

گسسته سازی شرط مرزی غیر موضعی برای تقریبات سهموی در آکوستیک زیر آب

سید محمد حسینیⁱ؛ عیسی فیروزⁱⁱ

چکیده

وقتی که روش های عددی برای حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در دامنه بی کران اعمال می شود، برای محدود کردن دامنه محاسباتی معمولاً از مرزهای مصنوعی استفاده می شود. در این مرزهای مصنوعی، شرایط مرزی خاصی برای تقریب جواب در کل فضا اعمال می شود. حال اگر جواب مسأله در ناحیه کراندار معادل با جواب کل فضا (در ناحیه محاسباتی محدود شده) باشد، آنگاه این شرایط مرزی، شرایط مرزی شفاف نامیده می شوند. بحث این مقاله به شرایط مرزی شفاف برای معادلات شبه دیفرانسیلی شرودینگر مربوط است که از مدل های معادله سهموی (که کاربرد گسترده ای در مسائل انتشار موج یک طرفه نظیر لرزه نگاری، فیزیک اپتیک، آکوستیک زیر آب و ... دارند) به وجود می آیند. همچنین گسسته سازی جدیدی در این مقاله برای این شرایط مرزی ارائه خواهیم کرد. نتایج عددی کارائی روش جدید را از نظر دقت و زمان محاسبه نشان می دهد.

کلمات کلیدی

آکوستیک زیر آب، تقریب سهموی، شرط مرزی شفاف.

Discrete Non-local Boundary Condition for Parabolic Approximations in Underwater Acoustics

S. M. Hosseini ; E. Firouz

ABSTRACT

When computing numerically the solution of a partial differential equation in an unbounded domain usually artificial boundaries are introduced to limit the computational domain. Special boundary conditions are derived at this artificial boundaries to approximate the exact whole-space solution. If the solution of the problem on the bounded domain is equal to the whole-space solution (restricted to the computational domain) these boundary conditions are called transparent boundary conditions (TBCs). This paper discusses the TBCs for general Schrödinger-type pseudo-differential arising from parabolic equation models which have been widely used for one-way wave propagation problems in various application areas, e.g. seismology, optics and plasma physics. Moreover in this paper we will propose a new discrete TBC. The accuracy and relatively lower cpu-time of the new approach is confirmed by the numerical comparisons.

KEYWORDS

Underwater Acoustics, Parabolic Approximation, Transparent Boundary

ⁱ استاد بخش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، کد پستی ۱۷۵-۱۴۱۱۵: hossei_sm@yahoo.co.uk

ⁱⁱ کارشناسی ارشد، بخش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial p}{\partial r}) + \rho \frac{\partial}{\partial z} (\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial z}) + k_0^2 N^2 p = 0 \quad (1)$$

این مدل در مختصات استوانه ای با تقارن جهت دار است که در آن $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ عدد موج منبع، $\rho(z)$ چگالی محیط، $N(z) = n(z)(1 + i\alpha(z))$ شاخص شکست مختلط برای محیط لایه ای، c_0 سرعت صوت منبع و $\omega = 2\pi f$ سرعت زاویه ای است که در آن f فرکانس منبع است. $n(z)$ از سرعت به شکل $n(z) = \frac{c_0}{c(z)}$ تعریف می شود. با انتخاب $\psi(r, z) = p(r, z) \sqrt{r} \exp(-ik_0 r)$ و جایگذاری آن در (۱) و فرض های وسعت میدان ($k_0 r \gg 1$) و صرفنظر کردن از پدیده پس انتشار، معادله سهموی یک طرفه زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0 (-1 + \sqrt{1-X}) \psi \quad (2)$$

در این معادله، X ، عملگر شرودینگر به شکل زیر:

$$X = -k_0^{-2} \rho \frac{\partial}{\partial z} (\rho^{-1} \frac{\partial}{\partial z}) + V(z) \quad (3)$$

و همچنین $V(z)$ پتانسیل به صورت:

$$V(z) = 1 - N^2(z)$$

است.

روش های عددی مختلفی برای حل (۲) وجود دارد که فرق آنها در تقریب عملگر شبه دیفرانسیلی $\sqrt{1-X}$ است. به هر حال، این تقریبات باید به گونه ای باشند که در معادله جدید بتوان روش تفاضل متناهی را اعمال کرد (مثلاً از تقریبات گویای عملگر ریشه دوم استفاده شود). تقریب این

عملگر به شکل $\sqrt{1-X} = 1 - \frac{X}{2}$ فرم استاندارد (زاویه

باریک) معادله سهموی را به شکل زیر نشان می دهد:

$$\psi_r = \frac{-ik_0}{2} X \psi \quad r > 0 \quad (4)$$

این معادله شرودینگر برای امواج با زاویه انتشار حداکثر ۱۵ درجه نسبت به افق مناسب است. تقریبات گویای به شکل زیر:

$$(1-X)^{1/2} \approx \frac{p_0 - p_1 X}{1 - q_1 X} \quad (5)$$

با مقادیر حقیقی p_0, p_1, q_1 معادلات سهموی زاویه پهن زیر را برقرار می کنند:

محاسبات آکوستیک اقیانوس (معمولاً) به معادله هلمولتز (یا موج تقلیل یافته) منجر می شود که حل تحلیلی آن جز در شرایط خاص امکان پذیر نیست و بایستی از روش های عددی یا تلفیقی از روش های تحلیلی و عددی بهره گرفت. در این خانواده، روش های معادله سهموی؛ که روندی تحلیلی-عددی است، از اهمیت ویژه ای در آکوستیک زیر آب (خصوصاً برای محیط های وابسته به برد) برخوردار است. این روش را در سال ۱۹۷۳ تپرت (Tappert) توسعه داد و از آن زمان به بعد به عنوان یک مدل خیلی مؤثر برای اجزای کامپیوتری محسوب می شود. روند تحلیلی این روش، تقریب معادله هلمولتز بیضوی با معادله سهموی بر اساس دو فرض زیر است: ۱- وسعت میدان ۲- صرفنظر کردن از پدیده پس انتشار. ادامه روند فوق، مبتنی بر استفاده از تقریبات گویای ریشه دوم یا تقریبات پد (Pade) مختلف روی این مدل تقریبی است که معادلات شبه دیفرانسیل شرودینگر را تولید خواهد کرد. با اعمال روش های تفاضل متناهی روی این معادلات الگوریتم های پیمایش در برد حاصل می شوند؛ بدین معنی که با داشتن مقادیر اولیه میدان، گام به گام مسأله حل می شود. بخش دوم به معرفی این الگوریتم ها اختصاص دارد. برای تکمیل مسأله، به شرایط اولیه و مرزی نیاز است که در بخش سه ذکر شده است. بخش چهارم به گسسته سازی شرایط مرزی و اعمال آنها در مسأله مربوط است که طرح های جدیدی از این شرایط را ارائه خواهیم کرد. مقایسه نتایج حاصل از این طرح های جدید در بخش پنجم آمده است.

۲- مدل ریاضی فشار آکوستیک و الگوریتم های

معادله سهموی

یک محیط آکوستیکی مستقل از برد را در نظر بگیرید که از بالا با سطح آزاد در $z = 0$ محدود شده و منحنی سرعت صوت، انتشار برد طولانی $\infty \rightarrow r$ را برای قسمت های بالایی موجبر (waveguide) پشتیبانی می کند. برای $r > 0$ فشار آکوستیکی $p(r, z)$ برای یک منبع صوتی نقطه ای هارمونیک واقع در $(0, z_s) = (r, z)$ با وابستگی زمانی $\exp(-i\omega t)$ می تواند با حل معادله هلمولتز آکوستیک زیر به دست آید:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0(-1 + \frac{p_0 - p_1 X}{1 - q_1 X})\psi \quad \text{و} \quad r > 0 \quad (6)$$

با انتخاب $p_0 = 1, p_1 = \frac{3}{4}, q_1 = \frac{1}{4}$ تقریب زاویه پهن کلیربوت (Clearbout) به وجود می آید که برای امواج با زاویه انتشار حداکثر ۴۰ درجه نسبت به افق مناسب است. همچنین از تقریبات مراتب بالاتری نظیر پد گام-شکاف می توان استفاده کرد. از آنجا که هدف اصلی این مقاله، شرایط مرزی است و این شرایط مرزی با هر کدام از تقریبات فوق می توانند ترکیب شوند، بنابراین به تقریب (۶) بسنده خواهیم کرد.

۳- شرایط اولیه و مرزی

۳-۱- آغازگرها

فرض کنیم که یک منبع صوتی در زیر آب با فرکانس f و سرعت c_0 در مختصات $(0, z_s) = (r, z)$ واقع شده است. تابعی که با این فرضیات فشار آکوستیکی را در ستون منبع توصیف کند، به آغازگر معروف است. معمولاً آغازگرها از فرم نا همگن معادله هلمولتز استخراج می شوند:

$$[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c(z)}]p(r, z) = -\frac{\delta(z - z_s)\delta(r)}{2\pi r} \quad (7)$$

در این معادله δ دلتای دیراک، $\omega = 2\pi f$ و $c(z)$ تابع صوت است.

بدون پرداختن به نحوه استخراج، آغازگر گاوسی را معرفی می کنیم. این آغازگر به شکل زیر است [۱]:

$$\psi(0, z_s) = \sqrt{k_0} e^{-\frac{k_0^2}{2}(z-z_s)^2} \quad (8)$$

در این معادله $k_0 = \frac{2\pi f}{c_0}$. این آغازگر برای محیط های با چگالی ثابت به کار می رود. می توان گفت که سهمی از پیشرفت ها در روش های معادله سهموی به توسعه آغازگرها مربوط است. به هر حال، آغازگرها به عنوان مقادیر اولیه برای الگوریتم های پیمایش در برد محسوب می شوند.

۳-۲- سطوح مشترک داخلی

در آکوستیک زیر آب، سطوحی که باعث ناپیوستگی در پارامترهای محیطی (نظیر سرعت یا چگالی) شوند، سطوح مشترک داخلی نامیده می شوند. به عنوان مثال کف دریا ($z = z_b$).

در سطوح مشترک، به پیوستگی فشار ($p \propto \psi$) و سرعت

ذره ای عمودی ($v \propto \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}$) نیاز داریم. برای کف دریا

می توان این شرایط را به شکل زیر نوشت:

$$\psi(z_{b-}, r) = \psi(z_{b+}, r) \quad (9)$$

$$\frac{\psi_z(z_{b-}, r)}{\rho_w} = \frac{\psi_z(z_{b+}, r)}{\rho_b} \quad (10)$$

در معادله بالا، ρ_w چگالی آب و ρ_b چگالی ته دریا ست.

۳-۳- شرایط مرزی شفاف

برای پیاده سازی روش های عددی در الگوریتم های معادله سهموی، علاوه بر مقادیر اولیه معرفی شده در قسمت ۳-۱ به شرایط مرزی نیاز است. برای دقیق شدن بحث، یک محیط n لایه ای در نظر بگیرید طوری که لایه n ام یک نیم فضای همگن (uniform half space)؛ (سرعت صوت و چگالی هردو ثابت) باشد. متداول است که سطح آزاد دریا را به عنوان مرز بالایی با فشار آزاد ($\psi = 0$) در نظر می گیرند. وضعیت سطوح مشترک داخلی نیز از قسمت قبلی معلوم است. انتخاب مرز پایین ($z = z_{max}$) و شرایط آن به دو روش شکل می گیرد. در روش های سنتی، به طور متداول این مرز را سطحی از لایه n ام در نظر می گرفتند که انرژی قابل توجهی از آن منعکس نشود و سپس میدان را در آن سطح صفر قرار می دادند ($\psi = 0$). (از آغاز لایه n ام تا این مرز را لایه جذبی مصنوعی می نامند) انتخاب z_{max} و $\alpha(z)$ در این لایه جذبی هردو به مقدار انرژی بستگی دارد که به وسیله منبع صوتی به زیر لایه ها نفوذ می کند.

در روش های جدید، مرز را پایین ترین سطح مشترک داخلی در نظر می گیرند و روی این سطح، شرطی قرار می دهند که خواص نیم فضای همگن را دارا باشد (شرط مرزی شفاف). اصول کلی برای یافتن این شرط مرزی آن است که جواب صریح معادله سهموی را در نیم فضای همگن به دست آوریم و سپس شرایط پیوستگی فشار و سرعت ذره ای عمودی را در آن در نظر بگیریم. تمام شکل های مختلف از شرایط مرزی شفاف؛ که در سالیان اخیر ارائه شده اند، از قاعده فوق تبعیت کرده اند [۲-۵]. پاپاداکیز (Papadakis) اولین کسی بود که این شرط مرزی را در سال ۱۹۹۲ مطرح کرد.

اکنون بدون این که مسأله، کلیت خود را از دست بدهد،

فرض کنیم که محیط آکوستیکی از دو لایه آب و ته تشکیل شده است و عمق آب $Z = Z_b$ است. پاپاداکیز، شرط مرزی شفاف را در $Z = Z_b$ به شکل زیر به دست آورد:

$$\psi(r, z_b) = B \int_0^r \psi_z(r-t, z_b) \frac{e^{ibt}}{\sqrt{t}} dt \quad (11)$$

که در آن:

$$b = \frac{k_0}{2}(n_b^2 - 1), \quad B = -\sqrt{\frac{i}{2\pi k_0}} \frac{\rho_b}{\rho_w} \quad (12)$$

همان طور که قبلاً نیز ذکر شد، ویژگی مهم این شرایط مرزی آن است که مسأله را از یک حالت نیمه متناهی به یک مسأله معادل در ناحیه کراندار تبدیل می کنند.

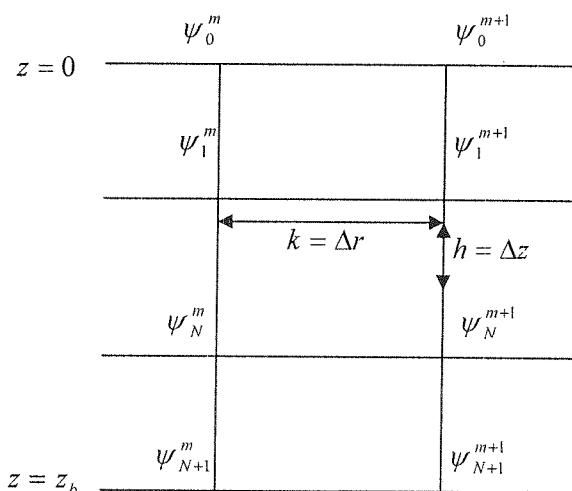
ع- پیاده سازی شرایط مرزی شفاف

برای گسسته سازی و اعمال شرط مرزی (۱۱) ابتدا به طرح عددی برای معادله (۶) نیاز داریم. طرح عددی کرانک نیکلسون برای این معادله به شکل زیر در می آید:

$$[1 \quad u_l \quad 1] \begin{bmatrix} \psi_{l-1}^{m+1} \\ \psi_l^{m+1} \\ \psi_{l+1}^{m+1} \end{bmatrix} = \left(\frac{w_2}{w_1}\right) [1 \quad \hat{u}_l \quad 1] \begin{bmatrix} \psi_{l-1}^m \\ \psi_l^m \\ \psi_{l+1}^m \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$l = 1, \dots, N$$

نماد $\psi_l^m = \psi(m\Delta r, l\Delta z)$ برای اختصار به کار رفته و اندیس l در ψ_l^m برای $l = 0$ نقطه سطح و برای $l = N+1$ نقطه کف را نمایش می دهد. به شکل (۱) مراجعه شود.



شکل (۱): شبکه برای طرح عددی

در رابطه (۱۲) داریم:

$$u_l = k_0^2 h^2 \left(\frac{w_1^*}{w_2^*}\right) - 2 + k_0^2 h^2 (n_l^2 - 1)$$

$$\hat{u}_l = k_0^2 h^2 \left(\frac{w_1}{w_2}\right) - 2 + k_0^2 h^2 (n_l^2 - 1)$$

$$w_1 = 1 + \frac{ik_0 \Delta r}{2} (p_0 - 1)$$

$$w_2 = -q_1 - \frac{ik_0 \Delta r}{2} (p_1 + 1)$$

در این معادله، w_2^* , w_1^* مزدوج مختلط w_2 , w_1 هستند.

پاپاداکیز، یک گسسته سازی از (۱۱) به شکل زیر ارائه داد [۲]:

$$\psi_{N+1}^{m+1} = E \psi_N^{m+1} - \sqrt{E} \text{SUM}(m) \quad (14)$$

در رابطه فوق:

$$E = \exp(-\Delta z / 2B\sqrt{\Delta r}) \quad (15)$$

$$\text{SUM}(m) =$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} e^{ibj\Delta r} (\sqrt{j+1} - \sqrt{j}) (\psi_{N+1}^{m-j+1} - \psi_N^{m-j+1}) \quad (16)$$

همچنین میفیلد (Mayfield) و تامسون (Thomson) طرح عددی دیگری برای شرط مرزی (۱۱) به شکل زیر ارائه کردند [۵]:

$$\left(1 - \frac{\Delta z}{2B\sqrt{\Delta r}}\right) \psi_{N+1}^{m+1} = \psi_N^{m+1} - B' \sum_{j=1}^m (\psi_{N+1}^{m+1-j} - \psi_N^{m+1-j}) \hat{l}_j \quad (17)$$

در معادله بالا:

$$B' = e^{\frac{i}{2} b \Delta r} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} b \Delta r\right)}{\frac{1}{2} b \Delta r}, \quad \hat{l}_j = \frac{e^{ibj\Delta r}}{2\sqrt{j+\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

روابط (۱۴) و (۱۷) نشان می دهند که وضعیت یک نقطه در مرز $Z = Z_b$ به تمام نقاط قبلی بستگی دارد؛ بنابراین شرط مرزی شفاف (۱۱) را شرط مرزی غیر موضعی می نامند. ما دو گسسته سازی جدید از این شرط مرزی غیر موضعی را ارائه خواهیم کرد.

الف- برای گسسته سازی شرط مرزی (۱۱)، نقاط شبکه

را به صورت $z_l = jh$ و $t_l = lk$ در نظر بگیرد $h = \Delta z$ و $k = \Delta r$. با این شبکه، رابطه (۱۱) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\psi(r, z_b) = B \sum_{l=0}^{m-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \psi_z(mk - t, z_b) \frac{e^{ibt}}{\sqrt{t}} dt \quad (19)$$

از قضیه مقدار میانی در انتگرال ها، رابطه به شکل زیر در می آید:

$$\psi(mk, z_b) = B \sum_{l=0}^{m-1} e^{ib\xi_l} \psi_z(mk - \xi_l, z_b) \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \quad (20)$$

$$\xi_l \in [t_l, t_{l+1}],$$

با انتخاب $\xi_l = lk$ رابطه (۲۱) به دست می آید. توضیح این نکته لازم است که انتخاب های دیگر برای ξ_l

نظیر $\xi_l = (l+1)k$ یا $\xi_l = \frac{(l+1)k}{2}$ ارتباط ψ_{N+1}^m را با

ψ_N^m مشخص نخواهد کرد و به همین دلیل در معادله (۱۲) برای $l = N$ نمی توان ψ_{N+1}^m را حذف کرد.

$$\psi(mk, z_b) =$$

$$2B\sqrt{k} \sum_{l=0}^{m-1} e^{iblk} \psi_z((m-l)k, z_b) (\sqrt{l+1} - \sqrt{l}) \quad (21)$$

با تقریب ψ_z با تفاضل متناهی پسر، از شکل (۱) رابطه زیر به دست می آید:

$$\psi_{N+1}^m = 2B\sqrt{k} \sum_{l=0}^{m-1} e^{iblk} \left(\frac{\psi_{N+1}^{m-l} - \psi_N^{m-l}}{h} \right) (\sqrt{l+1} - \sqrt{l}) \quad (22)$$

با جدا کردن جمله اول مجموع، رابطه زیر به دست می آید:

$$\left(1 - \frac{h}{2B\sqrt{k}}\right) \psi_{N+1}^m = \psi_N^m - \sum_{l=1}^{m-1} e^{iblk} (\psi_{N+1}^{m-l} - \psi_N^{m-l}) (\sqrt{l+1} - \sqrt{l}) \quad (23)$$

در محاسبه روابط (۲۱) تا (۲۳) بدیهی است که برای مقادیر

متعارف l جمله $\sqrt{l+1} - \sqrt{l}$ مستقیماً محاسبه و برای مقادیر

بزرگ l از $\frac{1}{\sqrt{l+1} + \sqrt{l}}$ برای محاسبه آن جمله استفاده می شود.

ب- شکل دوم گسسته سازی، از اعمال قضیه مقدار میانی

در انتگرال ها روی رابطه (۱۹) به شکل زیر است:

$$\psi(mk, z_b) = B \sum_{l=0}^{m-1} \psi_z(mk - \xi_l, z_b) \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{e^{ibt}}{\sqrt{t}} dt \quad (24)$$

از تقریب نقطه میانی برای انتگرال گیری و تقریب تفاضل

متناهی پسر برای ψ_z رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \psi(mk, z_b) &= Bk \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\psi_{N+1}^{m-l} - \psi_N^{m-l}}{h} \frac{e^{ib(l+\frac{1}{2})k}}{\sqrt{(l+\frac{1}{2})k}} \\ &= \frac{B\sqrt{k}e^{ibk/2}}{h} \sum_{l=0}^{m-1} (\psi_{N+1}^{m-l} - \psi_N^{m-l}) \frac{e^{iblk}}{\sqrt{l+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (25)$$

با ادامه روندی مشابه با حالت (الف) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{B\sqrt{k}e^{ibk/2}} - \sqrt{2} \right) \psi_{N+1}^m &= \\ -\sqrt{2} \psi_N^m + \sum_{l=1}^{m-1} e^{iblk} (\psi_{N+1}^{m-l} - \psi_N^{m-l}) \frac{e^{iblk}}{\sqrt{l+1/2}} \end{aligned} \quad (26)$$

روابط (۲۲) و (۲۶) را به فرم فشرده زیر می توان نوشت:

$$\psi_{N+1}^{m+1} = E\psi_N^{m+1} + SUM(m) \quad (27)$$

در رابطه بالا E یک ثابت عددی و $SUM(m)$ تابع

مقادیر اول تا m ام است.

برای اعمال این شرط در دستگاه (۱۲)، ابتدا سطر آخر

این دستگاه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\psi_{N-1}^{m+1} + u_N \psi_N^{m+1} + \psi_{N+1}^{m+1} = \left(\frac{w_2}{w_2^*} \right) (\psi_{N-1}^m + \hat{u}_N \psi_N^m + \psi_{N+1}^m) \quad (28)$$

اکنون (۲۷) را در (۲۸) جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \psi_{N-1}^{m+1} + (u_N + E)\psi_N^{m+1} &= \\ \left(\frac{w_2}{w_2^*} \right) (\psi_{N-1}^m + \hat{u}_N \psi_N^m) &+ \\ \left(\frac{w_2}{w_2^*} \right) \psi_{N+1}^m - SUM(m) \end{aligned} \quad (29)$$

بنابراین، دستگاه (۱۲) همراه با شرایط مرزی (۲۹) و پس

از اعمال شرط مرزی $\psi = 0$ مربوط به سطح آزاد دریا

به معادله ماتریسی زیر منجر می شود.

شده است و منظور از طرح Mayfield پیاده سازی رابطه (۱۷) است. برای مقایسه عددی سه مثال از منابع [۱-۳] استفاده شده است.

۵-۱- مثال ۱ (موجبر بوکر [۱۲])

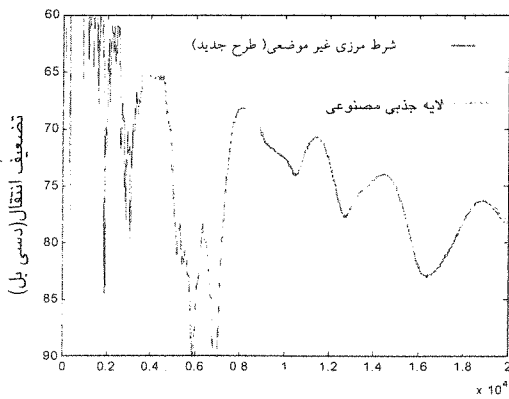
موجبر بوکر از یک اقیانوس کم عمق تشکیل می شود که پارامترهای محیطی در جدول (۱) آمده اند. منبع صوتی با فرکانس ۱۰۰ هرتز در عمق ۳۰ متر و گیرنده در عمق ۹۰ متر واقع است. این مساله آزمایشی برای رفتار پرش چگالی در سطح مشترک $z_h = 240m$ است. در شکل (۲) تضعیف انتقال برای مساله ذکر شده از دو روش (لایه جذبی مصنوعی و شرط مرزی غیر موضعی) محاسبه شده است که در آن شرط مرزی غیر موضعی (طرح جدید) در عمق ۲۴۰ متر به کاررفته و موقعیت لایه جذبی در عمق ۲۸۰-۲۴۰ است. (استفاده از شرط مرزی به جای لایه جذبی حجم محاسبات را تقریباً نصف می کند).

به طور تجربی جوابی که در نیم فضای پایین (سیال زیر آب) از دقت خوبی برخوردار باشد، با انتخاب میرایی در ته به شکل نمایی زیر:

$$\alpha_b(z) = 10 \left[\exp \left\{ 4 \frac{z - z_b}{z_{\max} - z_b} \right\} - 1 \right] \text{ dB}/\lambda_b$$

$$z_b < z < z_{\max}$$

میسر می شود. شکل (۳) مقایسه ای از طرح عددی جدید با روش (۱۷) است. هر دو نتیجه برای طول گام های ۰.۵ متر در عمق و ۲.۵ متر در برد می باشد.



شکل (۲) مقایسه نمودارهای تضعیف انتقال برای یک منبع صوتی با فرکانس ۱۰۰ هرتز در عمق ۳۰ متر و گیرنده ای در عمق ۹۰ متر

شکل (۲): مقایسه نمودارهای تضعیف انتقال برای یک منبع صوتی با فرکانس ۱۰۰ هرتز در عمق ۳۰ متر و گیرنده ای در عمق ۹۰ متر

$$\begin{bmatrix} u_1 & 1 & & & & \\ & 1 & u_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & E + u_N \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^{m+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_N^{m+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 & 1 & & & & \\ & 1 & \hat{u}_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & \hat{u}_N \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^m \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_N^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\gamma_1 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_2^*} \right) \psi_0^m - \psi_0^{m+1}$$

و

$$\gamma_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_2^*} \right) \psi_{N+1}^m - SUM(m)$$

به استناد نتایج تحلیلی ارائه شده در [۶] به سادگی دیده می شود که روش عددی به کار گرفته شده در این مساله همگراست.

۵- مثال ها و نتایج عددی

یکی از اهداف مهم در آکوستیک زیر آب، محاسبه تضعیف انتقال (Transmission Loss) با واحد دسی بل، از روی فشار آکوستیکی است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$TL(r, z) = -10 \log_{10} |p(r, z)|^2$$

$$= -20 \log_{10} \frac{|\psi(r, z)|}{\sqrt{r}}$$

در این بخش، تضعیف انتقال برای سه مثال از موجبرهای معروف؛ که در آزمایش های آکوستیک زیر آب کاربرد زیادی دارند، محاسبه شده است. نتایج موجود با نرم افزار MATLAB به دست آمده اند. همچنین برای تعیین مقادیر اولیه آغازگر گاوسی به کار رفته است. در نتایج زیر، منظور از طرح جدید پیاده سازی روابط (۲۳) و (۲۹) است که در این مقاله پیشنهاد

یک گیرنده در عمق ۵۰ متر نمایش می دهد. با پارامترهای داده شده چگالی نیم فضا از $\rho_b = 2gcm^{-3}$ به $\rho'_b = 0.965 + .277igcm^{-3}$ تبدیل می شود و منحنی نقطه چین از شکل (۴) نتیجه می گردد. منحنی توپر، همین مساله را برای حالتی که ته، سیال است ($c_s = 0$) نمایش می دهد. نتایج به دست آمده نشان می دهد که امواج برشی در ته یک مکانیزم مهم تضعیف برای این محیط خاص است.

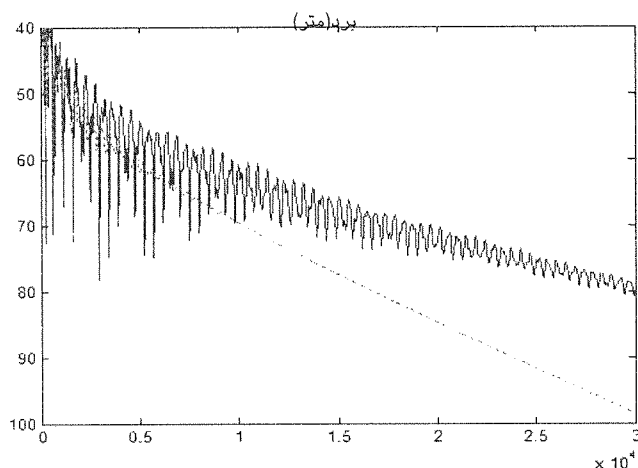
شرط مرزی در هر دو منحنی شکل (۴) شرط مرزی غیر موضعی است که در عمق ۸۰ متری به کار رفته و طول گام های استفاده شده $\Delta r = 5m$ و $\Delta z = 0.5m$ است.

جدول (۲): پارامترهای محیطی دریای مدیترانه جنوبی

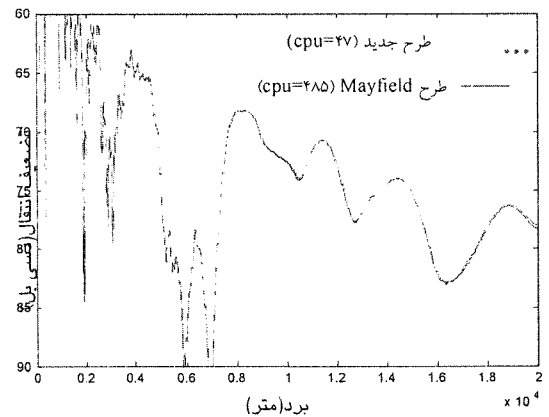
محیط	سرعت صوت	چگالی	میرایی	عمق
آب	$\alpha(z) = 1498 + 120 - z / 60$	۱	۰	۲۴۰
ته	۱۵۰۵	۲٫۱	۰	-

عمق m	سرعت صوت ms^{-1}	چگالی جدید (بدون gcm^{-3}) طرح جدید (+ برشی)	میرایی $db\lambda^{-1}$
0	1532.8	1	0
21.1	1531.3	1	0
22.8	1530.1	1	0
27.1	1520.1	1	0
30.1	1518.8	1	0
46.2	1512.9	1	0
80	1509	1	0
>80	1750	2	0.6

تضعیف انتقال (دسی بل)



شکل (۴): مقایسه نمودارهای تضعیف انتقال برای یک منبع صوتی با فرکانس ۱۰۰ هرتز در عمق ۳۰ متر و گیرنده ای در عمق ۹۰ متر



شکل (۳): مقایسه نمودارهای تضعیف انتقال برای یک منبع صوتی با فرکانس ۱۰۰ هرتز در عمق ۳۰ متر و گیرنده ای در عمق ۹۰ متر

توجه به این نکته لازم است که این مقایسه برای حالات گوناگون (اعم از طول گام و پارامتر) صورت گرفته و در تمامی موارد، همراه با حفظ دقت، زمان محاسبه طرح جدید کمتر بوده است.

جدول (۱): پارامترهای محیطی برای موجبر بوکر

۲-۵ مثال ۲ (نیم فضای کشسان [۳])

جدول (۲) پارامترهای محیطی را برای دریای مدیترانه جنوبی نشان می دهد. ته این دریا به عنوان یک جامد کشسان با سرعت برشی، shear، و $c_s = 600 ms^{-1}$ میرایی برشی $\alpha_s = 1.5db\lambda^{-1}$ است.

ته کشسان این دریا با یک ته سیالی مدل سازی می شود که سرعت صوت و میرایی تراکمی (Compressional) آن همان هایی است که در جدول (۲) آمده؛ ولی چگالی آن به صورت مختلط زیر است:

$$\rho'_b = \rho_b [(1 - 2/N_s^2)^2 + 4i\gamma_s\gamma_b / (k_0^2 N_s^2)]$$

که در آن:

$$N_s = (c_0/c_s)(1 + i\alpha_s)$$

و کمیت های:

$$\gamma_b = ik_0 \sqrt{1 - N_b^2} \quad \text{و} \quad \gamma_s = k_0 \sqrt{N_s^2 - 1}$$

اعداد موج عمودی امواج برشی و تراکمی در ناحیه پایین کف دریا هستند.

شکل (۴) تضعیف انتقال را برای یک منبع صوتی با فرکانس ۱۰۰ هرتز و سرعت صوت $1512 ms^{-1}$ در عمق ۵۰ متر برای

۵-۳ مثال ۳ (منحنی مانک [۱])

منحنی مانک (Munk) یک منحنی سرعت صوت ایده آل در محیط اقیانوس است که امکان بررسی ویژگی های انتشار صوت را در آب های عمیق فراهم می کند. معادله این منحنی به شکل زیر است:

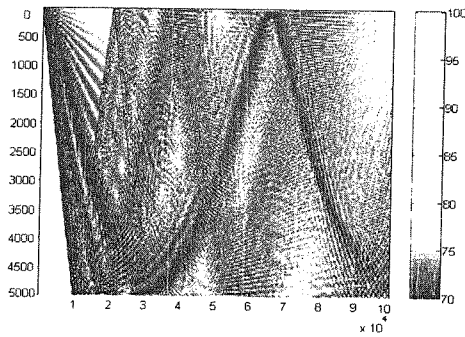
$$c(z) = 1500 \left[1 + \varepsilon (\bar{z} - 1 + e^{-\bar{z}}) \right]$$

که در آن:

$$\bar{z} = \frac{2(z-1300)}{1300} \quad \varepsilon = 0.00737$$

این منحنی در شکل (5) آورده شده است. فرض کنیم عمق اقیانوس ۵۰۰۰ متر است و منبع صوتی با فرکانس ۵۰ هرتز در عمق ۱۰۰ متر واقع شده و نیم فضای زیر آب، محیط همگن با چگالی 1000 kgm^{-3} و سرعت صوت 1600 ms^{-1} است.

شکل (6) تضعیف انتقال را برای این موجبر با اعمال شرط مرزی غیر موضعی (طرح جدید) در عمق ۵۰۰۰ متر نمایش می دهد. در شکل (7) همین مساله با اعمال لایه جذبی مصنوعی از تقریب Brook نتیجه شده است [۱].



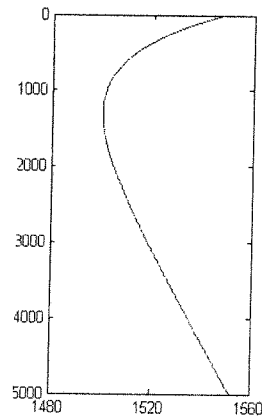
شکل (۷): تضعیف انتقال با لایه جذبی مصنوعی در عمق ۵۰۰۰ متر

۶- نتیجه

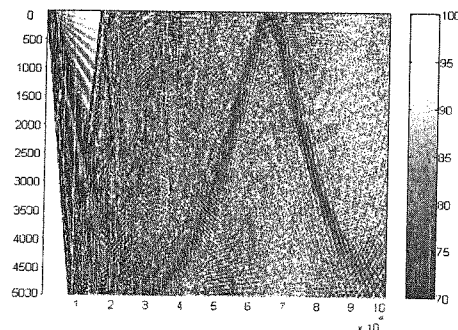
در این مقاله، یک تقریب جدید برای گسسته سازی شرط مرزی غیر موضعی ارائه شده است که از دقت مطلوب روش های قبلی برخوردار است. اضافه بر آن، زمان اجرا در روش جدید تا حد قابل قبول بهبود یافته است. همچنین با طول گام های یکسان، نتایج حاصل از روش جدید دقیق تر می باشد.

۷- مراجع

- [1] F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter and H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics*. AIP Press, New York, 1994.
- [2] J. S. Papadakis, M. I. Taroudakis, P. J. Papadakis and B. Mayfield, *A new method for a realistic treatment of the sea bottom in the parabolic approximation*, J. Acoust. Soc. Amer. 92 (1992) 2030-2038.
- [3] D. Yevick and D. J. Thomson, *Nonlocal boundary condition for finite difference parabolic equation solvers*, J. Acoust. Soc. Amer. 92 (1999) 2030-2038.
- [4] A. Arnold, M. Ehrhart, *Discrete Transparent Boundary Conditions for the Schrödinger equation*, Riv. Mat. Univ. Parma, 6 (2001) 57-108.
- [5] D. J. Thomson and M. E. Mayfield, *An exact Radiation Condition for Use with the A Posteriori PE Method*, J. Comp. Acoust. 2 (1994), 113-132.
- [6] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations (Finite Difference Methods)*, OXFORD UNIV. PRESS (1987).



شکل (۵): منحنی سرعت مانک



شکل (۶): تضعیف انتقال با طرح جدید در عمق ۵۰۰۰ متر