

و:

$$E(C_j)=C_1\Pr(U_j>T)+C_2\Pr(U_j\leq T) \qquad (۱۸)$$

و نیز برای محاسبه $E(X_j)$ چون $X_j=min(U,T)$ و $X_j\geq 0$ داریم:

$$E(X_j)=\int_0^{\infty}(1-F_{X_j}(x)dx=\int_0^T\Pr(X_j>x)dx \qquad (۱۹)$$

که در آن تابع $F_{X_j}(x)$ توزیع $X_j$ است و نیز به ازای $X_j>T$ داریم $P_r(X_j\geq x)=0$ و به ازای $X_j<T$ می توان گفت: $X_j>x$ اگر و فقط اگر $U_j>x$. بنا براین:

$$E(X_j)=\int_0^T\Pr(U_j>x)dx \qquad (۲۰)$$

از این رو:

$$C(T)=\frac{E(C_j)}{E(X_j)}=\frac{C_1\Pr(U_j>T)+C_2\Pr(U_j\leq T)}{\int_0^T\Pr(U_j>x)dx} \qquad (۲۱)$$

بنا براین در صورت معلوم بودن زمان کار کرد قطعه یعنی $U_j$ مقدار زمان بهینه تعویض قطعه را می‌توان با بهینه کردن مقدار $C(T)$ به‌دست آورد.

اکنون با استفاده از تابع نرخ شکست می‌توان تشخیص داد که کدام توزیع بهتر است و چرا.

## ٤- بررسی زمان بهینه تعویض قطعه

در این بخش با در نظر گرفتن توابع توزیع طول عمر مختلف برای قطعه مورد نظر از جمله توزیع نمایی، وایبل و ارلنگ، ابتدا تابع $C(T)$ را محاسبه و سپس آن را بهینه می‌کنیم، بدین منظور با استفاده از تابع نرخ شکست توزیع‌های مختلف توزیع‌طول‌عمر مناسب قطعه را تشخیص می‌دهیم؛ یعنی، مشتق تابع نرخ شکست را محاسبه و با توجه به‌افزایشی یا کاهشی بودن آن‌تابع چگالی مناسب طول عمر قطعه را مشخص می‌کنیم و نیز به‌منظور بهینه کردن زمان تعویض؛ یعنی $T_{min}$ مشتق تابع $C(T)$ را نسبت‌به $T$ پیدا و سپس $T_{min}$ را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم. مساله‌پیدا کردن $T_{min}$ در فرآیند تجدید را دراین مقاله مورد بحث قرار می‌دهیم، اما بحث بیشتر آن را در فرآیند کلی و در مدل‌های $II$ و $I$ در کار بعدی مان می‌آوریم.

### ٤-١ زمان بهینه و بررسی تابع نرخ شکست برای برخی از توزیع‌ها

تابع هزینه توزیع‌های مختلف از جمله تابع توزیع نمایی:

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \quad \lambda\geq 0, t\geq 0 \qquad (۲۲)$$

را بصورت:

$$C'(t)=\frac{C_1\lambda e^{-\lambda T}}{(1-e^{-\lambda T})} \qquad (۲۳)$$

رامی‌توان حساب کرد. در این توزیع در صورتی که $T\to\infty$ آن وقت تابع، هزینه بهینه می‌گردد و این یعنی آن دستگاه مستهلک نمی‌شود و باید وسیله‌ای یک بار مصرف باشد و به‌طور طبیعی تعویض و تعمیر آن مورد بحث نیست. توجه داریم که در توابع نمایی تابع نرخ شکست ثابت $\lambda$ است، یعنی، مدت زمان کار کرد قطعه در طول عمر باقی مانده آن اثری ندارد.

در توزیع وایبل:

$$f(t)=\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}} \quad t\geq 0,\alpha,\beta>0 \qquad (۲۴)$$

با تابع نرخ شکست:

$$r(t)=\alpha\beta\, t^{\beta-1} \quad (۲۵)$$

داریم:

$$r'(t)=\alpha\beta(\beta-1)t^{\beta-2} \quad (۲۶)$$

$$r'(t)=\begin{cases} >0 & ,\beta>1 \\ =0 & ,\beta=1 \\ <0 & ,\beta<1 \end{cases}$$

در نتیجه در حالت $\beta=1$ نرخ شکست همیشه مقدار ثابت $\alpha\beta$ و وقتی $\beta>1$ تابع نرخ شکست برحسب $t$ افزایشی است و دارای شتاب صعودی است، وقتی $0<\beta<1$ ،تابع نرخ شکست کاهشی است و با توجه به $r(0)=0$ هر چه $t$ زیاد می‌شود با وجودی که مقدارش مثبت است؛ ولی به مرور کم و کمترمی‌شود تا این که به حد صفر می‌رسد یا $\lim_{t\to\infty}\alpha\beta\, t^{\beta-1}=0$ ، به عبارت دیگر، تابع نرخ شکست شتاب نزولی دارد و از این‌رو می‌تواند تابع مناسبی برای زمان کارکرد بعضی از قطعات باشد. برای تابع توزیع وایبل تابع هزینه تعویض و تعمیر را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم :

$$\Pr(U_j \geq T)=\int_0^\infty \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}\,dx=e^{-\alpha T^\beta} \quad (۲۷)$$

بنا بر این:

$$C(T)=\frac{C_2-de^{-\alpha x^\beta}}{\int_0^\infty e^{-\alpha x^\beta}\,dx} \quad (۲۸)$$

برای بررسی بیشتر مشتق تابع هزینه را به ازای مقادیر $\alpha$ و $\beta$ مطالعه می‌کنیم، بنابر این :

$$C'(T)= e^{-\alpha T^\beta}\left[d\alpha\beta T^{\beta-1}\int_0^T e^{-\alpha x^\beta}\,dx - C_1 + d(e^{\alpha T^\beta}-1)\right]=0, \quad (۲۹)$$

که البته $\alpha$ و $T$ متناهی هستند. بنا براین:

$$\int_0^T e^{-\alpha T^\beta}\,dx=\frac{C_1+d(1-e^{-\alpha T^\beta})}{d\alpha\beta T^{\beta-1}}. \quad (۳۰)$$

اگر $\beta=1$، آن‌گاه $C_1=0$ و مقدار بهینه $T$ حاصل نمی‌شود. اگر $\beta=۱/۲$آن وقت :

$$-\frac{2}{\alpha^2}e^{-\alpha\sqrt{T}}(1+\sqrt{T})=\int_0^T e^{-\alpha x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{C_1+d(1-e^{-\alpha\sqrt{T}})}{d\alpha}\times 2\sqrt{T} \quad (۳۱)$$

و در نتیجه از (۳۱) داریم:

$$\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\sqrt{T}}=\frac{(C_1+d)\sqrt{T}}{d} \quad (۳۲)$$

با حل این معادله به طریق عددی $T_{min}$ به‌دست می‌آید.
به طریق مشابه ، به ازای $\beta=$۱/۳، ۱/۴ به ترتیب داریم :

$$\int_0^T e^{-\alpha x^{\frac{1}{3}}}\,dx=\frac{C_1+d(1-e^{-\alpha\sqrt[3]{T}})3\sqrt[3]{T^2}}{d\alpha} \quad (۳۳)$$

و

$$-\frac{4(6+6\alpha\sqrt[4]{T}+3\alpha^2\sqrt[4]{T^2}+\alpha^3\sqrt[4]{T^3})}{\alpha^4 e^{\alpha\sqrt[4]{T^3}}}=\frac{C_1+d(1-e^{-\alpha\sqrt[4]{T}})3\sqrt[4]{T^3}}{4} \quad (۳۴)$$

که با روش‌های عددی می‌توان $T_{min}$ از هرکدام را به‌دست آورد.

در توزیع ارلنگ:

$$f(t)=\frac{(\mu k)^k t^{k-1}e^{-k\mu t}}{(k-1)!} \quad t>0,\mu>0,k=1,2,3,... \quad (۳۵)$$

با تابع نرخ شکست

$$r(t)=\frac{\theta^4}{\int_0^\infty e^{-\theta(x-t)}(\frac{x}{t})^{k-1}\,dx} \quad (۳۶)$$

که در آن $\theta=k\mu$،میانگین طول عمر دستگاه است. اگر $t$ افزایش پیداکند آن‌وقت $r(t)$ افزایش می‌یابد؛ یعنی، تابع نرخ شکست افزایشی است؛ ولی در عین حال شتاب نزولی دارد زیرا $\lim_{t\to\infty} r(t)=\theta^{k+1}$ یعنی تابع نرخ شکست در توزیع ارلنگ افزایشی است؛ ولی تابع دارای شتاب نزولی دارد و در اثر زیاد شدن $T$ مقدار تابع نرخ شکست به‌آرامی به $\theta^{k+1}$ میل می‌کند. از این‌رو تابع ارلنگ یکی از توزیع‌هایی است که می‌تواند برای کارکرد بعضی از قطعات در دستگاه‌ها مورد استفاده قرار

گیرد.

**مثال ۱** : توزیع یکنواخت با تابع چگالی

$$f(t)=\frac{1}{b},t\in(0,b) \tag{۳۷}$$

و با تابع نرخ شکست

$$r(t)=\frac{1}{b-t},t\in(0,b) \tag{۳۸}$$

در نظر بگیرید. با توجه به $C_2=C_1+d$ و با استفاده از رابطه (۲۱)، برای این توزیع داریم:

$$C(T)=\frac{C_1+d\dfrac{T}{b}}{Tb-T^2} \tag{۳۹}$$

بنابراین، به ازای $T>b$ داریم $C'(T)=0$، اما به ازای $T\leq b$ با مساوی صفر قرار دادن $C'(T)$ داریم:

$$dT^2+2bC_1T-2b^2C_1=0 \tag{۴۰}$$

که با حل این معادله بر حسب $T$ داریم

$$T_{\min}=\frac{-bC_1+b\sqrt{C_1^2+2C_1d}}{d} \tag{۴۱}$$

اکنون با مشتق گیری از $T_{min}$ نسبت به $d$ و $C_1$ داریم:

$$\frac{\partial T_{\min}}{\partial C_1}=\frac{b(C_1+d-\sqrt{C_1^2+2C_1d})}{d^2(\sqrt{C_1^2+2C_1d})}>0 \tag{۴۲}$$

$$\frac{\partial T_{\min}}{\partial d}=\frac{bC_1(\sqrt{C_1^2+2C_1d}-C_2)}{d^2\sqrt{C_1^2+2C_1d}}<0 \tag{۴۳}$$

اما به‌سادگی می‌توان نشان داد که با $T_{min}$ نسبت به $d$ کاهشی؛ ولی نسبت به $C_1$ افزایشی است. ازاین رو $T_{min}$ با $d$ نسبت معکوس و با $C_1$ نسبت مستقیم دارد از طرف دیگر مشتق تابع نرخ شکست همواره اکیدا ًمثبت است زیرا $1/(b-t)^2>0$. بنابراین تابع نرخ شکست افزایشی است، یعنی، به‌مرور زمان خرابی دستگاه افزایش می‌یابد .

## ۵- نتیجه گیری

در بررسی تابع هزینه دیدیم که زمان بهینه برای تعویض قطعات با هزینه ساقط شدن دستگاه، $d$، رابطه معکوس و با هزینه تعویض و تعمیر، $C_1$، رابطه مستقیم دارد. تابع نرخ شکست در توزیع یکنواخت با پارامتر $b$ نسبت عکس دارد، بدین ترتیب که با افزایش $b$ مقدار $T$ افزایش می‌یابد که در این صورت تابع نرخ شکست کاهشی است. در بررسی نشان دادیم که در توزیع نمایی تابع هزینه وقتی کمترین است که $T\to\infty$، و این بدین معنی است که دستگاه مستهلک نمی‌شود. بنابراین دستگاه‌هایی که استهلاک دارند توزیع نمایی برای طول عمر آنها مناسب نیست. در توزیع وایبل در صورتی که $0<\beta<1$ ، آن‌وقت تابع‌نرخ شکست از صفر شروع می‌شود و هرچه‌افزایش یابد با وجودی که مقدار تابع نرخ شکست مثبت است ولی مقدار آن کم و کمتر می‌شود تا این که در $T=\infty$ برابر صفر می‌گردد. در توزیع ارلنگ تابع نرخ شکست افزایشی است و شتاب نزولی دارد و از این‌رو نظیر توزیع وایبل توزیعی مناسب با طول فاصله زمانی بین تعویض‌های متوالی است. اگر فرض کنیم زمان بین تعمیر و تعویض‌های متوالی از فرآیند تجدید کلی تبعیت می‌کند، آن وقت تابع هزینه و زمان بهینه از مقوله‌های است که تصور می‌شود با هزینه و زمان واقعی چندان فاصله‌ای ندارد و می‌تواند مفید واقع شود، و هدف بعدی ما دست‌یابی به چنین شرایطی است.

## ۶- مراجع


[1] Love,C.E; Guo,R. *"Simulation strategies the failure parameters of repairable systems under the influence of general repair,* " Quality and Reliability *Engineering* International ,10,37-47,1994b.

[2] Chukova,S; Khalil,Z.," *On the conservation T-screening of Non-stationary poisson processes. apllications to warranty analysis," Comptes Rendus de l, academic Bulgare des sciences 43,No8,46-48 1990.*

[3] Chukova,S." *On the taxonomy of mathematical models in warranty analysis.,"* Journal of Statistical esearch, Statisticald analysis,96,Bulgaria,Sept.1995

[4] Dimitrov,B.,Chukova,S.Khalil,Z *"Warranty costs: An age-dependent Failure/Repair model" Naval Research Logistic,* (2004).

[5] Guo,R; Love,C.E. *"SimulatingNon-homogeneous poisson processes with proportional intensities,"* Naval Research Logistics,41,507-522,1994

[6] Guo,R.; Love,C.E." Statistical analysis of an age model for imperfectly repair systems," Quality and Reliability Engineering International, 8,507-522,1992.

[7] Guo,R., Ascher,H.; Love ,E.' *'Generalize Models of Repairable systems-A Survey via StochasticProcesses formalism,"* ORION.Vol1.16.No.2,87-128,2000.

[8] Kijima,M.,*"Some results for repairable systems with general repair,* " Journal of Applied Probability, 20,851,-859,1989

[9] Kaminskiy,M; Krivtsov,V. " *A Monte Carlo approach to repairable system reliability analysis,*] " Probabilistic Safety Assessment and Management ,New York : Springer;p.10631068,1998 .

[10] Kijima,M.; Sumita,N. " A useful generalization of renewal theory : counting *governed by nonnegative Markovian* "process *increments* " Journal of Applied Probability,23,71,88,1986.

[11] Love,C.E;Guo,R. *"Utilizing Weibull failure rate in repair limit analysis for equipment replacemen* the operational research society 47,1366-1376 ,1994

[12] . Chukova,S.; Khalil,Z." *On the moving T- screening of the non-stationary processes* " comptes rendus de l, academic Bulgare des Science,43,No7,27-28,1990b.

[13] Mettas,A; Zhao,W." *Modeling and analysis oComplex Repairable system,*" Technique Report ReliaSoft reporation,2004

[14] Mettas,A.; Zhao,W." *Modeling and analysis of Complex Repairable system,*" Technique Report ReliaSoft rporation,2004

[15] Scarsini ,M.; Shaked, ." *On value of an item Subject to general repair or maintenance, with genera repair,*" European J of Operational *l* Reseach,122,625-637 ,2000

[16] [Scarsini ,M.; Shaked, ." *On value of an item Subject to general repair or maintenance, with general repair,*" European J. of Operational Reseach,122,625-637 ,2000