ارتقای الگوریتم تصویر گرادیان کارمارکار برای حل مسائل برنامه ریزی خطی

دکتر علاء الدین ملک[i] ؛ رسول ناصری[ii]

چکیده

هدف اصلی از این کار ارائه نوع جدیدی از الگوریتم کارمارکار برای حل مسائل برنامه ریزی خطی است که همگرایی سریع - تری دارد. در این نوع از الگوریتم نقطه درونی، پارامتر α_n جدیدی ارائه می شود، که نقش مهمی را در همگرایی سریع تر این روش در مقایسه با روش های کارمارکار[۵] و شریگور[۹] را دارد. تعداد تکرارهای متناظر با روش های مذکور برای مسائل برنامه ریزی خطی باابعاد مختلف آورده شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که وقتی از α_n جدید در الگوریتم کارمارکار کلاسیک استفاده می‌شود، تعداد تکرار ها نسبت به تعداد تکرارهای روش های دیگر کمتر است. همچنین با افزایش دقت یا ب عبارتی با کاهش تولرانس، تفاوت تعداد تکرارها محسوس تر می‌شود.

کلمات کلیدی

برنامه ریزی خطی، الگوریتم کارمارکار، روش نقطه دونی

Enhancing Karmarkar's Gradient Projected Algorithm for Solving Linear Programming Problems

Alaeddin Malek; and Rasool Naseri

ABSTRACT:

The main aim of this work is to provide a new variant of Karmakr's algorithm to give a new high-performance algorithm for solving linear programming problems. Modification of the new interior point algorithm presents the new parameter which has a great role in faster convergence of the new method comparing other methods presented by Karmarkar [5] and Scherijver [9]. Number of iterations for the successful convergence for problems of different sizes is given. Numerical results show that when we use new parameter in the classical Karmarkar algorithm, the needed number of iterations is less than the iterations for the above two mentioned methods

KEYWORDS

Linear programming, Karmarkar's algorithm, Interior point method

i استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت مدرس تهران: mala@modares.ac.ir

ii کارشناس ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه تربیت مدرس تهران rasool_nasseri@yahoo.com

۱- مقدمه

تاسال ۱۹۸۴ زمانی که کارمارکار، الگوریتم چند جمله ای زمانی خود را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ارائه داد، روش سیمپلکس رقیب چندانی نداشت. بعد از ارائه الگوریتم کارمارکار تکنیک های مختلفی برای بهبود این روش ارائه شدند، و برخی ها در یکپارچه سازی دیدگاه های مختلف این تکنیک ها تلاش کردند. کارمارکار در روش خود، پارامتر α_kای را چنان ارائه کرد که میزان کاهش تابع پتانسیل در دو تکرار متوالی ۰/۲ باشد. بعد از کار مارکار، شریگور، پارامتر α_s دیگری ارائه کرد که مطابق آن میزان کاهش تابع پتانسیل در دو تکرار متوالی حداقل ۰/۳۰۶۸۵ است. در این مقاله با ارائه α_n جدید ثابت می‌کنیم که حداقل میزان کاهش تابع پتانسیل در دو تکرار متوالی از α_k و α_s بیشتر است.

۲- الگوریتم تصویری کارمارکار

الگوریتم کارمارکار مسائل برنامه ریزی به فرم زیر را در نظر می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & C^t X \\ st \quad & AX=0 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & X \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱)$$

که A ماتریس $m\times n$ از رتبه m است و $X=(x_1,\ldots,x_n)$ و $n\geq 2$ و C و A دارای مولفه های صحیح دارند. همچنین فرضیات زیر برقرار است:

(i) نقطه $(1/n,\ldots,1/n)$ یک نقطه موجه مساله است.

(ii) مقدار بهینه تابع هدف مساله صفر است .

۲-۱- خلاصه روش کارمارکار

شروع: قراردهید: $k=0$ و محاسبه کنید

$$\alpha = \frac{1}{1+r} \text{ یا } \alpha = \frac{n-1}{3n} \text{ و } r = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}$$

قرار دهید

$X_0 = (1/n,\ldots,1/n)$:

گام اصلی: اگر $C^t X < \varepsilon$ عملیات گردکردن بهینه را برای تعیین یک جواب بهینه به کار ببرید و توقف کنید. در غیر این صورت تعریف کنید:

$$D_k = diag\{x_{k1},\ldots,x_{kn}\}$$

$$P = \begin{bmatrix} AD_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = (1/n,\ldots,1/n)$$

$$\overline{C} = C^t D_k$$

سپس محاسبه کنید:

$$C_p = [I - P^t(PP^t)P]\overline{C}^t$$

به طوری که :

$$Y_{new} = Y_0 - \alpha r \frac{C_p}{\|C_p\|}$$

بنابراین $X_k = \dfrac{D_k Y_{new}}{1.D_k Y_{new}}$ حاصل می شود. k را یک واحد افزایش داده وگام اصلی را تکرار کنید.

۲-۲- عملیات گردکردن بهینه (روش تخلیص)

با شروع از تکرار پایانی به دست آمده از الگوریتم فوق، با مقدار هدف $C^t X < \varepsilon$، روند مورد بحث یک جواب نقطه رأسی را با استفاده از روش زیر، معروف به روش تخلیص پیدا می‌کند. اگر n تا از محدودیت های مستقل خطی در X_k مار باشند، با توجه به تعریف نقطه رأسی می‌دانیم که X_k یک جواب پایه‌ای بهینه است. در غیر این صورت جهتی چون

$d \neq 0$ در فضای متغیرهای غیر پایه وجود دارد که در دستگاه معادلات همگن متناظر با محدودیت های فعال صدق می‌کند. اینک روش تخلیص تکرار جاری را، چنانچه $C^t d < 0$ در راستای d ویا در غیر این صورت در راستای $-d$ ، ادامه می‌دهد، تا اینکه محدودیتی هر حرکت اضافی را با فرض شدنی بودن مسدود کند.[۲] و [۵].

۳-تابع پتانسیل کارمارکار

کارمارکار تابع پتانسیل زیر را در بررسی روش خود استفاده کرد:

$$f(X)=\Phi_r(X)=nLn(C^tX)-\sum_{i=1}^{n}Ln(x_i)$$

در ابتدا، کارمارکار با ارائه $\alpha = \frac{n-1}{3n}$، ثابت کرد مقدارکاهش تابع پتانسیل در دو تکرار متوالی در حدود ۰/۲ است.[۲] و [۵].

شریگور با قرار دادن $\alpha = \frac{1}{1+r}$، ثابت کرد میزان کاهش تابع پتانسیل در دو تکرار متوالی حداقل ۰/۳۰۶۸۵ است. وی برای اثبات ادعای خود لم ها وقضیه زیررا اثبات کرد. [۶] و [۸] :

لم (۱) :اگر $X \in \sum_n$ آنگاه :

$$C^t X \leq \exp(\frac{\Phi_k(X)}{n})$$

لم(۲) :اگر X و Z بردارهای مثبتی در $\sum_n$ باشد و $Y = T_x(Z)$ در این صورت:

$$\Phi_k(X)-\Phi_k(Y) = nLn\frac{(XC)^t e}{(XC)^t X}+\sum_{i=1}^{n}Ln(z_i)$$

لم(۳) :با قرار دادن $\alpha = \frac{1}{1+r}$ هر تکرار از الگوریتم تصویری مقدار تابع پتانسیل را حداقل به اندازه ۰/۳۰۶۸۵ کاهش می‌دهد.

قضیه۱: بعد از تعداد تکرار نابیشتر از $\frac{n}{\Psi(1)}Ln(\frac{C^t e}{\varepsilon})$ الگوریتم کارمارکار با $\alpha = \frac{1}{1+r}$ در یک نقطه شدنی X که $C^t X \leq 0$ متوقف می‌شود.

هر چند که به نظر می‌رسد $\alpha = \frac{1}{1+r}$ ماکسیمال کننده اختلاف پتانسیل در دو تکرار متوالی است، اما ما قادر خواهیم بود تا αی دیگری را که وابسته به n (تعداد متغیرهای مسأله)می‌باشد چنان ارائه کنیم تا واقعاً اختلاف پتانسیل بیشتری را در هر دو تکرار متوالی شاهد باشیم. این به دلیل آن است که Schrijver بعضی از جملات اختلاف پتانسیل در دو تکرار متوالی را با فرض نا منفی بودن در نظر نگرفته است.

۴-پیشنهاد یک αی جدید

دراین قسمت، αی جدیدی را ارائه می‌کنیم که همگرایی آن نسبت به دو αی ارائه شده قبلی سریع تروبهتراست. ما این α را با α_n نمایش می‌دهیم و αی قبلی را با α_S نمایش می‌دهیم که S اولین حرف از Schrijver ارائه کننده αی فوق است.

دراین باره قضایایی رابیان واثبات می‌کنیم:

لم۴:باقراردادن $\alpha = 1-\frac{1}{n^4(1+\sqrt{n(n-1)})}$ میزان کاهش تابع هدف بیشترازمیزان کاهش توسط αهای ارائه شده قبلی است. ونیزوقتی $n \to \infty$ در این صورت: $\alpha_S \cong \alpha_n$.

برهان:با توجه به اینکه میزان کاهش تابع هدف در هرتکرارازفرمول زیرمحاسبه میشود:

$$C^t x^1 = (1-\frac{\alpha}{n-1})C^t x_0$$

بنابراین بیشترین میزان کاهش را زمانی خواهیم داشت که $1-\frac{\alpha}{n-1}$ عددی کوچک باشد، یعنی باتوجه به اینکه $\alpha \in (0,1)$، α راطوری انتخاب می‌کنیم که به عدد یک خیلی نزدیک تر باشد. پس:

$$\alpha_n = 1-\varepsilon_n$$

اینک می‌خواهیم داشته باشیم :

$$\alpha_S = \frac{1}{1+r} < \alpha_n = 1-\varepsilon_n < 1$$

بنابراین داریم: $\varepsilon_n < \frac{1}{1+r}$،باجایگذاری r بر حسب n داریم:

$$\varepsilon_n < \frac{1}{1+\sqrt{n(n-1)}}$$

که برای $\varepsilon_n = \frac{1}{1+\sqrt{n(n-1)}}$ همان α_S به دست خواهد آمد.

حال اگر قراردهیم:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^4(1+\sqrt{n(n-1)})}$$

در این صورت $\alpha_S < \alpha_n$ وبنابراین میزان کاهش مقدار تابع هدف بیشتر خواهد بود. حال وقتی n خیلی بزرگ می‌شود $\alpha_S \to 1$ ونیز $\alpha_n \to 1$، باتوجه با اینکه همواره داریم: $\alpha_T < \alpha_n$ بنابراین برای n های بزرگ داریم : $\alpha_S \cong \alpha_n$. اینک قضیه ای بیان می شود که نشان دهنده میزان کاهش تابع پتانسیل در هرتکرارباتوجه به α_n است.

قضیهٔ۲: باانتخاب α_n به طریق فوق میزان کاهش تابع پتانسیل در هر تکرارحداقل برابرخواهد بود با:

$$0.30689+(\alpha_n-\alpha_S)r^2+\frac{r^2}{2}(\alpha_n^2-\alpha_S^2)(\frac{n}{R^k}-1)$$

برهان: اگر اختلاف تابع پتانسیل در دوتکرارمتوالی توسط α_t و α_n رابه ترتیب با Δ_n و Δ_s نمایش دهیم از لم(۳)خواهیم داشت:

$$\Delta_n \ge \alpha_n r^2 + n\Psi(-\alpha_n \frac{r}{R}) - \Psi(-\alpha_n r)$$

ونیز:

$$\Delta_S \ge \alpha_S r^2 + n\Psi(-\alpha_S \frac{r}{R}) - \Psi(-\alpha_S r)$$

باقراردادن $\Psi(t)=t-Ln(1+t)$ به دست می‌آید:

$$\Delta_n \ge \alpha_n r^2+\alpha_n r+Ln(1-\alpha_n r)-n\alpha_n\frac{r}{R}-nLn(1-\alpha_n\frac{r}{R})$$

بااستفاده ازبسط تابع Ln خواهیم داشت :

$$\Delta_n \ge \alpha_n r^2+\frac{r^2}{2}\alpha_n^2(\frac{n}{R^2}-1)+....+\frac{r^k}{k}\alpha_n^k(\frac{n}{R^k}-1)+...=\Delta_{n\infty} \qquad (۲)$$

ودرمورد α_S خواهیم داشت:

$$\Delta_S \ge \alpha_S r^2+\frac{r^2}{2}\alpha_S^2(\frac{n}{R^2}-1)+....+\frac{r^k}{k}\alpha_S^k(\frac{n}{R^k}-1)+...=\Delta_{S\infty}$$

می دانیم که $\Delta_{n\infty},\Delta_{S\infty} \ge 0$ (زیرا $r \ge 0$ و $\alpha_n,\alpha_S \ge 0$ و $(\frac{n}{R^2}-1) \ge 0$) و لذا $\Delta_n,\Delta_S \ge 0$. با کم کردن $\Delta_{S\infty}$ از طرفین رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\Delta_n - \Delta_{S\infty} \ge \Delta_{n\infty} - \Delta_{S\infty}$$

با توجه با اینکه از لم (۱)، $\Delta_{S\infty} \ge \Psi(1)$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta_n - \Psi(1) \ge \Delta_{n\infty} - \Delta_{S\infty}$$

با تفاضل دورابطه أخیرخواهیم داشت :

$$\Delta_n \ge \Psi(1)+(\alpha_n-\alpha_S)r^2+\frac{r^2}{2}(\alpha_n^2-\alpha_S^2)(\frac{n}{R^2}-1)+....$$

وبدین ترتیب قضیه اثبات می شود.

قضیه۳: بعد از تکرار نا بیشتر از:

$$\frac{n}{\Psi(1)+(\alpha_n-\alpha_S)r^2+\frac{r^2}{2}(\alpha_n^2-\alpha_S^2)(\frac{n}{R^2}-1)}Ln(\frac{C'e}{\varepsilon})$$

الگوریتم با یک نقطه شدنی x که $C'x \le 0$ متوقف می‌شود.

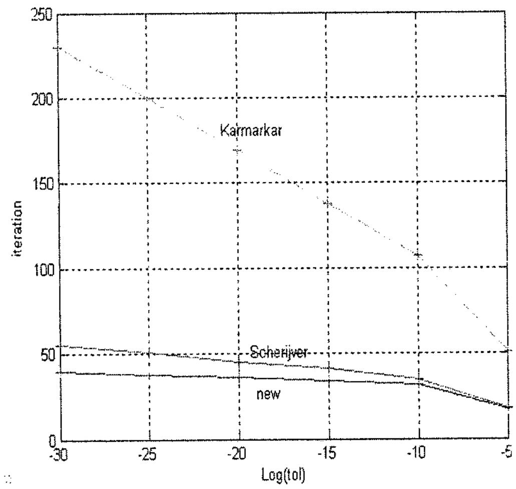
برهان: اثبات مشابه قضیه (۱) است، فقط به جای $\Psi(1)$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Psi(1)+(\alpha_n-\alpha_S)r^2+\frac{r^2}{2}(\alpha_n^2-\alpha_S^2)(\frac{n}{R^2}-1).$$

در زیر نمودارهای ارائه می‌کنیم که نشان دهنده میزان افزایش تعداد تکرار بر حسب میزان افزایش است.

مثال ۱- (Klee & Hinty) [۳]

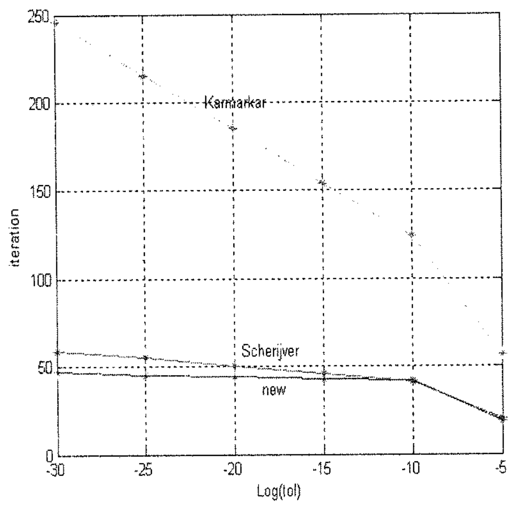
$$\begin{aligned} Max \quad & y_1+y_2+y_3 \\ S.t \quad & y_1 \le 1 \\ & 2y_1+y_2 \le 1/2 \\ & 2y_1+2y_2+y_3 \le 1/4 \\ & y_1,y_2,y_3 \ge 0 \end{aligned}$$



شکل (۱) : نمودار افزایش تعداد تکرار بر حسب افزایش دقت برای مثال ۱

مثال ۲- (Manfred Padberg)[۷]

$$\begin{array}{ll} Max & 16x_1 + 4x_2 + x_3 \\ S.t & x_1 \le 1 \\ & 12x_1 + x_2 \le 8 \\ & 48x_1 + 12x_2 + x_3 \le 64 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

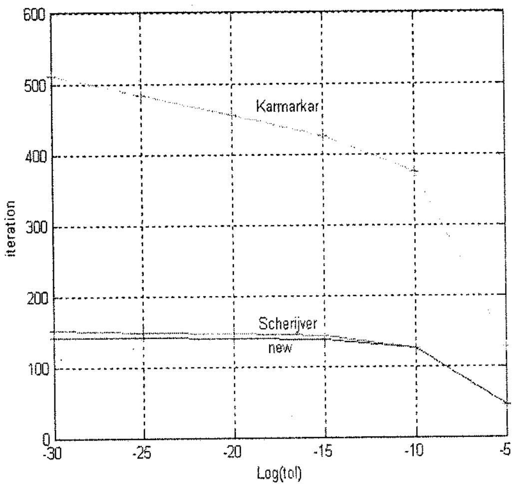


شکل (۲) : نمودار افزایش تعداد تکرار بر حسب افزایش دقت برای مثال ۲

مثال ۳- مثالی از یک مسأله ۵۰×۵۰ :

$$\begin{array}{ll} Max & \sum_{j=1}^{50} x_j \\ S.t & IX = 1 \\ & X \ge 0 \end{array}$$

که در آن I ماتریس ۵۰×۵۰ بوده و بردار های 1 , X بردارهای ۱×۵۰است.

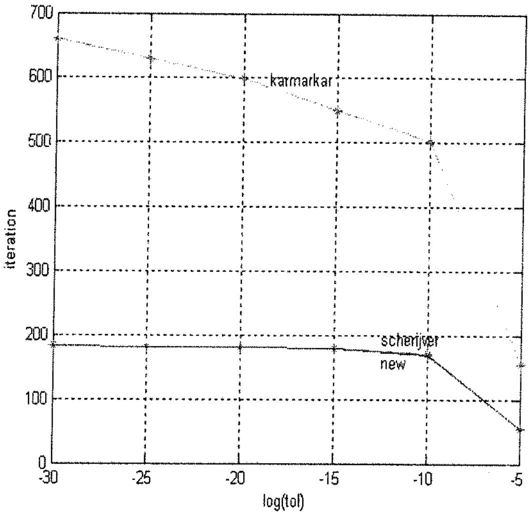


شکل (۳) : نمودار افزایش تعداد تکرار بر حسب افزایش دقت برای مثال ۳

مثال ۴- مثالی از یک مسأله ۱۰۰×۱۰۰ :

$$\begin{array}{ll} Max & \sum_{j=1}^{100} x_j \\ S.t & IX = 1 \\ & X \ge 0 \end{array}$$

که در آن I ماتریس ۱۰۰×۱۰۰ بوده و بردار های 1 , X بردارهای ۱×۱۰۰ است.



شکل (۴) : نمودار افزایش تعداد تکرار بر حسب افزایش دقت برای مثال ۴

نتیجه گیری

برای مسأله با ابعاد کوچک، دو مثال از مثال های الگوی، "مانفرد پادبرگ" و نیز "کلی و هینتی" مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. این مثال ها از مسائل مهمی هستند که روش سیمپلکس در حل آنها دچار مشکل شده و با بررسی کلیه نقاط رأسی (برای n نقطه $2^n - 1$ نقطه رأسی را می پیماید) به نقطه بهینه دست می یابد، اما همان طور که از شکل‌های (۱) و (۲) مشخص است روش ارتقا یافته جدید با تعداد گام های کمتری نسبت به روش کلاسیک کارمارکار و شریگور به جواب بهینه دست می یابد.

برای مسأله با ابعاد بزرگ، همان طور که در مثال های (۳) و (۴) مشخص است با توجه به خصوصیات الگوریتم کارمارکار، الگوریتم جدید شبیه به الگوریتم شریگور و بهترر از کارمارکار کلاسیک عمل می کند. بنابراین، هم از نظر تئوری و هم از نظر عددی برتری روش ارتقاء یافته جدید، نسبت به روش های دیگر مبتنی بر الگوریتم نقطه درونی کارمارکار، تأیید می شود.

منابع و مراجع

[۱] آریانژاد ، میر بهادر قلی ؛ **برنامه ریزی خطی والگوریتم کارمارکار**، دانشگاه علم و صنعت ایران؛ ۱۳۷۰

[۲] Adler, I.,M.G.C.Resende, and G. Veiga;"*An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming*" , Operations Research Center, Report 86-8, University of California at Berkeley.

[۳] Bazzara M.S;Jarvis J;Sherali H; "*Linear programming and network flows*",*John Wiley & Sons Canada,* 1984

[۴] Gonzaga, C. "*An algorithm for Solving linear programming problems in* $O(n^3L)$ *operations*", Memo no. UCB/ERL M87/10, Electronic Research Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley, CA 94720, 1987.

[۵] Hertog D.den, Roos C. "*A survey of search directions nin interior point methods for linear programming*", Mathematical Programming, 52:481-509,1991.

[۶] Karmarkar N; "*A new polynmial time algorithm for linear programming*", combinatorica, 4,pp,373-395;1984

[۷] Pedberg M. W. "Linear Optimization and extension: problems and solution", Springer, 1992.

[۸] Roos C; Terlaki T;Vial J; "*Optimization theory and algorithm for linear programming optimization*", princton university 2001.

[۹] Rao SS; "*Optimization theory and application*", kanpor ; 1991

[۱۰] Scherijver A. "*Theory of linear and integer Programming*", John Wiely & Sons, New York, 1986

[۱۱] Shanno D.F. "Computig Karmarkar projective quicly", Matheatical Programming 41:61-71,1988.

[۱۲] Taha H., "Linear programming and its application", Mcmilan, 2000