تابع هیلبرت و نظم خمهای تکجمله‌ای تصویری

مهدی امیدعلی[i]؛ فرهاد رحمتی[ii]

چکیده

در این مقاله روشی برای محاسبه تابع هیلبرت و نظم خمهای تکجمله‌ای تصویری ارائه می‌شود. این روش مبتنی بر مرتب سازی نیمگروه عددی وابسته به مجموعه مولد این خمهاست. در این راستا به معرفی زیر مجموعه‌ای خاص از نیمگروه عددی وابسته به یک خم تکجمله‌ای تصویری می‌پردازیم که نقش پایه‌ای مهم را برای این نیمگروه دارد. یکی از مزایای استفاده از این روش مستقل بودن آن از تعیین یک تحلیل آزاد مدرج مینیمال برای حلقه مختصاتی همگن اینگونه خمهاست که محاسبه آن نیاز به محاسبه مدولهای سیزیجی ایده آل تعریف خم مورد نظر دارد. همچنین روش فوق الگوریتمی را برای جستجوی نظام‌مند خمهای تکجمله‌ای تصویری با خواص جبری مطلوب بدست می‌دهد.

کلمات کلیدی

تابع هیلبرت، خمهای تکجمله ای، واریته‌های توریک، نظم.

On The Regularity and Hilbert Function of Projective Monomial Curves

M. Omidali; F. Rahmati

Abstract

In this paper we present a method for computing the Hilbert function and regularity of projective monomial curves. This method is based on ordering of the numerical semigroup associated to the generating set of the curve. We introduce a certain subset of the numerical semigroup associated to a projective monomial curve, which is served as an important base for it. One of the advantages of using this method is that it is independent from the computation of a minimal graded free resolution of the graded coordinate rings of these curves that needs the computation of syzygy modules of the defining ideal. In addition, this method is useful for systematic search for certain projective monomial curves with desired properties.

Keywords

Hilbert function, Monomial curves, Regularity, Toric varieties.

۱- مقدمه

فرض کنید $R=\Bbbk[X_0,\dots,X_p]$ حلقه چند جمله‌ای‌ها روی میدان $\Bbbk$ باشد. R با درجه‌بندی طبیعی $\deg(X_i)=1$ یک $\Bbbk$- جبر $\mathbb{N}$- مدرّج است. فرض کنید M یک R- مدول $\mathbb{Z}$- مدرّج متناهی مولد باشد، بطوریکه بعد تصویری[۱] آن $\operatorname{projdim}(M)$، برابر با q باشد. در این صورت تحلیل آزاد مدرّج مینیمال

$$0\to\bigoplus_j R(-j)^{\beta_{q,j}}\to\dots\to\bigoplus_j R(-j)^{\beta_{0,j}}\to M\to 0 \qquad (۱)$$

موجود است. قرار می‌دهیم:

[i] دانشجوی دکتری ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، Email: omidali@aut.ac.ir

[ii] دانشیار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، Email: frahmati@aut.ac.ir.

$$\varepsilon_i = \max\{j-i : \beta_{i,j} \neq 0\}, \forall i \in \{0,1,...,q\}$$ (۲)

در این صورت *نظم کاستلنوو- مامفورد*[۲]، یا اختصاراً نظم M به صورت

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{\varepsilon_i : i \in \{0,...,q\}\}$$ (۳)

تعریف می‌شود.

نظم یک R- مدول مدرّج متناهی مولد M ناوردایی بسیار مهم است که موضوع تحقیقاتی بسیاری از محققان می‌باشد. در حقیقت، نظم یک مدول مدرّج متناهی مولد M نشان دهنده پیچیدگی M است. بعلاوه، معین بودن $\operatorname{reg}(M)$ باعث حذف گامهای زیادی در فرایند محاسبه یک تحلیل آزاد مدرّج مینیمال برای M است.

تعبیر معادلی برای نظم یک R- مدول مدرّج براساس مدولهای همانستگی موضعی[۳] موجود است: فرض کنید $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال $(X_0,...,X_p)$ باشد. در این صورت

$$\operatorname{reg}(M)=\max\{j-i : H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j \neq 0, \forall\, i,j\geq 0\}$$ (٤)

در این مقاله به بررسی تابع هیلبرت و نظم دسته خاصی ازواریته‌های تصویری می‌پردازیم که به خمهای تکجمله‌ای تصویری معروف هستند.

این خمها بستار تصویری خمهای تکجمله‌ای آفین هستند. همچنین این خمها در رسته واریته‌های توریک جا دارند که خود یکی از فعال‌ترین موضوعات تحقیقاتی دهه اخیر هستند.

ساختار مقاله به این شکل است که در بخش دوم به بیان مقدماتی از تابع وچندجمله‌ای هیلبرت و سری پوانکاره می‌پردازیم. در بخش سوم خمهای تکجمله‌ای تصویری را معرفی می‌کنیم و روشی الگوریتمی برای نمایش این خمها معرفی می‌کنیم. در بخش پایانی روشی برای محاسبه تابع هیلبرت و نظم خمهای تکجمله‌ای تصویری بیان می‌کنیم.

قرارداد. در سراسر این مقاله $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$، $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ فرض می‌شوند. منظور از مدولهای مدرّج عبارت است از مدولهای $\mathbb{Z}$-مدرّج و همریختی[٤] همگن بین دو مدول مدرّج از درجه صفر منظور می‌شود. همچنین $R=\mathbb{k}[X_0,...,X_p]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان $\mathbb{k}$ فرض می‌شود با درجه بندی طبیعی $\deg(X_i)=1$. رادیکال و پوچساز[٥] یک ایده‌آل I به ترتیب با $\operatorname{rad}(I)$ و $\operatorname{Ann}(I)$ نشان داده می‌شوند. اگر Y یک مجموعه باشد که توسط تابع $\alpha: Y\to\mathbb{N}$ مرتب باشد، به ازای هر $i\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم

$$Y_i=\{y\in Y : \alpha(y)=i\}$$ (٥)

و

$$Y_{\leq i}=\{y\in Y:\alpha(y)\leq i\}$$ (٦)

همچنین کاردینال یک مجموعه مانند Y را با $\#Y$ نشان می‌دهیم.

۲- تابع هیلبرت

فرض کنید M یک R- مدول مدرّج متناهی مولد باشد، $\dim(M)=r$ و $\operatorname{projdim}(M)=q$. *تابع هیلبرت*[٦] $H_M:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ به صورت

$$H_M(i):=\dim_{\mathbb{k}}(M_i)$$ (۷)

تعریف می‌شود. نتیجه مهمی از هیلبرت بیان می‌کند که چند جمله‌ای $P_M\in\mathbb{Z}[t]$ از درجه $r-1$ وجود دارد بطوریکه $P_M(i)=H_M(i)$ برای i های به اندازه کافی بزرگ. P_M را *چند جمله‌ای هیلبرت* M[۷] می‌نامیم. دنباله تفاضلات متناوب[۸] تابع هیلبرت M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Delta H_M(i):=H_M(i)-H_M(i-1)$$ (۸)

سری پوانکاره[۹] $P(M,t)$ به صورت

$$P(M,t):=\sum_{i\geq 0}H_M(i)t^i$$ (۹)

تعریف می‌شود. در این صورت چند جمله‌ای یکتای $Q_M(t)\in\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ با شرط $Q_M(1)\neq 0$ وجود دارد بطوریکه

$$P(M,t)=\frac{Q_M(t)}{(1-t)^r}$$ (۱۰)

درجه کلی $\deg(P(M,T))=b-r$ را a- *ناوردای*[۱۰] M می نامیم و با $a(M)$ نشان می‌دهیم که در اینجا $\deg(Q_M(t))=b$.

لم ۲-۱-[۲] با نمادگذاریهای بالا داریم

$$a(M)=\max\{i:H_M(i)\neq P_M(i)\}$$ (۱۱)

۳- خمهای تکجمله‌ای تصویری

فرض کنید $S=\{a_1,...,a_p\}$ مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد؛ بطوریکه $0<a_1<...<a_p$ و $\operatorname{GCD}(\{a_i\})=1$. قرار می دهیم $a_0=0$ و همریختی $\mathbb{k}$-جبری $\varphi:\mathbb{k}[X_0,...,X_p]\to\mathbb{k}[s,t]$ را با ضابطه $\varphi(X_i)=s^{a_i}t^{a_p-a_i}$ تعریف می‌کنیم. از آنجا که

$$\deg\varphi(X_0)=\deg\varphi(X_1)=...=\deg\varphi(X_p)=a_p$$ (٦)

بنابراین $\ker(\varphi)$ یک ایده‌آل همگن از R است. در این

صورت واریته تصویری $\mathrm{Proj}(\frac{\Bbbk[X_0,\dots,X_p]}{\ker(\varphi)}) \subseteq \mathbb{P}^p_{\Bbbk}$ تعریف شده توسط $\ker(\varphi)$ را خم تکجمله‌ای تصویری وابسته به S می‌نامیم و آنرا با $\mathcal{C}_S$ نشان می‌دهیم. کلاس هم‌ارزی $X_i+\ker(\varphi)$ در حلقه $\Bbbk[\mathcal{C}_S]:=\frac{\Bbbk[X_0,\dots,X_p]}{\ker(\varphi)}$ را با $\overline{X}_i$ نشان می‌دهیم.

لم ۳-۱- فرض کنید S و $\mathcal{C}_S$ همانند بالا باشند. در این صورت

۱) $\dim(\Bbbk[\mathcal{C}_S])=2$ و $1\le \operatorname{depth}(\Bbbk[\mathcal{C}_S])\le 2$.

۲) کلاسهای هم‌ارزی $\overline{X}_0,\overline{X}_p$ تشکیل یک دستگاه پارامتری همگن از درجه یک برای $\Bbbk[\mathcal{C}_S]$ می‌دهند. بعلاوه، $\overline{X}_0,\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_p$ عناصر نامقسوم علیه صفر $\Bbbk[\mathcal{C}_S]$ هستند.

اثبات. فرض کنید σ تکواره[11] تولید شده توسط بردارهای $\begin{bmatrix}0\\a_p\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_1\\a_p-a_1\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}a_p\\0\end{bmatrix}$ در $\mathbb{Z}^2$ باشد. در این صورت $\mathcal{C}_S$ برابر با واریته توریک تصویری وابسته به σ است. بنابراین اگر $A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & \dots & a_{p-1} & a_p\\ a_p & a_p-a_1 & \dots & a_p-a_{p-1} & 0\end{pmatrix}$ آنگاه

$$\dim(\Bbbk[\mathcal{C}_S])=\operatorname{rank}(A)=2 \qquad (۱۲)$$

همچنین داریم

$$\overline{\varphi}:\Bbbk[\mathcal{C}_S]\xrightarrow{\cong}\Bbbk[t^{a_p},s^{a_1}t^{a_p-a_1},\dots,s^{a_{p-1}}t^{a_p-a_{p-1}},s^{a_p}] \qquad (۱۳)$$

یکریختی[12] $\Bbbk$-جبرهاست که $\overline{\varphi}$ نگاشت بدست آمده از قضیه اول یکریختی‌هاست. از آنجا که $\overline{\varphi}$ عناصر $\overline{X}_p$ و ... و $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_0$ را به ترتیب به $t^{a_p},s^{a_1}t^{a_p-a_1},\dots,s^{a_{p-1}}t^{a_p-a_{p-1}},s^{a_p}$ می‌نگارد و این عناصر در $\Bbbk[t^{a_p},s^{a_1}t^{a_p-a_1},\dots,s^{a_{p-1}}t^{a_p-a_{p-1}},s^{a_p}]$ مقسوم علیه صفر نیستند بنابراین $\overline{X}_p$ و ... و $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_0$ در $\Bbbk[\mathrm{C}_S]$ نامقسوم علیه صفرند. از اینجا بدست می‌آید که (۱۸) $1\le\operatorname{depth}(\Bbbk[\mathcal{C}_S])\le\dim(\Bbbk[\mathcal{C}_S])=2$. تنها می‌ماند که ثابت کنیم $\overline{X}_0,\overline{X}_p$ تشکیل یک دستگاه پارامتری همگن برای $\Bbbk[\mathcal{C}_S]$ می‌دهد. کافی است ثابت کنیم که رادیکال ایده‌آل $(\overline{X}_0,\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_p)$ برابر با ایده‌آل $(\overline{X}_0,\overline{X}_p)$ است. $X_i^{a_p}-X_0^{a_p-a_i}X_p^{a_i}\in\ker(\varphi)$ و از اینجا داریم $\overline{X}_i^{a_p}\in(\overline{X}_0,\overline{X}_p)$ و درنتیجه $\overline{X}_i\in\operatorname{rad}((\overline{X}_0,\overline{X}_p))$.

□

فرض کنید Γ تکواره تولید شده توسط S باشد، یا به عبارت دیگر

$$\Gamma:=\{\sum_{i=1}^{p} n_i a_i : n_i\in\mathbb{N}\} \qquad (۱۴)$$

فرض کنید Θ_i مجموعه تمام عناصر Γ باشد که به صورت حاصل جمع i عنصر از S نوشته می‌شوند (تکرار مجاز است) و قرار می‌دهیم

$$\mathfrak{M}_i=\Theta_i\setminus(\bigcup_{j<i}\Theta_j) \qquad (۱۵)$$

$\mathfrak{M}_i$ متشکل از تمام عناصری است که به طور مینیمال حاصل جمع i عنصر از S هستند. هر عنصر $n\in\Gamma$ دقیقاً به یکی از $\mathfrak{M}_i$ ها تعلق دارد. اگر $n\in\mathfrak{M}_i$ در این صورت قرار می‌دهیم $\operatorname{ord}_S(n)=i$. واضح است که

$$\operatorname{ord}_S(a+b)\le\operatorname{ord}_S(a)+\operatorname{ord}_S(b),\forall a,b\in\Gamma \qquad (۱۶)$$

تعریف ۳-۲- [۴] عنصر $a\in\Gamma$ را *پایدار* می‌نامیم هر گاه به ازای هر $k\in\mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\operatorname{ord}_S(a+ka_p)=\operatorname{ord}_S(a)+k \qquad (۱۷)$$

و در غیر این صورت آنرا *ناپایدار* می‌نامیم. مجموعه تمام عناصر پایدار (متناظراً ناپایدار) Γ را با $\operatorname{Stable}(\Gamma)$ (متناظراً $\operatorname{UnStable}(\Gamma)$) نشان می‌دهیم.

توجه شود که مفهوم عناصر پایدار و ناپایدار تنها به نیمگروه عددی Γ بستگی ندارد بلکه به S نیز بستگی دارد. به عنوان مثال اگر $S=\{1,3,4\}$ آنگاه $\Gamma=\mathbb{N}$ ، $\operatorname{ord}_S(2)=2$، و $\operatorname{ord}_S(2+4)=\operatorname{ord}_S(6)=2<3$ که نشان می‌دهد 2 عنصری ناپایدار است. اما اگر $S=\{1,3,5\}$ آنگاه $\Gamma=\mathbb{N}$ و 2 عنصری پایدار است.

در ادامه خواهیم دید که وجود عناصر ناپایدار به کوهن-مکولی بودن حلقه مختصاتی خمهای تکجمله ای تصویری مربوط می‌شوند.

تعریف ۳-۳- قرار می‌دهیم:

$$\operatorname{StbBasis}(\Gamma):=\{n\in\operatorname{Stable}(\Gamma): n-a_p\notin\operatorname{Stable}(\Gamma)\}$$

و آنرا *پایه پایدار* Γ می‌نامیم.

مثال ۳-۴- فرض کنید $S=\{2,5,7\}$. جدول زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathfrak{M}_0=\{\mathbf{0}\}$$
$$\mathfrak{M}_1=\{\mathbf{2},\mathbf{5},\mathbf{7}\}$$
$$\mathfrak{M}_2=\{\mathbf{4},\mathbf{9},\mathbf{10},12,14\}$$
$$\mathfrak{M}_3=\{\underline{6},11,\mathbf{15},16,17,19,21\}$$
$$\mathfrak{M}_4=\{\underline{8},\underline{13},18,\mathbf{20},22,23,24,26,28\}$$
$$\mathfrak{M}_5=\{25,27,29,30,31,33,35\}$$

بعداً خواهیم دید که برای هر $i\in\mathbb{N}$ داریم $\mathfrak{M}_{5+i}=\{n+7i : n\in\mathfrak{M}_5\}$. در این صورت داریم:

$$\mathrm{UnStable}(\Gamma)=\{6,8,13\} \tag{۱۹}$$

و

$$\mathrm{StbBasis}(\Gamma)=\{0,2,4,5,10,15,20\} \tag{۲۰}$$

تعریف ۳-۵- فرض کنید $i\in\mathbb{N}$. فرض کنید $\mathrm{gr}(\mathcal{S})_i$ $\Bbbk$- فضای برداری با پایه متشکل از $\{\tau^a : a\in\mathfrak{M}_i\}$ باشد (τ^a صرفاً یک نماد می‌باشد). قرار می‌دهیم

$$\mathrm{gr}(\mathcal{S})=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{gr}(\mathcal{S})_i \tag{۲۱}$$

به ازای هر $a,b\in\Gamma$ قرار می‌دهیم

$$\tau^a.\tau^b=\begin{cases}\tau^{a+b}, & \text{if } \mathrm{ord}_S(a+b)=\mathrm{ord}_S(a)+\mathrm{ord}_S(b),\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{۲۲}$$

این ضرب را به صورت خطی به همه عناصر $\mathrm{gr}(\mathcal{S})$ توسعه می‌دهیم.

لم ۳-۶ [۴]-[۵] با نمادگزاری های بالا شرایط زیر برقرار می‌باشند:

۱) $\mathrm{gr}(\mathcal{S})$ با عمل ضرب تعریف شده تشکیل یک حلقه جابجایی $\mathbb{N}$-مدرّج می‌دهد.

۲) $\dim(\mathrm{gr}(\mathcal{S}))=1$.

۳) $\mathrm{gr}(\mathcal{S})$ کوهن- مکولی است اگر و فقط اگر $\mathrm{UnStable}(\Gamma)=\varnothing$.

۴) $H_{\mathrm{gr}(\mathcal{S})}(i)=\#\mathfrak{M}_i$ و $P_{\mathrm{gr}(\mathcal{S})}(i)=a_p$.

۵) اگر $i\in\mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه $\mathfrak{M}_i$ شامل فقط و فقط یک عنصر از هر کلاس پیمانه‌ای به هنگ a_p است.

۶) اگر $i\in\mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه نگاشت $\tau^{a_p}:\mathrm{gr}(\mathcal{S})_i\to\mathrm{gr}(\mathcal{S})_{i+1}$ دوسویی است.

۷) اگر $\tau^{a_p}:\mathrm{gr}(\mathcal{S})_i\to\mathrm{gr}(\mathcal{S})_{i+1}$ پوشا باشد (یا بطور معادل هر عنصر از $\mathfrak{M}_{i+1}$ را بتوان به صورت حاصل جمع a_p با یک عنصر از $\mathfrak{M}_i$ نوشت) و $\#\mathfrak{M}_{i+1}=a_p$ آنگاه برای هر $j\geq i+1$، نگاشت $\tau^{a_p}:\mathrm{gr}(\mathcal{S})_j\to\mathrm{gr}(\mathcal{S})_{j+1}$ دوسویی است. بطور معادل، نگاشت جمع با a_p نگاشتی دوسویی از $\mathfrak{M}_j$ به $\mathfrak{M}_{j+1}$ است.

۸) یکریختی $\Bbbk$-جبری مدرّج

$$\psi:\frac{\Bbbk[X_0,..,X_p]}{(\ker(\varphi),X_0)}\longrightarrow\mathrm{gr}(\mathcal{S})$$

وجود دارد بطوریکه $\psi(\overline{X}_i)=\tau^{a_i}$ برای $i\in\{1,2,\dots,p\}$.

لم ۳-۷- [۴] خم تصویری تکجمله‌ای وابسته به $S=\{a_1,\dots,a_p\}$ کوهن- مکولی حسابی است اگر و فقط اگر $\mathrm{UnStable}(\Gamma)=\varnothing$.

لم ۳-۸- فرض کنید $b\in\mathrm{UnStable}(\Gamma)$. در این صورت به ازای هر $i\in\{1,\dots,p\}$ حداقل یکی از شرایط زیر برقرار است.

i) $\mathrm{ord}_S(b+a_i)\leq\mathrm{ord}_S(b)$

ii) $b+a_i\in\mathrm{UnStable}(\Gamma)$

اثبات. فرض کنید $i\in\{1,\dots,p\}$ چنان باشد که هیچ کدام از شرایط مطرح شده برقرار نباشند. از آنجا که b عنصری ناپایدار از Γ است، عدد صحیح مثبت k وجود دارد که $\mathrm{ord}_S(b+ka_p)<\mathrm{ord}_S(b)+k$. از آنجا که $b+a_i$ پایدار است، داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_S(b+a_i+ka_p)&=\mathrm{ord}_S(b+a_i)+k\\&=\mathrm{ord}_S(b)+k+1\end{aligned} \tag{۲۳}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_S(b+a_i+ka_p)&=\mathrm{ord}_S(b+ka_p+a_i)\\&\leq\mathrm{ord}_S(b+ka_p)+1\\&<\mathrm{ord}_S(b)+k+1\end{aligned} \tag{۲۴}$$

که تناقض است. □

لم ۳-۹- اگر $a\in\mathrm{Stable}(\Gamma)$ آنگاه $a+ka_p\in\mathrm{Stable}(\Gamma)$ به ازای هر $k\in\mathbb{N}$.

اثبات. واضح است.

نتیجه ۳-۱۰ - $\mathrm{StbBasis}(\Gamma)$ شامل a_p عنصر است. بعلاوه این عناصر از کلاسهای مختلف همنهشتی به پیمانه a_p هستند.

اثبات- از آنجا که $\mathrm{GCD}(\{a_i\})=1$، بنابراین مجموعه $\mathbb{N}\setminus\Gamma$ متناهی است (لم ۱۰-۲-۱ از [۶] را ببینید). اگر $0\leq j<a_p$ آنگاه طبق لم ۳-۶ (۶) و (۷) تعداد عناصر ناپایدار متناهی است و لذا $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $j+ka_p\in\mathrm{Stable}(\Gamma)$. اگر $k\in\mathbb{N}$ کوچکترین عدد با

خاصیت $j+ka_p \in \mathrm{Stable}(\Gamma)$ باشد آنگاه $j+ka_p \in \mathrm{StbBasis}(\Gamma)$. بنابراین $\mathrm{StbBasis}(\Gamma)$ شامل حداقل یک عنصر از هر کلاس همنهشتی به پیمانه a_p است. اگر $a,b \in \mathrm{StbBasis}(\Gamma)$ و $a \equiv b (\mathrm{mod}\ a_p)$ و $a<b$ آنگاه عدد صحیح $k>0$ وجود دارد که $b=a+ka_p$. از آنجا که a_p پایدار است، طبق لم ۳-۹ $a+(k-1)a_p$ نیز پایدار است. اما $b \in \mathrm{StbBasis}(\Gamma)$ و بنابراین $b-a_p=a+(k-1)a_p \notin \mathrm{Stable}(\Gamma)$ که تناقض است.

□

لم ۳-۱۱- عناصر $\tau^{a_{p-1}},\dots,\tau^{a_1}$ در حلقه $\mathrm{gr}(\mathcal{S})$ پوچتوان هستند.

اثبات. به ازای هر $i \in \{1,\dots,p-1\}$ داریم

$$\mathrm{ord}_{\mathcal{S}}(a_pa_i)=\mathrm{ord}_{\mathcal{S}}(a_ia_p) \le a_i \tag{۲۵}$$

بنابراین $\mathrm{ord}(a_pa_i)_{\mathcal{S}}<a_p$ و لذا با توجه به تعریف ضرب در حلقه $\mathrm{gr}(\mathcal{S})$ داریم که

$$(\tau^{a_i})^{a_p}=0 \tag{۲۶}$$

۴- نظم خمهای تصویری تکجمله‌ای

لم ۴-۱- [۳] فرض کنید $0 \to A \to B \to C \to 0$ دنباله دقیق کوتاه از R- مدولهای مدرّج متناهی مولد باشد. در این صورت

$$\mathrm{reg}(B) \le \max\{\mathrm{reg}(A),\mathrm{reg}(C)\} \tag{۲۷}$$

بعلاوه اگر $\dim(A)=0$ آنگاه

$$\mathrm{reg}(B)=\max\{\mathrm{reg}(A),\mathrm{reg}(C)\} \tag{۲۸}$$

گزاره ۴-۲- فرض کنید M یک $R=\Bbbk[X_0,\dots,X_n]$- مدول مدرّج متناهی مولد کوهن-مکولی باشد. دراین صورت داریم

$$\mathrm{reg}(M)=\mathrm{a}(M)+\dim(M) \tag{۲۹}$$

اثبات. فرض کنید $q=\mathrm{projdim}(M)$. طبق قضیه اوسلندر- باکسبام در حالت مدرّج داریم

$$\begin{aligned}\dim(M)&=\mathrm{depth}(M)\\&=n+1-\mathrm{projdim}(M)\\&=n+1-q\end{aligned} \tag{۳۰}$$

حال فرض کنید

$$0 \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{q,j}} \to \dots \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{0,j}} \to M \to 0 \tag{۳۱}$$

یک تحلیل آزاد مدرّج مینیمال برای M باشد. قرار می‌دهیم $\varepsilon_i=\max\{j-i : \beta_{i,j} \neq 0\}$ برای $i \in \{0,\dots,q\}$. در این صورت طبق گزاره ۱-۱ از [۱] داریم $\varepsilon_0<\varepsilon_1<\dots<\varepsilon_q$. بنابراین $\mathrm{reg}(M)=\varepsilon_q$. از طرف دیگر اگر قرار دهیم $S_M(t)=\sum_{i,j}(-1)^i\beta_{i,j}t^j$ آنگاه

$$P(M,t)=\frac{S_M(t)}{(1-t)^{n+1}} \tag{۳۲}$$

([۲] را ببینید) و بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{a}(M)=\deg(P(M,t))&=\deg(S_M(t))-(n+1)\\&=\varepsilon_q+q-(n+1)\end{aligned} \tag{۳۳}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}(M)=\varepsilon_q&=\mathrm{a}(M)+(n+1-q)\\&=\mathrm{a}(M)+\dim(M)\end{aligned} \tag{۳۴}$$

□

قضیه ۴-۳- فرض کنید $\mathcal{C}_S$ خم تصویری تکجمله‌ای وابسته به $\mathcal{S}=\{a_1,\dots,a_p\}$ باشد بطوریکه $0<a_1<\dots<a_p$ و $\mathrm{GCD}(\{a_i\})=1$. در این صورت:

$$\begin{aligned}\Delta H_M(i)&=H_{\mathrm{gr}(\mathcal{S})}(i)\\&=\#\mathrm{StbBasis}(\Gamma)_{\le i}+\#\mathrm{UnStable}(\Gamma)_i\end{aligned} \tag{۳۵}$$

و

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}(\mathcal{C}_S)=\max\{&\mathrm{ord}_{\mathcal{S}}(n) :\\ &n \in \mathrm{UnStable}(\Gamma) \cup \mathrm{StbBasis}(\Gamma)\}\end{aligned} \tag{۳۶}$$

اثبات. می‌دانیم که $\frac{\Bbbk[\mathcal{C}_S]}{(\overline{X}_0)}=\frac{\Bbbk[X_0,\dots,X_p]}{(\ker(\varphi),X_0)} \cong \mathrm{gr}(\mathcal{S})$. ولی $\overline{X}_0$ یک عنصر منظم روی $\Bbbk[\mathcal{C}_S]$ است و طبق گزاره ۲۰-۲۰ از [۳] داریم

$$\mathrm{reg}(\Bbbk[\mathcal{C}_S])=\mathrm{reg}\left(\frac{\Bbbk[\mathcal{C}_S]}{(\overline{X}_0)}\right)=\mathrm{reg}(\mathrm{gr}(\mathcal{S})) \tag{۳۷}$$

همچنین دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to \Bbbk[\mathcal{C}_S](-1) \xrightarrow{\overline{X}_0} \Bbbk[\mathcal{C}_S] \to \frac{\Bbbk[\mathcal{C}_S]}{(\overline{X}_0)}=\mathrm{gr}(\mathcal{S}) \to 0 \tag{۳۸}$$

را در نظر بگیرید که $\overline{X}_0$ تابع ضرب در $\overline{X}_0$ است. در این صورت

$$\begin{aligned}\dim_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathcal{C}_S]_i)&=\dim_{\Bbbk}(\Bbbk[\mathcal{C}_S](-1)_i)\\&+\dim_{\Bbbk}(\mathrm{gr}(\mathcal{S})_i)\end{aligned} \tag{۳۹}$$

ولی $\dim(\Bbbk[\mathcal{C}_S](-1)_i)=\dim(\Bbbk[\mathcal{C}_S]_{i-1})$. بنابراین

$$\begin{aligned}\Delta H_{\Bbbk[\mathcal{C}_S]}(i)&=H_{\Bbbk[\mathcal{C}_S]}(i)-H_{\Bbbk[\mathcal{C}_S]}(i-1)\\&=H_{\mathrm{gr}(\mathcal{S})}(i)\end{aligned} \tag{۴۰}$$

فرض کنید A ایده‌آل $\mathrm{gr}(\mathcal{S})$ تولید شده توسط

تمام τ^a ها باشد که a روی تمام عناصر ناپایدار Γ تغییر می‌کند. فرض کنید $a \in \mathrm{UnStable}(\Gamma)$، در این صورت به ازای هر $i \in \{1,\dots,p\}$ حاصل ضرب $\tau^{a_i}\tau^a$ یا صفر است یا برابر با τ^{a_i+a} است که $a_i + a \in \mathrm{UnStable}(\Gamma)$. بنابراین

$$A = \bigoplus_{a\in \mathrm{UnStable}(\Gamma)} \Bbbk\, \tau^a \tag{۴۱}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\dim(A)=0$. برای این منظور فرض کنید $a \in \mathrm{UnStable}(\Gamma)$ و $i \in \{1,\dots,p\}$. کافی است ثابت کنیم $\tau^{a_i} \in \mathrm{rad}(\mathrm{Ann}(\tau^a))$. به ازای هر $i \in \{1,\dots,p-1\}$ طبق لم ۳-۱۱ داریم $\tau^{a_i} \in \mathrm{Nil}(\mathrm{gr}(S)) \subseteq \mathrm{rad}(\mathrm{Ann}(\tau^a))$. بنابراین کافی است ثابت کنیم $\tau^{a_p} \in \mathrm{rad}(\mathrm{Ann}(\tau^a))$. از آنجا که $a \in \mathrm{UnStable}(\Gamma)$، عدد صحیح مثبت k وجود دارد بطوریکه $\mathrm{ord}_S(a+ka_p) < \mathrm{ord}_S(a)+k$. بنابراین

$$(\tau^{a_p})^k\tau^a = 0 \tag{۴۲}$$

و از اینجا بدست می‌آید که $\tau^{a_p} \in \mathrm{rad}(\mathrm{Ann}(\tau^a))$. دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to A \to \mathrm{gr}(S) \to \frac{\mathrm{gr}(S)}{A} \to 0 \tag{۴۳}$$

از R-مدولهای مدرّج را در نظر بگیرید. داریم

$$1 = \dim(\mathrm{gr}(S)) = \max\{\dim(A), \dim(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A})\} \tag{۴۴}$$

از آنجا که $\dim(A)=0$، داریم $\dim(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A}) = 1$. همچنین τ^{a_p} یک عنصر منظم روی $\frac{\mathrm{gr}(S)}{A}$ است، زیرا اگر τ^{a_p} مقسوم علیه صفر روی $\frac{\mathrm{gr}(S)}{A}$ باشد آنگاه عنصر $a \notin \mathrm{UnStable}(\Gamma)$ وجود دارد بطوریکه $\tau^{a_p}(\tau^a + A) = A$ یا بطور معادل $a_p + a \in \mathrm{UnStable}(\Gamma)$. ولی این موضوع با لم ۳-۹ در تناقض است. بنابراین A و $\frac{\mathrm{gr}(S)}{A}$ کوهن- مکولی از بعد به ترتیب 0 و 1 هستند.

حال نشان می‌دهیم که $(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A})_i$ دارای $\Bbbk$-پایه‌ای متشکل از تمام کلاسهای همارزی $\tau^{n+(i-\mathrm{ord}_S(n))a_p} + A$ است که $n \in \mathrm{StbBasis}(\Gamma)$ و $\mathrm{ord}_S(n) \le i$. به وضوح مجموعه $\{\tau^a + A : a \in \mathrm{Stable}(\Gamma),\ \mathrm{ord}_S(a) = i\}$ تشکیل یک $\Bbbk$-پایه برای $(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A})_i$ می‌دهد. فرض کنید $a \in \mathrm{Stable}(\Gamma)$ و $\mathrm{ord}_S(a) = i$. در این صورت عدد صحیح مثبت $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $a - ka_p \in \mathrm{StbBasis}(\Gamma)$. قرار می‌دهیم $n = a - ka_p$. در این صورت

$$\mathrm{ord}_S(a) = \mathrm{ord}_S(n+ka_p) = \mathrm{ord}_S(n) + k \tag{۴۵}$$

پس

$$\begin{aligned} n+(i-\mathrm{ord}_S(n))a_p &= n+(\mathrm{ord}_S(a)-\mathrm{ord}_S(n))a_p \\ &= n+ka_p = a. \end{aligned} \tag{۴۶}$$

بنابراین $H_{\mathrm{gr}(S)/A}(i) = \#\mathrm{StbBasis}(\Gamma)_{\le i}$ و از اینجا بدست می‌آید که $P_{\mathrm{gr}(S)/A} = a_p$ و اگر

$$u = \max\{\mathrm{ord}_S(n) : n \in \mathrm{StbBasis}(\Gamma)\} \tag{۴۷}$$

آنگاه

$$P_{\mathrm{gr}(S)/A}(u-1) \ne H_{\mathrm{gr}(S)/A}(u-1) \tag{۴۸}$$

و $P_{\mathrm{gr}(S)/A}(i) = H_{\mathrm{gr}(S)/A}(i)$ برای $i \ge u$.

بنابراین $\mathrm{a}(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A}) = u-1$ و از اینجا داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(\frac{\mathrm{gr(S)}}{A}) &= \mathrm{a}(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A}) + \dim(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A}) \\ &= u-1+1 = u \end{aligned} \tag{۴۹}$$

همچنین داریم $H_A(i) = \#\mathrm{UnStable}(\Gamma)_i$ و $P_A(i) = 0$. اگر قرار دهیم $v = \max\{\mathrm{ord}_S(n) : n \in \mathrm{UnStable}(\Gamma)\}$ آنگاه $P_A(v) \ne H_A(v)$ و $P_A(i) = H_A(i)$ برای $i \ge v+1$. بنابراین $\mathrm{a}(A) = v$ و از اینجا داریم

$$\mathrm{reg}(A) = \mathrm{a}(A) + \dim(A) = v \tag{۵۰}$$

دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to A_i \to \mathrm{gr}(S)_i \to (\frac{\mathrm{gr}(S)}{A})_i \to 0 \tag{۵۱}$$

از $\Bbbk$-فضاهای برداری متناهی مولد وجود دارد. بنابراین

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{gr}(S)}(i) &= \dim_\Bbbk(\mathrm{gr}(S)_i) \\ &= \dim_\Bbbk((\frac{\mathrm{gr}(S)}{A})_i) + \dim_\Bbbk(A_i) \\ &= \#\mathrm{StbBasis}(\Gamma)_{\le i} + \#\mathrm{UnStable}(\Gamma)_i \end{aligned} \tag{۵۲}$$

از آنجا که $\dim(A) = 0$، داریم

$$\mathrm{reg}(\mathrm{gr}(S)) = \max\{\mathrm{reg}(A), \mathrm{reg}(\frac{\mathrm{gr}(S)}{A})\} \tag{۵۳}$$

بنابراین

$$\operatorname{reg}(C_S) = \max\{\operatorname{ord}_S(n) : n \in \operatorname{UnStable}(\Gamma) \cup \operatorname{StbBasis}(\Gamma)\} \quad (٥٤)$$

$\square$

مثال ۴-۵- فرض کنید S همانند مثال ۳-٤ باشد. با استفاده از نرم‌افزار مکولی ۲ دیاگرام بتی $\Bbbk[C_S]$ به شکل زیر است.

	0	1	2	3
0:	1	–	–	–
1:	–	1	–	–
2:	–	–	–	–
3:	–	–	–	–
4:	–	4	6	2

بنابراین $\operatorname{reg}(C_S) = 4$. از طرفی

$$\max\{\operatorname{ord}_S(n) : n \in \operatorname{UnStable}(\Gamma)\} = \max\{\operatorname{ord}_S(n) : n \in \{6,8,13\}\} = 4 \quad (٥٥)$$

و

$$\max\{\operatorname{ord}_S(n) : n \in \operatorname{StbBasis}(\Gamma)\} = \max\{\operatorname{ord}_S(n) : n \in \{0,2,4,5,10,15,20\}\} = 4 \quad (٥٦)$$

۵- مراجع

[1] Bermejo, I. G.; Gimenez, P.; "*On Castelnuovo-Mumford regularity of projective curves*, Proc. A. M. S. **128(5)** (1999) 1293-1299

[2] Bruns, W.; Herzog, J.; *Cohen-Macaulay rings*, Revised edition, Cambridge University Press (1993).

[3] Eisenbud, D,; *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Spriger, Berlin, Heidelberg, New York, 1995

[4] Patil, D. P.; Roberts, L. G.; " *Hilbert functions of monomial curves*. J. Pure. Appl. Alg. **183** (2002) 275-292.

[5] Roberts, L. G.; " *Certain projective curves with unusual Hilbert function*. J. Pure. Appl. Alg. **104** (1995) 303-311.

[6] Villareal, R. H.; *Monomial Algebras*. Marcel Dekker., Inc. New York. Basel, 2001.

۶- زیر نویسها

[1] Projective dimension
[2] Castelnuovo-Mumford regularity
[3] Local cohomology modules
[4] Homomorphism
[5] Annihilator
[6] Hilbert function
[7] Hilbert polynomial
[8] Alternative difference
[9] Poincare series
[10] a-invariant
[11] Monoid
[12] Isomorphism