

بررسی رفتار محدودکننده‌های شیب در گرادیان‌های هیدرولیکی شدید

مجتبی علی‌پرستⁱ؛ مرتضی کلاهدوزانⁱⁱ؛ محمدرضا مجدزاده طباطباییⁱⁱⁱ

چکیده

نتایج حاصل از روش‌های مختلف عددی در گرادیانهای هیدرولیکی شدید عمدتاً با نوساناتی همراه است. در این تحقیق برای جلوگیری از ایجاد نوسانات کاذب، بررسی رفتار یک طیف از محدودکننده‌های شیب در دو رژیم ماندگار و غیرماندگار در نظر گرفته شده است. شناخت رفتار این طیف از محدودکننده‌ها در تدقیق نتایج حاصله از حل عددی مؤثر است. برای این منظور یک مدل دوبعدی در پلان به روش احجام محدود روی شبکه بی‌سازمان مثلثی به صورت مرکزیت سلول توسعه داده شده است. معادلات آب کم عمق بر اساس حل مسأله ریمان و براساس نوع انتشار موج روش "گودونوو" حل گردیده‌اند. برای محاسبه شار از روش "رو" و برای محاسبه گرادیان‌های سلولی از روش "منقطع سازی جهتی از کرانه بالا" استفاده شده است. مدل دارای دقت مرتبه دوم مکانی و زمانی است که دقت مرتبه دوم زمانی آن از اعمال روش رونگه - کوتا دو مرحله‌ای به دست آمده است. نتایج حاصل از مدل در دو مثال ناپیوستگی استاندارد در مسائل هیدرولیک (شکست سد و پرش هیدرولیکی) ارائه شده است. این نتایج نشان‌دهنده تطابق مناسبی بین مقادیر محاسباتی و تحلیلی است.

کلمات کلیدی

روش احجام محدود، شبکه بی‌سازمان مثلثی، مسأله ریمان، روش "گودونوو"، محدودکننده‌های شیب، روش Roe-Upwind

Study the Behavior of Slope Limiters in Intensive Hydraulic Gradients

M. Aliparast; M. Kolahdoozan; M. R. M. Tabatabai

ABSTRACT

Results obtained from different numerical methods applying to intensive hydraulic gradients are associated with fluctuations. In current study, attempts have been made to eliminate non-physical oscillations by the use of slope limiters in both steady and unsteady flow conditions. A 2D, depth-integrated, free surface flow solver is developed on the cell centered unstructured triangular grids. The governing differential equations were discretized using Finite Volume Method. Shallow water equations were solved principally by Riemann problem and Godunov-type wave propagation formulation. The model has second order accuracy spatially and temporally. For the time derivatives, the two-step Runge-Kutta method was deployed. Results obtained from the developed model were verified against analytical approaches found in the literature for dam break and oblique hydraulic jump. A comparison of numerical and analytical results represents reasonable degree of similarity.

KEYWORDS

ⁱ کارشناس ارشد مهندسی آب، دانشکده عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیر کبیر

ⁱⁱ استادیار دانشکده عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیر کبیر (نویسنده طرف مکاتبه mklhdzan@aut.ac.ir)

ⁱⁱⁱ استادیار گروه مهندسی آب، دانشگاه صنعت آب و برق (وزارت نیرو)

داده شدند. در روش‌های پیشرفته حجم محدود از نوع "گودونو" برای دست یافتن به دقت مرتبه بالاتر و برای حفظ یکنواختی از محدودکننده‌های شار^{۱۱} و یا شیب^{۱۲} در بازسازی اطلاعات روی هر سلول استفاده می‌شود. بازسازی خطی اطلاعات روی هر سلول بر اساس روش‌های یکنواخت "بالادست"^{۱۳} برای معادلات بقا (MUSCL)^{۱۴} که توسط "فن لیر"^{۱۵} توسعه داده شدند، به روش‌های با دقت مرتبه دوم منجر می‌شود [۳]. درحالی که برای دستیابی به دقت مرتبه بالاتر از روش‌های بازسازی سهموی یا برون‌یابی‌های ذاتاً غیرنوسانی [۲۰ و ۲۴] می‌توان بهره برد [۱۹].

"ونگ"^{۱۶} و "لیو"^{۱۷} چهار روش حجم محدود Roe-MUSCL، Roe-Upwind، HLL-MUSCL و CFL7 را روی شبکه‌های مثلثی با هم مقایسه کردند. نتایج حاصله از روش‌های فوق برای مدلسازی پرش هیدرولیکی مایل و شکست سد، نشان‌دهنده وجود نوسانات کاذب در جواب‌ها بود [۲۹]. براساس نتایج حاصل، روش Roe-Upwind از سایر روش‌هایی که در بالا ذکر شد نتایج دقیق‌تری داشت.

در این تحقیق از محدود کننده شیب برای جلوگیری از ایجاد نوسانات کاذب استفاده شده است که عمدتاً بر روی پدیده‌های هیدرولیکی آزمایش می‌شود.

Zoppou و Roberts از ۲۰ روش عددی صریح برای شبیه‌سازی مسأله شکست سد استفاده کردند. اکثر روش‌ها برای جریان‌های زیر بحرانی نتایج معقولی داشتند. با وجود اینکه اعمال محدود کننده‌های شیب بر پیچیدگی مسأله می‌افزاید، عمدتاً از روش‌های مرتبه اول دقیق‌تر هستند [۳۱].

با توجه به تنوع محدودکننده‌ها، در این تحقیق رفتار یک طیف از این محدودکننده‌ها در دو جریان ماندگار و غیرماندگار در مسائل آبی بررسی می‌شود تا با شناخت رفتار این طیف، نوع مناسب برای هر مسأله خاص مشخص شود.

۲- معادلات حاکم

در مسایلی که مقدار شتاب در جهت قائم ناچیز باشد و همچنین بتوان از اثر مؤلفه قائم سرعت در مقایسه با مؤلفه‌های افقی سرعت صرف نظر کرد، می‌توان توزیع فشار را هیدرواستاتیک فرض کرد و مسأله را به صورت دوبعدی در افق در نظر گرفت. در این حالت، معادلات آب کم عمق حاصل، یک دستگاه غیرخطی دوبعدی غیر ماندگار از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی هذلولوی خواهند بود [۱۷].

معادلات آب کم عمق بدون در نظر گرفتن اثرات لزجت، شیب کف و جملات اصطکاکی نیروی باد و نیروی کوریولیس،

روش‌های عددی معمول قادر به مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها به هنگام حل معادلات دیفرانسیل جزئی نیستند. در روش‌های معمول حل معادلات دیفرانسیل جزئی، ابتدا نواحی اطراف ناپیوستگی مدل می‌شود و سپس با استفاده از روش‌های روندیابی ریاضی، محل این ناپیوستگی‌ها تعیین می‌گردد. استفاده از این روش‌ها که در طبقه روش‌های "روندیابی ناپیوستگی"^{۱۸} قرار دارند، در مسایل دوبعدی و سه‌بعدی بسیار پیچیده و مشکل هستند. اخیراً با استفاده از روش‌های "تسخیر ناپیوستگی"^{۱۹} برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی، ناپیوستگی‌های موجود در جواب به صورت خودکار و بدون نیاز به استفاده از روش‌های روندیابی ریاضی مشخص می‌شوند.

بسیاری از مدل‌های هیدرودینامیکی برای مدل‌سازی معادلات آب کم‌عمق بر اساس روش تفاضل‌های محدود^{۲۰} توسعه داده شده‌اند [۲، ۱۱ و ۱۶]. در روش تفاضل‌های محدود عدم تطابق خطوط مختصاتی با مرزهای قلمروی حل، به جواب‌های تقریبی منجر می‌شود. شبکه‌های "منطبق بر مرز"^{۲۱} با تبعیت از مرزهای قلمروی حل، مشکل مذکور را برطرف می‌کنند. در این روش‌ها معادلات جریان از مختصات کارتیزین به مختصات منحنی‌الخط تبدیل می‌شوند و سپس همانند روش‌های تفاضل‌های محدود، مسأله حل می‌شود [۵، ۷ و ۱۵]. حل مسائل مختصات منحنی‌الخط به دلیل تبدیل مختصات، با مشکلاتی همراه است. از طرف دیگر، وارد شدن مشتقات تبدیل مختصات باعث ایجاد خطا می‌شود [۱۹]. استفاده از روش احجام محدود و انتگرال‌گیری قوانین بقا بر روی هر شبکه علاوه بر امکان استفاده از شبکه‌های نامنظم، استفاده از روش‌های حل با "دقت بالا"^{۲۲} را نیز میسر می‌سازد [۹ و ۱۸].

بنابراین با توجه به مشخصات روش احجام محدود و خصوصیت مسأله مورد مطالعه، استفاده از روش‌های احجام محدود با "دقت بالا" بر اساس حل مسأله ریمان انتخاب بسیار مناسبی است [۱۷].

منظور از روش "دقت بالا" ایجاد بهترین ترکیب میان روش‌های مرتبه اول و دوم است، به نحوی که از خصوصیات مطلوب هر دو روش استفاده شود. ایده اصلی روش‌های "دقت بالا"، که در اوایل دهه ۱۹۷۰ ارائه شده‌اند، از روش "گودونو"^{۲۳} سرچشمه می‌گیرد [۱۲]. در دهه ۱۹۸۰ هارتن^{۲۴}، فن لیر^{۲۵} و دیگران [۱۳، ۲۱، ۲۳، ۲۵ و ۲۸] روش‌های کاراتری را توسعه دادند. پس از این روش‌ها، روش‌های حذف تغییرات کل^{۲۶} توسعه

بر اساس متغیرهای پایستار به صورت روابط (۱) و (۲) می‌باشند [۲۶]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

که در این معادلات $h =$ عمق آب، $u, v =$ مؤلفه‌های سرعت به ترتیب در جهات x و y و $g =$ شتاب ثقل می‌باشد.

۳- حل عددی معادلات

همان طور که قبلاً ذکر شد برای مدل‌سازی عددی مسائلی که ناپیوستگی‌های شدید دارند، روش احجام محدود با "دقت بالا" انتخاب بسیار مناسبی است [۱۷]. در روش احجام محدود از معادلات حاکم بر روی سلول محاسباتی انتگرال گرفته می‌شود. به همین منظور از سیستم دستگاه معادلات (۱)، بر روی سلول اختیاری i انتگرال‌گیری می‌شود.

$$\int_{A_i} \frac{\partial U}{\partial t} dA + \int_{A_i} \nabla \cdot \mathbf{E} dA = 0 \quad (3)$$

که $\mathbf{E} = (F, G)$ و $A_i =$ مساحت حجم کنترل است. در این حالت، شکل شبکه مطالعه شده محدودیت ندارد. در این تحقیق شکل المان‌ها، مثلثی در نظر گرفته شده‌اند. با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال روی سطح گرادینان شار عبوری از وجوه حجم کنترل در معادله (۳) با انتگرال خطی که منحنی بسته آن، محیط سلول است به صورت رابطه (۴) جایگزین می‌شود:

$$\int_{A_i} \frac{\partial U}{\partial t} dA + \oint_{L_i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dL = 0 \quad (4)$$

که $L_i =$ مرز حجم کنترل i ام و $\mathbf{n} =$ بردار واحد برون سوی عمود بر مرز است. با استفاده از قضیه نقطه میانی، انتگرال خطی را می‌توان به صورت مجموع بردار شار روی هر ضلع سلول مثلثی به صورت رابطه (۵) تقریب زد [۲۹]:

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^3 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n}_{ij} \Delta L_{ij} \quad (5)$$

که منظور از ij ، ضلع z ام از سلول i ام است و $\Delta L_{ij} =$ طول ضلع z ام از سلول i ام و $\mathbf{E}^* =$ شار عددی مار از هر ضلع است که بر اساس روش‌های دقیق یا تقریبی حل مساله ریمان محاسبه می‌شود.

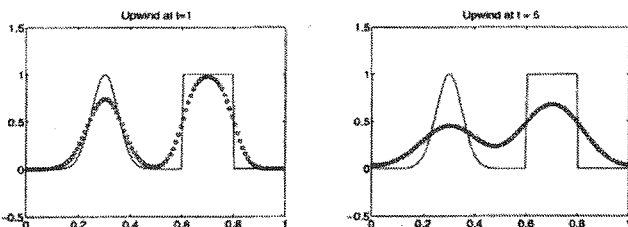
۳-۱- روش‌های "دقت بالا"

روش‌های مرتبه دوم در نواحی هموار دقت خوبی دارند،

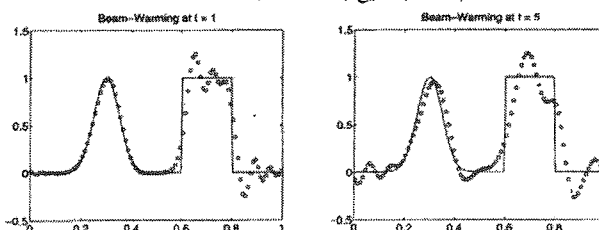
ولی این روش‌ها چون دارای خطای پخشیدگی^{۱۱} زیادی در ناپیوستگی‌ها هستند، لذا در چنین شرایطی نوسانی می‌شوند. از طرف دیگر، روش‌های مرتبه اول به علت خصوصیت یکنواختی^{۱۲}، در ناپیوستگی‌ها نوسانی نمی‌شوند ولیکن به لحاظ غالب بودن خطای هدردهی^{۱۳}، بر طبق شکل (۱) جواب دارای دقت مناسبی نخواهد بود. شکل (۱-الف) دارای دقت مرتبه اول است و شکل (۱-ب) دقت مرتبه دوم را دارد.

ایده اصلی روش‌های "دقت بالا" عبارت است از بهترین ترکیب میان روش‌های مرتبه اول و دوم به نحوی که از خصوصیات مطلوب هر دو روش استفاده شود. تا جایی که جواب دارای رفتار همواری باشد از دقت مرتبه دوم استفاده می‌شود و در غیر این صورت ترکیبی از هر دو اعمال می‌شود [۱۷]. به منظور دست یابی به چنین خصوصیتی، در هر سلول محاسباتی از محدود کننده‌های شیب برای محاسبه گرادینان‌های محاسبه شده استفاده می‌شود.

ایده به کارگیری محدودکننده‌ها در روش‌های با "دقت بالا" به اوایل دهه ۱۹۷۰ در روش هیبرید^{۱۴} توسط هارتن و زواس^{۱۵} (۱۹۷۲) و در روش انتقال شماره تصحیح شده^{۱۶} توسط بوریس^{۱۷} و بروک^{۱۸} (۱۹۷۲) برمی‌گردد [۸]، [۱۴]. در این روش‌ها پس از محاسبه گرادینان‌ها، ضرایبی به آنها اعمال می‌شود (محدود کننده‌های شیب) تا از ایجاد نوسانات کاذب در جواب‌ها جلوگیری شود. شکل (۲) اثر اعمال محدود کننده را در جواب نهایی برای یک مسأله خاص نشان می‌دهد. در اشکال (۱) و (۲) مقادیر نقطه چین حاصل از حل عددی است.



شکل (۱-الف) نتایج با دقت مرتبه اول



شکل (۱-ب) نتایج با دقت مرتبه دوم

شکل (۱): روش‌های مرتبه اول و دوم بطور جداگانه

می شود:

$$\mathbf{E}^*((U_L)_{ij}, (U_R)_{ij}) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}((U_L)_{ij}) + \mathbf{E}((U_R)_{ij}) \right] \cdot \mathbf{n} - \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}^k |\tilde{\alpha}^k| \tilde{\mathbf{e}}^k \right)_{ij} \quad (7)$$

که $\tilde{\alpha}^k$ ضرایب تجزیه ناپیوستگی بر اساس شرط جهش رانکین-هوشنگت^{۲۸} بین دو سلول مجاور هستند که به صورت رابطه (۸) بیان می شوند:

$$U_R - U_L = \sum \tilde{\alpha}^k \tilde{\mathbf{e}}^k, \quad (8)$$

و مقادیر آنها به میزان ناپیوستگی های بین دو سلول $\Delta = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}_R - \begin{pmatrix} \end{pmatrix}_L$ وابسته بوده و بر اساس روابط (۹) و (۱۰) به دست می آیند:

$$\tilde{\alpha}^{1,3} = \frac{\Delta h}{2} \pm \frac{1}{2c} [\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (\tilde{u}, \tilde{v}) \cdot \mathbf{n} \Delta h] \quad (9)$$

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{1}{c} \{ [\Delta(hv) - \tilde{v} \Delta h] n_x - [\Delta(hu) - \tilde{u} \Delta h] n_y \} \quad (10)$$

بدین ترتیب، شار عددی بر اساس تقریب "رو" قابل محاسبه است. سپس روش "منقطع سازی جهتی از کرانه بالا" برای بازسازی U_L, U_R به کار گرفته می شود. بر اساس روش "منقطع سازی جهتی از کرانه بالا" مقدار تابع در هر نقطه به صورت رابطه (۱۱) با گرادیان سلول مرتبط می شود:

$$U(x, y) = U_i + \nabla U_i \cdot \mathbf{r} \quad (11)$$

که در آن، \mathbf{r} برداری از مرکز سلول به هر نقطه (x, y) در داخل سلول و ∇U_i گرادیان مرکز سلول است. با استفاده از قضیه گوس و با انتگرال گیری روی منحنی بسته مرز سلول i این گرادیان ها به دست می آیند [۲۹].

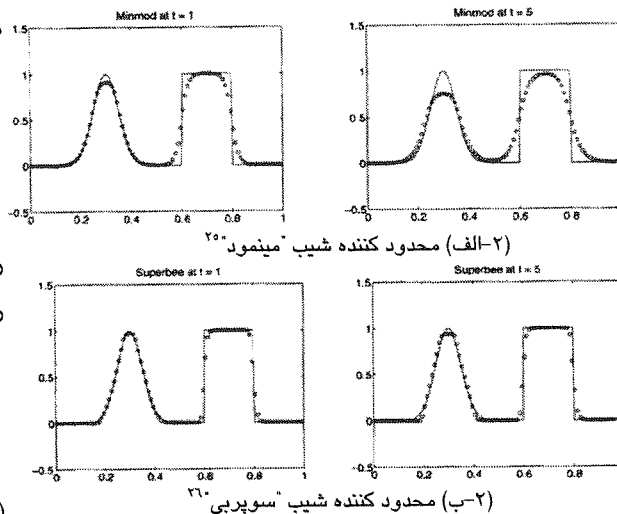
بر اساس پیشنهاد پین و چنگ^{۲۹} (۱۹۹۳) برای تعیین دقیق تر گرادیان باید پس از محاسبه گرادیان مرکزی سلول ها، گرادیان هر سلول با استفاده از میانگین وزنی بر اساس رابطه (۱۲) اصلاح شود [۲۲]:

$$\nabla U_A^{\text{mod}} = \frac{1}{2} (\nabla U_A + w_B \nabla U_B + w_C \nabla U_C + w_D \nabla U_D) \quad (12)$$

که ضرایب آن از رابطه (۱۳) قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} w_B &= (\mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{r}_{CD}) / (\mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{r}_{CD}) \\ w_C &= (\mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{r}_{DB}) / (\mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{r}_{CD}) \\ w_D &= (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{BC}) / (\mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{r}_{CD}) \end{aligned} \quad (13)$$

در این رابطه، $\nabla U_{B,C,D}$ گرادیان های مؤلفه های بردار U به ترتیب در سلول های B, C و D هستند که بر اساس قضیه گوس محاسبه می شود و بردارهای \mathbf{r} بردارهای فاصله ای هستند که از مرکز سلول A به مرکز سلول های مجاور وصل



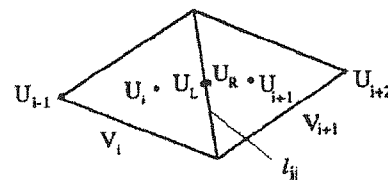
شکل (۲): اثر اعمال محدود کننده

۳-۲- محاسبه شار عددی عبوری از هر ضلع

در حل معادلات آب کم عمق به نحوه توزیع پارامترها روی هر سلول یا همان گرادیان سلولی و همچنین نحوه محاسبه شار بایستی توجه کرد. بر اساس این که از چه روشی برای محاسبه شار (\mathbf{E}^*) و محاسبه توزیع پارامترها بر روی هر سلول استفاده شود، روش های مختلف معرفی شده اند. تحقیقات ونگ و لیو (۲۰۰۰) بر روی روش های مختلف نشان دهنده آن است که روش Roe-Upwind دارای حداقل خطا در تخمین عمق و سرعت است [۲۹]. لذا در این تحقیق، از روش "رو" برای محاسبه شار عددی و از روش "منقطع سازی جهتی از کرانه بالا"^{۳۰} برای بازسازی متغیرها استفاده شده است. روش تقریبی "رو" حل ریمان به صورت معادله (۶) قابل بیان است [۲۹].

$$\mathbf{E}^*((U_L)_{ij}, (U_R)_{ij}) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}((U_L)_{ij}) + \mathbf{E}((U_R)_{ij}) \right] \cdot \mathbf{n} - |\tilde{\mathbf{A}}| \left[(U_L)_{ij} - (U_R)_{ij} \right] \quad (6)$$

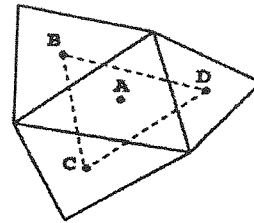
که در آن $\tilde{\mathbf{A}} =$ ماتریس ژاکوبین شار است که با استفاده از میانگین گیری "رو" [۲۳] محاسبه می شود، $\mathbf{n} =$ بردار واحد برون سوی عمود بر مرز المان و زیر نویس های R و L به ترتیب مقادیر پارامترها را در سلول مورد نظر و سلول مجاور نشان می دهند؛ شکل (۳).



شکل (۳): نحوه نام گذاری اندیس ها

نهایتاً پس از اعمال میانگین گیری "رو" رابطه (۷) نتیجه

می‌شوند (شکل (۴)). در این تحقیق اثر اعمال این میانگین‌گیری وزنی در همگرایی جواب به طور کیفی بررسی شده است.



شکل (۴): مسیر BCD، مسیر انتگرال‌گیری برای محاسبه گرادیان سلولی

پس از محاسبه گرادیان‌های سلولی و تصحیح آنها با اعمال میانگین وزنی، برای جلوگیری از ایجاد نوسانات کاذب و پخشیدگی اطراف ناپیوستگی‌ها و همچنین تضمین حفظ یکنواختی جواب باید از توابع محدود کننده شیب به صورت معادله (۱۴) استفاده شود [۲۹]:

$$U(x, y) = U_i + \phi \nabla U_i \cdot \mathbf{r} \quad (14)$$

در این رابطه، ϕ محدودکننده شیب اختیاری است و می‌تواند مقداری بین صفر تا یک داشته باشد. این روش در نهایت به یک روش دقت مرتبه دوم مکانی منجر می‌شود. اگر ϕ برابر صفر قرار داده شود در این صورت دقت روش مرتبه اول خواهد بود.

برای محاسبه ϕ ، بارس^{۳۰} و یسپرسن^{۳۱} (۱۹۸۹) تابع محدودکننده‌ای به صورت رابطه (۱۵) تعریف کردند [۶]:

$$\phi = \min(\phi_j), \quad j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، ϕ_j عبارت است از:

$$\phi_j(r_j) = \max[\min(\beta r_j, 1), \min(r_j, \beta)] \quad (16)$$

که:

$$r_j(Q_j) = \begin{cases} (Q_0^{max} - Q_0) / (Q_j - Q_0) & \text{if } Q_j - Q_0 > 0 \\ (Q_0^{min} - Q_0) / (Q_j - Q_0) & \text{if } Q_j - Q_0 < 0 \\ 1 & \text{if } Q_j - Q_0 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

و

$$Q_0^{min} = \min(Q_0, Q_{neighbour}) \quad (18)$$

$$Q_0^{max} = \max(Q_0, Q_{neighbour})$$

در این روابط Q_j = مقدار محدود نشده متغیر در وسط ضلع سلول بر اساس اطلاعات سلول مجاور و Q_0 = مقدار پارامتر در مرکز سلول هستند. در معادله (۱۶)، $1 \leq \beta \leq 2$ است. در حالت خاص اگر $\beta = 1$ یا $\beta = 2$ باشد، محدود کننده به ترتیب از نوع "مینمود" یا "سوپربی" خواهد بود [۴]. در این تحقیق اثر تغییرات ضریب β در رفتار

روش عددی بررسی می‌شود.

۳-۳- انتگرال‌گیری زمانی

معادلات آب کم عمق در حالت دوبعدی یک دستگاه معادلات غیر خطی هذلولوی هستند. در معادلات غیرخطی، چنانچه ناپیوستگی در جواب وجود داشته باشد، این موج در حین انتقال تغییر شکل پیدا کرده و یا ممکن است به صورت یک موج ضربه‌ای یا انبساطی و یا ترکیبی از هر دو حالت در جهت خطوط مشخصه و با سرعت مشخصه حرکت کند. البته در این حالت سرعت مشخصه نیز متغیر می‌باشد [۱۷]. بر این اساس برای گسسته سازی زمانی از یک روش صریح^{۳۲} استفاده می‌شود. لهذا وجود ناپیوستگی در یک نقطه در یک گام زمانی بر روی دیگر نقاط همان سطح اثر نمی‌گذارد؛ بلکه مدت زمانی لازم است که اثر آن به دیگر نقاط برسد.

بنابر آنچه ذکر شد و برای دستیابی به دقت مرتبه دوم زمانی، با استفاده از روش "رونکه - کوتا" طی دو مرحله متغیرها محاسبه می‌شوند. در گام نخست، بر اساس متغیرهای سطح زمانی t^n ، متغیرها در سطح زمانی میانی $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t / 2$ محاسبه و سپس شار عددی با استفاده از مقادیر متغیرها در همین نیم‌گام زمانی محاسبه می‌شود. سایر پارامترها با استفاده از مقادیر متغیرها در گام زمانی t^n محاسبه می‌شوند.

در نهایت، معادلات حاکم بر پدیده به صورت رابطه (۱۹) بین می‌شوند:

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2A_i} \left(\sum_{j=1}^{NE} (F, G)_j \cdot n dL_j \right)^n + \frac{\Delta t}{2} S_i^n \quad (19)$$

$$U_i^n = U_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \left(\sum_{j=1}^{NE} (F, G)_j \cdot n dL_j \right)^{n+1/2} + \Delta t S_i^{n+1/2}$$

۴- ارزیابی مدل عددی

۴-۱- مدل‌سازی شکست سد

مسائل شکست سد از نوع جریان‌های غیرماندگار با تغییرات ناگهانی است که از آنها برای پیش حد نهایی پایداری عددی و کارایی مدل استفاده می‌شود [۲۹]. به منظور بررسی برخی از قابلیت‌های مدل توسعه داده شده، در این تحقیق، از مسأله شکست سد؛ که محققین زیادی آن‌را مطالعه کرده‌اند [۴، ۱۰، ۱۹، ۲۷، ۲۹ و ۳۰]، و اثر اعمال یک طیف از محدود کننده‌ها بررسی می‌شود. دامنه حل مسأله در محیطی به ابعاد $200m \times 200m$ است. عرض دهانه خروجی $75m$ است (شکل

شرایط اولیه و شرایط ورودی در این حالت عبارتند از:

$$h_0 = 1m, \quad u_0 = 8.57ms^{-1}, \quad v = 0$$

در مرز بالادست شرایط جریان ثابت و در مرز باز پایین دست شرط گرادیان صفر اعمال شده و برای دیواره‌های کانال نیز شرایط لغزشی^{۲۴} در نظر گرفته می‌شود. جریان ماندگار حاصل باید کاملاً فوق بحرانی بوده و بر اساس حل دقیق، با پرشی با زاویه $\beta = 30^\circ$ نسبت به محور x دو ناحیه قبل و بعد از پرش را از هم مجزا کند. جواب دقیق مسأله در پایین دست پرش برای مقادیر سرعت و سطح آب، به ترتیب عبارت است از:

$$[3] \quad h_2 = 1.5m, \quad |V_2| = 7.9556ms^{-1}$$

شکل (۱۲) پروفیل سطح آب را که از مدل توسعه داده شده به دست آمده است، نشان می‌دهد. در شکل (۱۴)، بر روی خط $x = 25m$ رقوم سطح آب حاصل از اعمال سه محدودکننده با هم مقایسه شده‌اند. با توجه به تطابق بسیار زیاد محدودکننده‌ها، مشخص می‌شود که در جریان ماندگار تفاوتی بین محدودکننده‌های مختلف دیده نمی‌شود. در این حالت نمی‌توان هیچ یک از محدودکننده‌ها را بر دیگری برتری داد.

۵- نتیجه‌گیری

تحقیقات انجام شده در زمینه گرادیان‌های هیدرولیکی شدید نشان‌دهنده وجود نوسانات کاذب در نتایج بوده است. براین اساس، محققین مختلف برای حذف این نوسانات و افزایش دقت نتایج حاصل از مدل عددی سعی کرده‌اند. در روش‌های پیشرفته احجام محدود برای دست یابی به دقت مرتبه بالاتر و برای حفظ یکنواختی، از محدود کننده‌های شار و یا شیب در بازسازی اطلاعات روی هر سلول استفاده می‌شود. در این تحقیق رفتار یک طیف از محدود کننده‌های شیب در حذف نوسانات و افزایش دقت نتایج بررسی شد. برای این منظور از یک مدل دوبعدی جریان با سطح آزاد بر روی شبکه بی‌سازمان مثلثی که به روش احجام محدود توسعه یافته است، استفاده شد. استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان قابلیت افزایش تعداد شبکه‌ها در مناطق حساس محاسباتی را افزایش داده است که به نوبه خود باعث افزایش دقت و جلوگیری از ناپایداری برنامه در اینگونه مناطق می‌شوند. براین اساس، محدود کننده‌های شیب در نظر گرفته شده، در مسائل ماندگار و غیرماندگار استاندارد اعمال شدند.

نتایج حاصل از تحقیقات نمایانگر این است که اثر نوع محدودکننده‌ها عمدتاً به جریان‌های غیرماندگار مربوط است و در جریان‌های ماندگار تغییر محسوسی در جواب‌ها ایجاد نمی‌شود. در رژیم جریان غیرماندگار محدودکننده شیب

ارتفاع آب در بالا دست ۱۰ m و در پایین دست ۵ m است. در لحظه شکست، دهانه به طور ناگهانی باز می‌شود. در شکل (۵) شبکه‌بندی مورد استفاده؛ که با برنامه تولید شبکه حاصل شده است، نمایش داده شده است [۱].

شکل (۶) شرایط اولیه اجرای مدل را نشان می‌دهد. شکل (۷) نمایانگر رقوم سطح آب در زمان $7/2$ ثانیه پس از شکست می‌باشد. در طول خط $y = 132.5m$ ، مقادیر عمق آب و سرعت در اثر اعمال محدودکننده‌های مختلف در زمان $7/2$ ثانیه پس از شکست سد مقایسه شده‌اند. در شکل (۸) مقادیر سرعت و در شکل (۹) مقادیر عمق آب به ازای محدودکننده‌های مختلف $\beta = 1, \beta = 1.25, \beta = 1.5, \beta = 1.75$ و $\beta = 2$ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. پیکان مشخص شده در نمودارها، بیانگر جهت افزایش ضریب β از ۱ تا ۲ است. با افزایش ضریب β ، گرادیان‌ها تندتر می‌شوند. ملایم‌ترین و کمترین گرادیان مربوط به $\beta = 1$ و شدیدترین گرادیان مربوط به $\beta = 2$ است. به ازای $\beta = 2$ نقطه اوج کمترین مقدار و به سمت $\beta = 1$ بر مقدار نقطه حداکثر افزوده می‌شود (شکل (۸)). با توجه به شکلهای (۸) و (۹) مشخص می‌شود که محدودکننده شیب "سوپر بی" ($\beta = 2$) گرادیان شدیدتر و محدودکننده شیب "می‌نمود" ($\beta = 1$) گرادیان ملایم‌تری محاسبه می‌کنند و از طرف دیگر، به ازای محدودکننده شیب "می‌نمود" نقطه اوج دارای مقدار بیشتری در مقایسه با اعمال محدودکننده شیب "سوپر بی" است.

شکل (۱۰) پروفیل سطح آب و شکل (۱۱) سرعت‌های به دست آمده از مدل را در کنار نتایج حاصل از مدل "ونگ و لیو" (۲۰۰۰) نشان می‌دهد. مقایسه دو سری نتایج نشان‌دهنده تطابق مناسب آنها است.

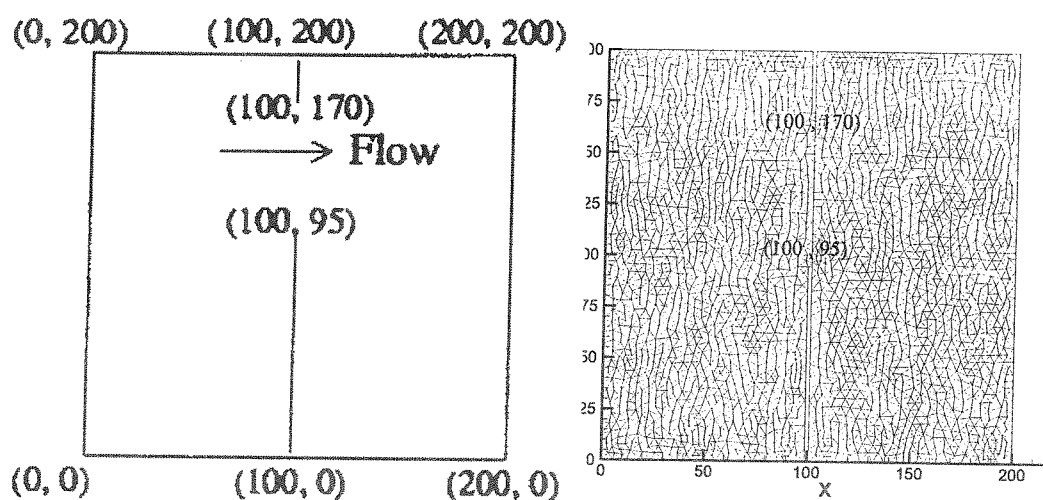
۴-۲- مدل‌سازی پرش هیدرولیکی مایل

با توجه به این که حل دقیق مسأله پرش هیدرولیکی مایل^{۲۳} در ادبیات فنی موجود است، می‌توان از آن به عنوان یک مسأله استاندارد، برای نمایش صحت عملکرد مدل استفاده کرد. در این مسأله پرش هیدرولیکی در اثر برخورد جریان فوق بحرانی به دیواره منحرف کننده جریان؛ که با زاویه $\alpha = 8.95^\circ$ نسبت به محور x در مقابل جریان قرار دارد، شکل می‌گیرد. پرش حاصل نیز با محور x زاویه β را می‌سازد. شکل (۱۲) نمایی از پلان مسأله و شبکه محاسباتی ایجاد شده را نشان می‌دهد. برای افزایش دقت در محل وقوع پرش، شبکه محاسباتی در این قسمت ریز شده است.

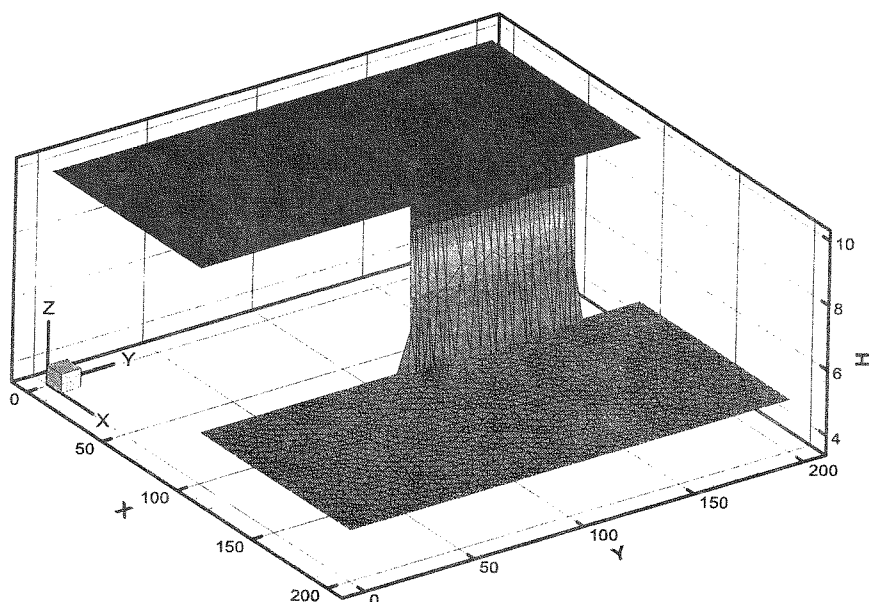
از محدودکننده‌های شیب نه تنها باعث حذف نوسانات می‌شود، بلکه دقت نتایج را نیز افزایش می‌دهد. نتایج آنالیز حساسیت مدل عددی نشان‌دهنده این است که در نقطه ماکزیمم، به ازای محدود کننده شیب مینمود نقطه اوج دارای بیشترین مقدار و به ازای محدود کننده شیب سوپریبی نقطه اوج دارای کمترین مقدار در مقایسه با دیگر محدودکننده‌هاست.

سوپریبی ($\beta = 2$) نسبت به سایر محدودکننده‌ها گرادیان بیشتری را نشان می‌دهد و با کم شدن ضریب β و نزدیک شدن شدن به محدودکننده شیب مینمود ($\beta = 1$) از مقدار گرادیان‌ها کاسته می‌شود.

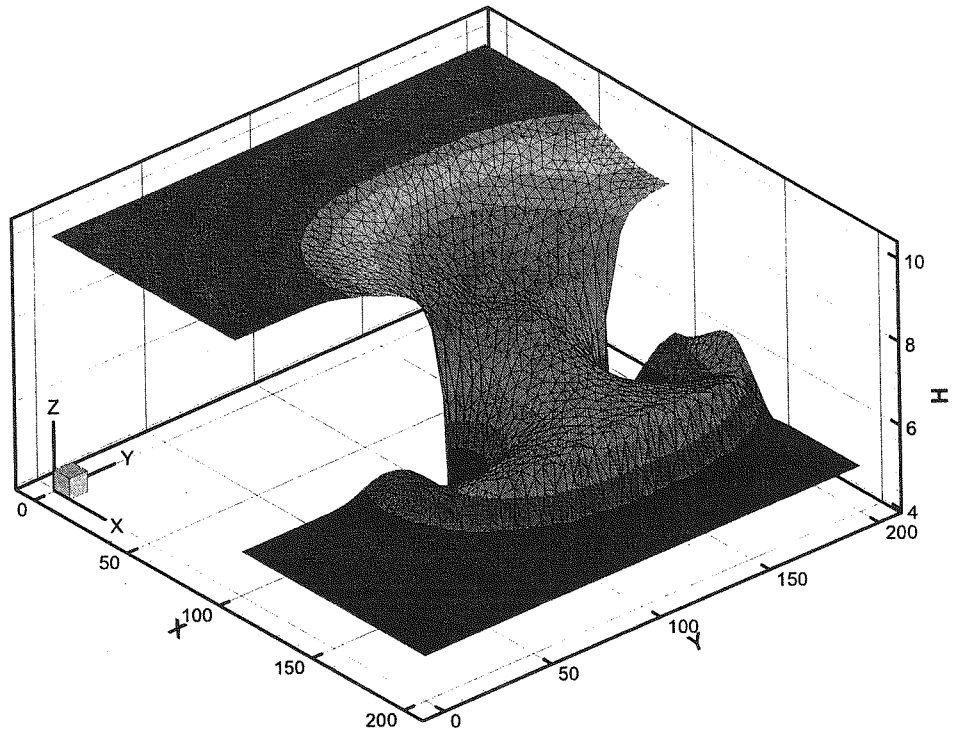
مقایسه نتایج حاصل از اعمال محدودکننده‌ها در هر دو نوع جریان ماندگار و غیرماندگار با نتایج حاصل از روش تحلیلی مسأله نمایانگر تطابق مناسب نتایج می‌باشد. در نتیجه استفاده



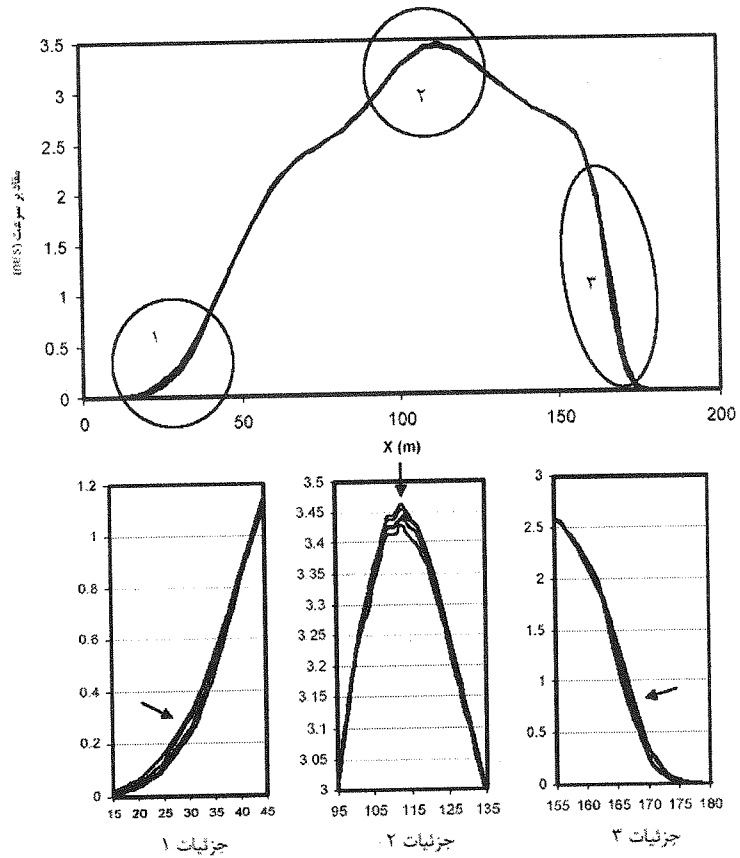
شکل (۵): نمایی از شبکه محاسباتی و پلان مسأله شکست سد



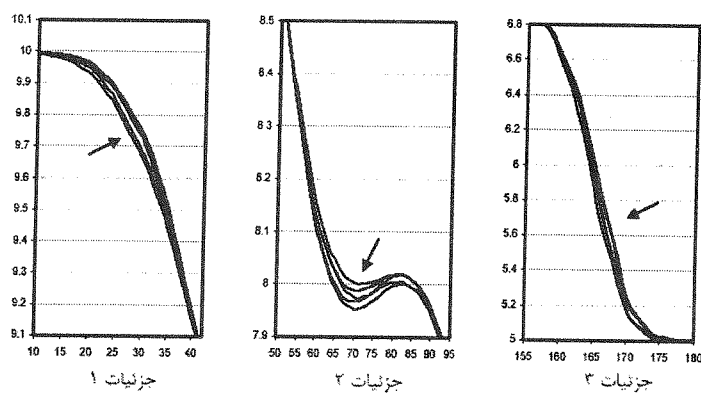
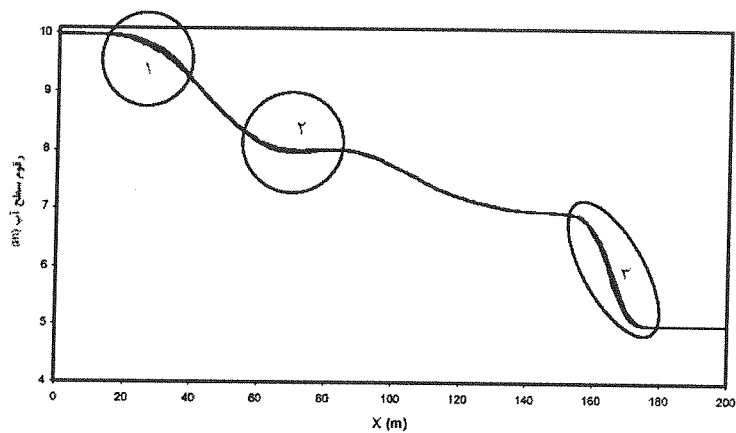
شکل (۶): رقوم سطح آب در لحظه اولیه شکست سد



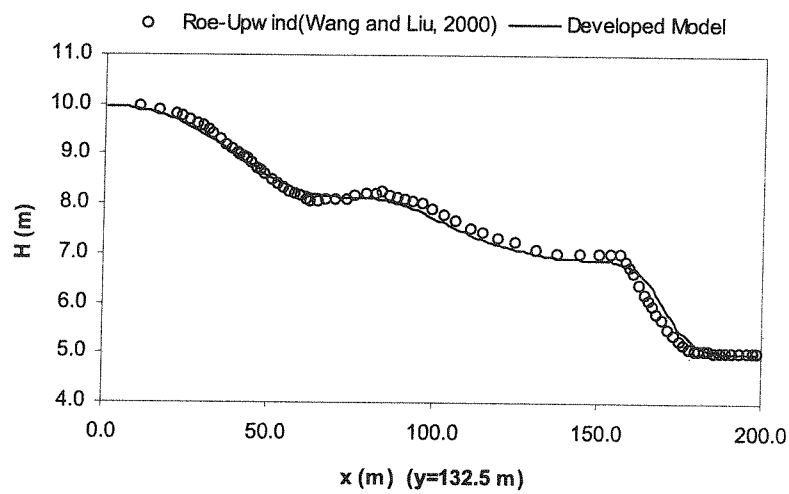
شکل (۷): رقوم سطح آب در ۷/۲ ثانیه پس از شکست سد



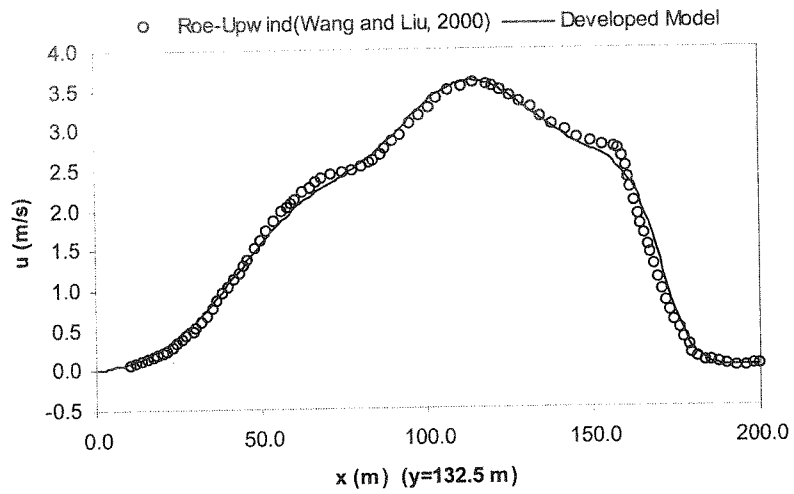
شکل (۸): مقایسه اثر محدودکننده‌های مختلف بر مقادیر سرعت‌ها روی خط $y = 132.5 \text{ m}$ در مسأله شکست سد



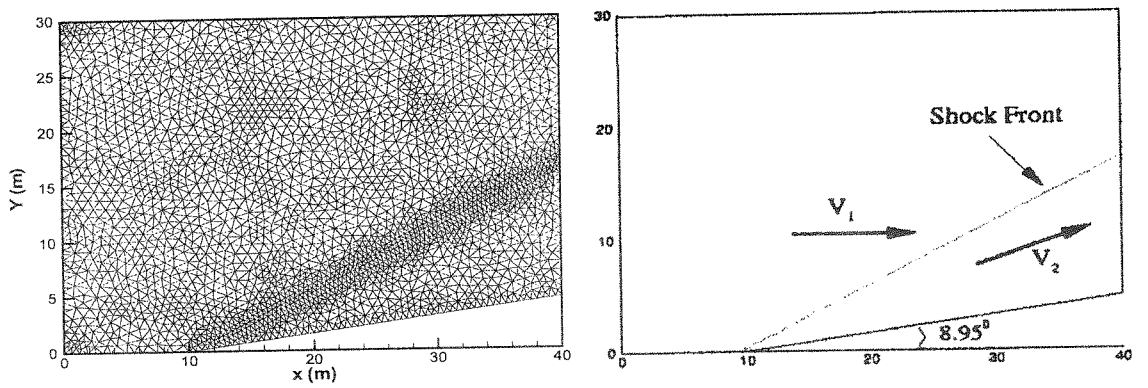
شکل (۹): مقایسه اثر محدودکننده‌های مختلف بر رقوم سطح آب روی خط $y = 132.5$ m در مسأله شکست سد



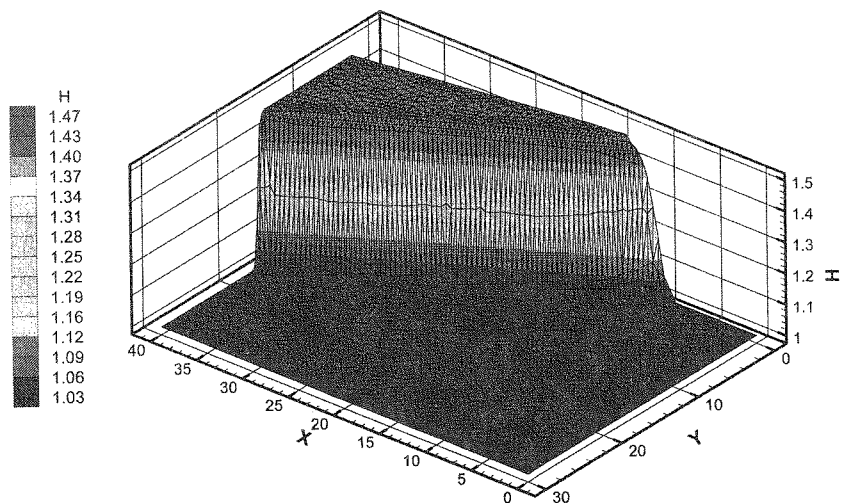
شکل (۱۰): مقایسه پروفیل سطح آب (آزمایش شکست سد)



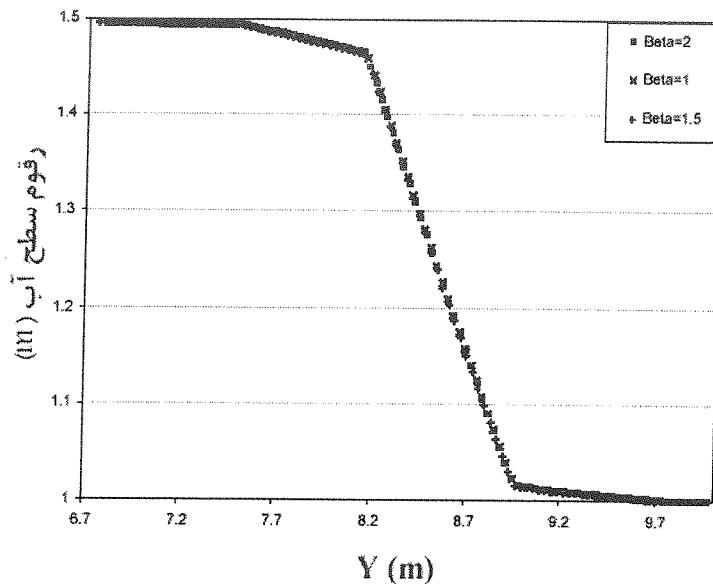
شکل (۱۱): مقایسه سرعت (آزمایش شکست سد)



شکل (۱۲): نمایی از پلان مسأله پرش هیدرولیکی مایل و شبکه محاسباتی مربوطه



شکل (۱۳): رقوم سطح آب در مسأله پرش هیدرولیکی مایل پس از ماندگار شدن



شکل (۱۴): مقایسه اثر محدودکننده‌های مختلف در مسأله پرش هیدرولیکی مایل

- [11] Falconer, R., "Numerical modeling of tidal circulation in harbore", J. Wtrwy., Prot.Coast., and Oc. Div., ASCE, 106(1), 31-48, 1980
- [12] Godunov, S., "A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations", *Math. Sbornik*, 43 271-306, 1959
- [13] Harten, A., "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *J. Computational Phys.*, 49, 357-393, 1983
- [14] Harten, A. and Zwas, G., "Self-adjusting hybrid schemes for shock computations", *J. Comput. Phys.*, 9(1972), p. 568, 1972.
- [15] Hauser, J., Paap, H., Eppel, D. and Mueller, A., "Solution of the shallow water equations for complex flow domains via boundary-fitted coordinates", *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 5, 727-744, 1985
- [16] Leendertse, J., "Aspect of a computational model for long-period water wave propagation", Tech. Rep.. RN-5294 PR, Rand Corporation, 1967.
- [17] Leveque, R.J., "Finite volume methods for hyperbolic problems", Cambridge University Press, UK, 2002
- [18] Lohner, R., Morgan, K., Perier, J. and Vahdati, M., "Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for Euler and Navier Stokes equations", *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 7, 1093 1109 1987
- [19] Mingham, C.G. and Causon, D.M., "High-resolution finite-volume method for shallow water flows", *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(6), 605-614, 1998
- [20] Nujic, M., "Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free surface flows", *J. Hydr. Res.*, 3(1) , 101-111, 1995
- [21] Osher, S. and Solomone, F., "Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws", *Math. Comput.*, 38 1982 339-374, 1982
- [22] Pan, D. and Cheng, J., "A second-order upwind finite-volume method for the Euler solution on unstructured triangular meshes", *Int. j. numer. methods fluids*, 16 1079 1098 1993
- [23] Roe, P.L., "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes", *J. Computational Phys.*, 43 357-372, 1981
- [24] Savic, L. and Holly Jr.F., "Dambreak flood waves computed by a modified Godunov method", *J. Hydr. Res.*, Delft, The Netherlands, 31(2), 187-204, 1993

مراجع

- [۱] علی‌پرست، مجتبی، مدل‌سازی فیزیکی و عددی جریان و انتقال رسوب در سدهای انحرافی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تهران. ۱۳۸۳
- [2] Abbot, M., Damsgaard, A. and Rodenhuis, G., "SYSTEM 2J 'Jupiter', (a design system for two dimensional nearly horizontal flows.", *J. Hydr. Res.*, Delft, The Netherlands, 11, 1-28 1973.
- [3] Alcrudo, F. and Garcia-Navarro, P., "A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16 489-500, 1993.
- [4] Anastasiou, K. and Chan, C.T. "Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 24 1225-1245 1997.
- [5] Barber, R., "Solving the shallow water equations using a non-orthogonal curvilinear coordinate system", *Hydraulic and environmental modeling: Coastal waters*, R. Falconer, ed., Ashgate Publishing Co., Brookfield, Vt., 469-480, 1992
- [6] Barth, T.J., and Jespersen, D.C., "The design and application of upwind schemes on unstructured meshes", *AIAA Paper* 89-0366 1989.
- [7] Barthwick, A. and Barber, R., "River and reservoir flow modeling using the transformed shallow water equation", *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 14 1193 1217 1992.
- [8] Boris, J.P. and Book, D.L., "Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works", *J. Comput. Phys.*, 11 38 1973
- [9] Causon, D., Clench, T. and Ingram, D., "The use of CFD techniques to investigate the physical nature of engine surge and its effect on a twin engine intake duct system", *Engine/Air-Frame Integration Conference*, Royal Aeronautical Society, London, U.K., 12.1-12.17, 1992.
- [10] Fagherazzi, S., Rasetarnera, P., Hussaini, M.Y. and Furbish, D.J., "Numerical solution of the dam-break problem with a discontinuous Galerkin method", *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(6), 532-539, 2004

- [25] Sewby, P.K., "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws", *SIAM J. Numer. Anal.*, 2(5), 995-1011 1984.
- [26] Toro, F.E., "Shock capturing methods for free-surface shallow flows", John Wiley & Sons, Chichester, England, 2001
- [27] Valiani, A., Caleffi, V. and Zanni, A., "Case study: Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method", *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(5), 460-472, 2002
- [28] Van Leer, B., "Towards the ultimate conservative difference scheme. I. The quest of monotonicity", *Lecture Notes in Phys.*, 18 163-168, 1973.
- [29] Wang, J. W. and Liu, R. X., "A comparative study of finite volume methods on unstructured meshes for simulation of 2D shallow water wave problems", *Mathematics and Computers in Simulation*, 53 171-184, 2000
- [30] Zhao, D.H., Shen, H.W., Tabios III, G.Q., Lai, J.S. and Tan, W.Y., "Finite-volume two-dimensional unsteady flow model for river basins", *ASCE J. Hydraul. Eng.*, 120(7), 864-883, 1994
- [31] Zoppou, C., and Roberts, S., "Explicit schemes for dam-break simulations", *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(1), 11-34 2003

-
- ¹ Shock-tracking
² Shock-capturing
³ Finite Difference Method
⁴ Boundary fitted
⁵ High Resolution
⁶ Godunov
⁷ Harten
⁸ Van Leer
⁹ Roe
¹⁰ Total Variation Diminishing (TVD)
¹¹ Flux Limiter
¹² Slope Limiter
¹³ Upstream
¹⁴ Monotonic Upstream Scheme for Conservation
- Laws
- ¹⁵ Wang
¹⁶ Liu
¹⁷ Diffusion
¹⁸ Monotonicity
¹⁹ Dissipation
²⁰ Hybrid Method
²¹ Zwas
²² Flux Corrected Transport (FCT)
²³ Boris
²⁴ Brook
²⁵ Minmod
²⁶ Superbee
²⁷ Upwind
²⁸ Rankine-Hugoniot
²⁹ Pan and Cheng
³⁰ Barth
³¹ Jespersen
³² Explicit
³³ Oblique Hydraulic Jump
³⁴ Free-slip