

تحلیل تنش در مواد ویسکوالاستیک و کاربرد آن در سوخت جامد

دکتر محمود موسوی مشهدی^۱؛ محمد رضا صنعتگر^۲

چکیده

در این مقاله تحلیل تنش در موتور یک موشک بررسی می شود. موتور این موشک دارای یک پوسته ی فولادی است که در داخل آن سوخت جامدی با سطح مقطع ستاره هشت پر قرار گرفته است. پوسته ی فولادی رفتار الاستیک دارد اما سوخت جامد داخل آن با رفتار ماده ی ویسکوالاستیک خطی تقریب زده می شود که بسیار نزدیک به واقعیت است. حل این مساله تحلیلی به کمک روش المان محدود انجام گرفته است. از آنجا که با گذشت زمان، سوخت می سوزد صورت مساله تابع زمان است، از طرف دیگر رفتار مواد ویسکوالاستیک نیز تابع زمان است، بهمین دلیل در تحلیل این مساله، زمان نقش اساسی دارد. در اینجا، این مساله که مرز متحرک هم دارد از طریق روش گام به گام زمانی حل شده است. در هر گام زمانی با اصلاح ماتریس سفتی جسم و بردار بار، تغییرات لازم به مساله داده شده و دوباره مساله حل می شود. این روش تا گام آخر پیش می رود تا مقدار و نحوه توزیع تنش در هر نقطه از پوسته و گرین سوخت جامد بدست آید. این تحلیل یک گام مهم در طراحی پوسته و گرین (Grain) سوخت جامد است و می توان با توجه به آن از کنترل ترک ها در سوخت و عملکرد صحیح موتور موشک اطمینان حاصل کرد.

کلمات کلیدی

سوخت جامد، مواد ویسکوالاستیک، تحلیل تنش، روش المان محدود.

Stress analysis of viscoelastic materials and it's application in solid propellant

Dr.Mahmood Moosavi Mashhadi ; Mohamad Reza Sanatgar
Dept. of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran

ABSTRACT

In the present article, the stress analysis in a special missile motor is studied. This missile motor consists of a steel cylinder which concludes the star grain of solid propellant. The steel cylinder behavior is elastic, but the inner solid propellant exhibits the viscoelastic behavior. The fact confirms this assumption.

The problem's solution is performed by finite element method. Since solid propellant burns, the problem shape is dependent on time. On the other hand the behavior of viscoelastic materials is varied by time. Thus, in the analysis of this problem, time has a principle role. This problem which has the moving band, is solved by a 'step by step' time method. In each time step, the necessary variations are given to the problem by modifying of the stiffness matrix and the load vector and the problem is solved again. The routine is done until last step. Therefore stress value and distribution are obtained in every location of solid propellant grain and cylinder. This analysis has an important role in solid propellant grain and cylinder design. In this way, cracks of propellant are controlled and insuring of correct function of missile motor can be obtained.

Keywords

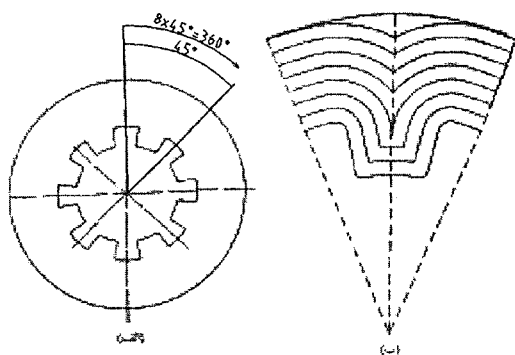
Solid Propellant, viscoelastic Materials, Stress Analysis, Finite Element Method

^۱ - دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

^۲ - فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

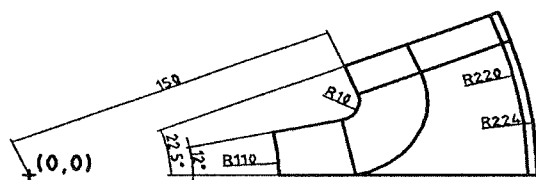
متغیرهایی که تابع زمان هستند، مساله به یک مساله ی الاستیک در فضای انتقال یافته تبدیل می شود. با حل این مساله و برگرداندن به فضای اولیه زمانی حل مطلوب مساله اصلی دست می آید. بنابراین یکی از مشکلاتی که در ارتباط با این تکنیک وجود دارد، حل مساله مقدار مرزی الاستیک است. حل مساله الاستیک به خصوص در بعضی از مسائل سه بعدی به آسانی در دسترس نیست. مشکل دیگر مربوط به مساله ریاضی معکوس‌گیری از مساله الاستیک وابسته و پیدا کردن حل فیزیکی در فضای زمانی اصلی است: ضمن اینکه این مساله بدلیل داشتن مرز و بار متحرک و تغییرات زمانی شکل هندسی آن از پیچیدگی خاصی برخوردار است. دلایل بالا کافی است تا قانع شویم که حل این مساله به صورت تحلیلی تقریباً غیرممکن است. از این روی با استفاده از روش اجزاء محدود که یک حل تقریبی عددی است مساله را حل می‌کنیم.

برای تحلیل گرین سوخت جامد و پوسته که نمای برش خورده آن در شکل (۱) ملاحظه می‌شود فقط لازم خواهد بود که $\frac{1}{16}$ کل مساله یعنی یک قطاع $22/5$ درجه را مورد بررسی قرار دهیم.



شکل (۱): نمای برش خورده سوخت موشک

اطلاعات ابعادی این قطاع در شکل (۲) ارائه شده است. بدیهی است که نتایج بدست آمده از تحلیل اجزای محدود این قطاع قابل تسری به تمام گرین است.



شکل (۲): اطلاعات ابعادی قطاع موتور

از آنجا که مواد بسیاری مانند پلاستیکها، چوب، فیبرهای طبیعی و مصنوعی، بتون و فلزات در درجه حرارت‌های بالا و مانند آن در طبیعت و صنعت وجود دارد که رفتارشان را می توان با الگوی رفتاری مواد ویسکوالاستیک تطبیق داد، محققان به تحقیق در این مواد و مدل سازی رفتار آنها علاقه مند بوده اند. از آن جمله می توان به کوشش های آقای لی (LEE) [۳] در حل مسایل تحلیل تنش در مواد ویسکوالاستیک خطی اشاره کرد. او در مقاله خود سعی در اندازه گیری و برآورد خواص ماده از طریق آزمایش های مختلف کرده است تا بتواند از این مقادیر در تحلیل نظری توزیع تنش استفاده نماید. او از نیروهای اینرسی صرفنظر و مسایل را به صورت شبه استاتیکی بررسی کرده است. در کار دیگری لی و راجرز (Rogers) [۴] با استفاده از روابط تنش - کرنش به صورت اپراتور انتگرالی به تحلیل تنش در مواد ویسکوالاستیک خطی پرداخته اند. آنها یک تکنیک اصلاح شده براساس روش عددی حل معادلات انتگرالی به منظور اندازه گیری مدول کاهش استاتیکی (Relaxation Modulus) و نرمی خزش (Creep Compliance) پیشنهاد کرده اند و وودوارد (Woodward) و رادوک (Radok) [۵] توزیع تنش را در یک سیلندر ویسکوالاستیک با یک پوسته خارجی جدار نازک الاستیک تحت اثر فشار داخلی مورد بررسی قرار داده اند. جونز (Jones) [۶] همین حل را برای گرین موشک سوخت جامد انجام داده است. او برای بدست آوردن تنش و کرنش نهایتاً از دو معادله انتگرالی از نوع ولترا استفاده نموده است.

در کلیه مقالات ذکر شده حل تحلیلی برای مسایل ویسکوالاستیک با شکل هندسی ساده (سیلندری) ارائه شده است. اما این روش ها برای اشکال پیچیده هندسی کاربردی ندارد. برای حل این نوع مسایل از روش اجزاء محدود استفاده می شود. کاربرد روش اجزای محدود در مسایل ویسکوالاستیک در مرجع [۲] مورد بحث قرار گرفته است.

به طور کلی برای حل مسائل ویسکوالاستیک در ابتدا لازم است که با انتخاب یک مدل مناسب معادله مشخصه ماده بدست آید. این معادله اساسی به دو صورت اپراتور دیفرانسیلی و یا انتگرالی نمایش داده می شود. در قدم بعدی می توان به دوروش تحلیلی و عددی می توان با مساله برخورد کرد. روشهای تحلیلی مستلزم حل مستقیم معادله اساسی و یا استفاده از قاعده تشابه مواد ویسکوالاستیک با الاستیک است. قاعده ی تشابه یک قاعده اساسی برای حل بسیاری از مسائل ویسکوالاستیک خطی است. با لاپلاس گرفتن از

سوخت را دوباره شبکه‌بندی کنیم. بلکه در واقع باقیمانده سوخت توسط باقیمانده المانها شبکه‌بندی شده باشد.

شبکه‌بندی مجدد ضمن اتلاف وقت بیهوده، مستلزم این است که گره های شبکه جدید متفاوت از شبکه قدیمی باشند؛ از این رو، امکان تجمع کرنش های خزشی در هر گره، همچنین امکان پی‌گیری روند تغییرات تنش در یک گره مشخص طی گام های زمانی مختلف از بین خواهد رفت. برای رعایت این مطلب و با توجه به مقدار و جهت پیشروی سطح سوزان سوخت، هر گام زمانی را حدود ۰/۶s در نظر گرفته‌ایم که معادل با ۶mm پیشروی سطح سوزان است. مرز المان ها نیز طوری فرض شده‌اند که در ابتدا و انتهای هر گام زمانی سطح سوزان سوخت روی مرز المان های باقیمانده قرار بگیرد. پس هر لایه شبکه بندی گرین که در شکل (۳) دیده می شود نسبت به لایه قبلی و بعدی خود به اندازه ۶ mm فاصله داده شده است.

۲-۳- شماره گذاری گره ها

با توجه به تعداد ۱۷۹ المان که در شبکه‌بندی سوخت مطابق شکل (۳) کار گرفته شده است، در مجموع ۵۹۸ گره تولید می‌شود. در ترتیب شماره‌گذاری گره ها نیز توجه به نحوه عقب‌نشینی سوخت هنگام احتراق الزامی است. شماره‌گذاری باید به صورتی باشد که گره هایی که بر اثر سوختن سوخت طی هر گام زمانی نابود می‌شوند شماره منسوب به گره های باقیمانده در سوخت را تغییر ندهند. این امر مستلزم این است که شماره گره های از بین رفته طی هر گام زمانی از شماره همه گره های باقیمانده بزرگتر باشد یعنی در هر گام زمانی از فهرست شماره گره ها، چند تای آخری حذف شوند تا ترتیب شماره‌گذاری گره های باقیمانده تغییر نکند. مثلاً طی گام زمانی اول تعداد المانها از ۱۷۹ به ۱۵۹ تقلیل می‌یابد و تنها شماره گره های ۵۳۵ تا ۵۹۸ حذف می‌شوند و باقیمانده گره ها همچنان از یک تا ۵۳۴ شماره‌گذاری خود را حفظ می‌کنند. همانطور که گفته شد رعایت این موضوع سبب می‌شود که امکان پیگیری روند تغییرات تنش و تجمع کرنشهای خزشی در یک گره مشخص و در گامهای زمانی مختلف بوجود آید. شماره‌گذاری گره ها در شکل (۴) آورده شده است.

پس از انتخاب یک قطاع ۲۲/۵ درجه از مساله، باید قطاع مزبور بطور مناسبی شبکه بندی (مش بندی) شود. به طوری که این شبکه جویگوی الزامات مساله از قبیل تفاوت جنس پوسته و سوخت جامد، سازگاری شبکه با نحوه عقب نشینی سوخت، سازگاری شبکه با سرعت سوزش سوخت جامد و ... باشد. مرحله بعدی کار تهیه یک برنامه رایانه ای است که بتواند با روشی مناسب و کارآمد سوخت و پوسته را تحلیل کند و به نحو مناسبی پاسخ تحلیل را ارائه نماید. این برنامه به زبان FORTRAN تهیه شده است.

۲- مدل سازی مساله

۲-۱- شبکه بندی

گرین سوخت و پوسته موتور موشک مطابق شکل (۳) در مجموع به ۱۷۹ المان تقسیم شده است پوسته شامل ۲۲ المان در دو ردیف است و گرین سوخت نیز ۱۵۷ المان را در بر می‌گیرد تمام المانها از نوع المان چهار ضلعی هشت گره ای است. شیوه شبکه بندی این مساله با توجه به توضیحاتی که در ذیل می آید از ابتکارات این مقاله است. نحوه شبکه بندی گرین سوخت به صورتی است که در برگیرنده تمام الزامات حل مساله ویسکوالاستیک سوزش سوخت جامد با مرز متحرک است. ملاحظات در نظر گرفته شده در شبکه بندی گرین سوخت جامد ما را از انجام چند باره المان بندی گرین سوخت و شماره گذاری مکرر المانها، گره ها، درجات آزادی و انجام محاسبات فراوانی بی نیاز می کند. این مطلب در ادامه مفصلاً شرح داده می شود. بدیهی است که این شیوه شبکه بندی می تواند در مسایل مشابه، خصوصاً در مسایل با مرز متحرک مورد استفاده قرار گیرد و از دشواری حل مساله تا اندازه زیادی بکاهد.

۲-۲- شیوه ی شبکه بندی مساله

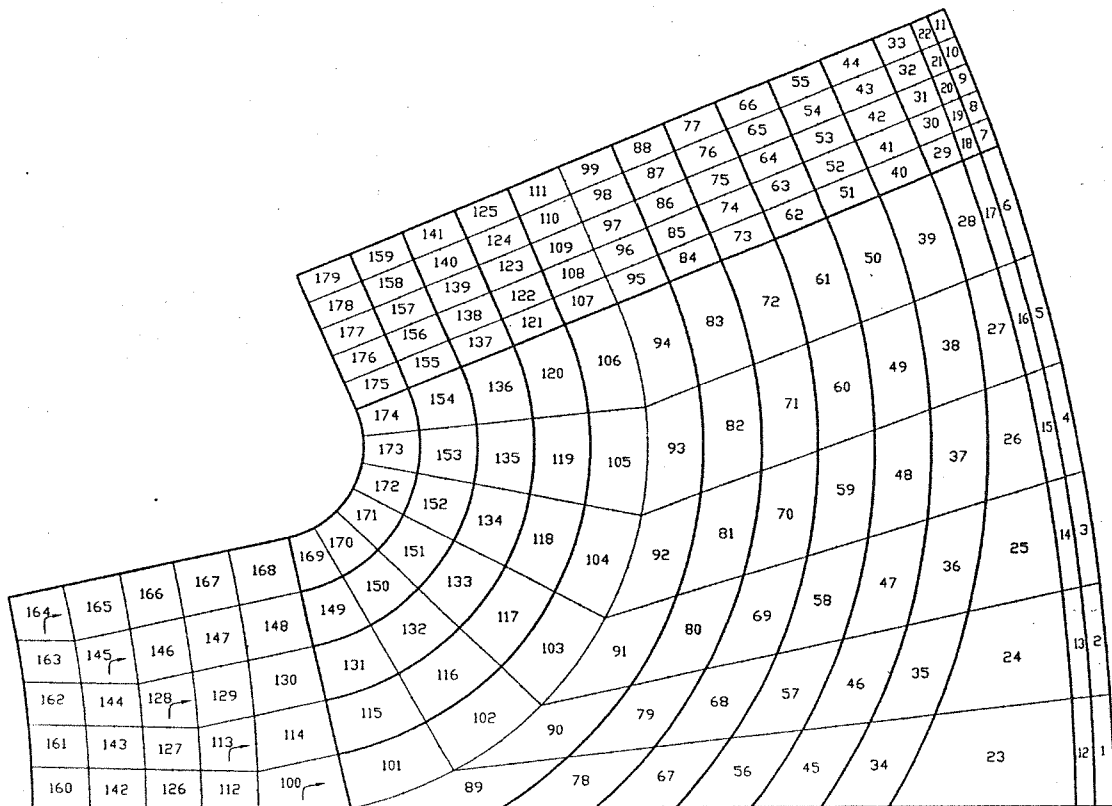
سرعت پیشروی سطح سوزان سوخت به عمق گرین، 10 mm/sec است که این پیشروی همیشه در جهت عمود بر سطح گرین سوخت اجرا می شود. بر این اساس می باید شبکه بندی گرین و انتخاب گامهای زمانی به صورتی باشد که در ابتدا و انتهای هر گام زمانی، تمام نقاط سطح سوزش روی مرزهای المانهای باقیمانده قرار گیرند این مطلب از آن جهت اهمیت دارد که مجبور نباشیم پس از هر گام زمانی باقیمانده

۲-۴- شماره گذاری درجات آزادی گره ها و شرایط

مرزی مساله

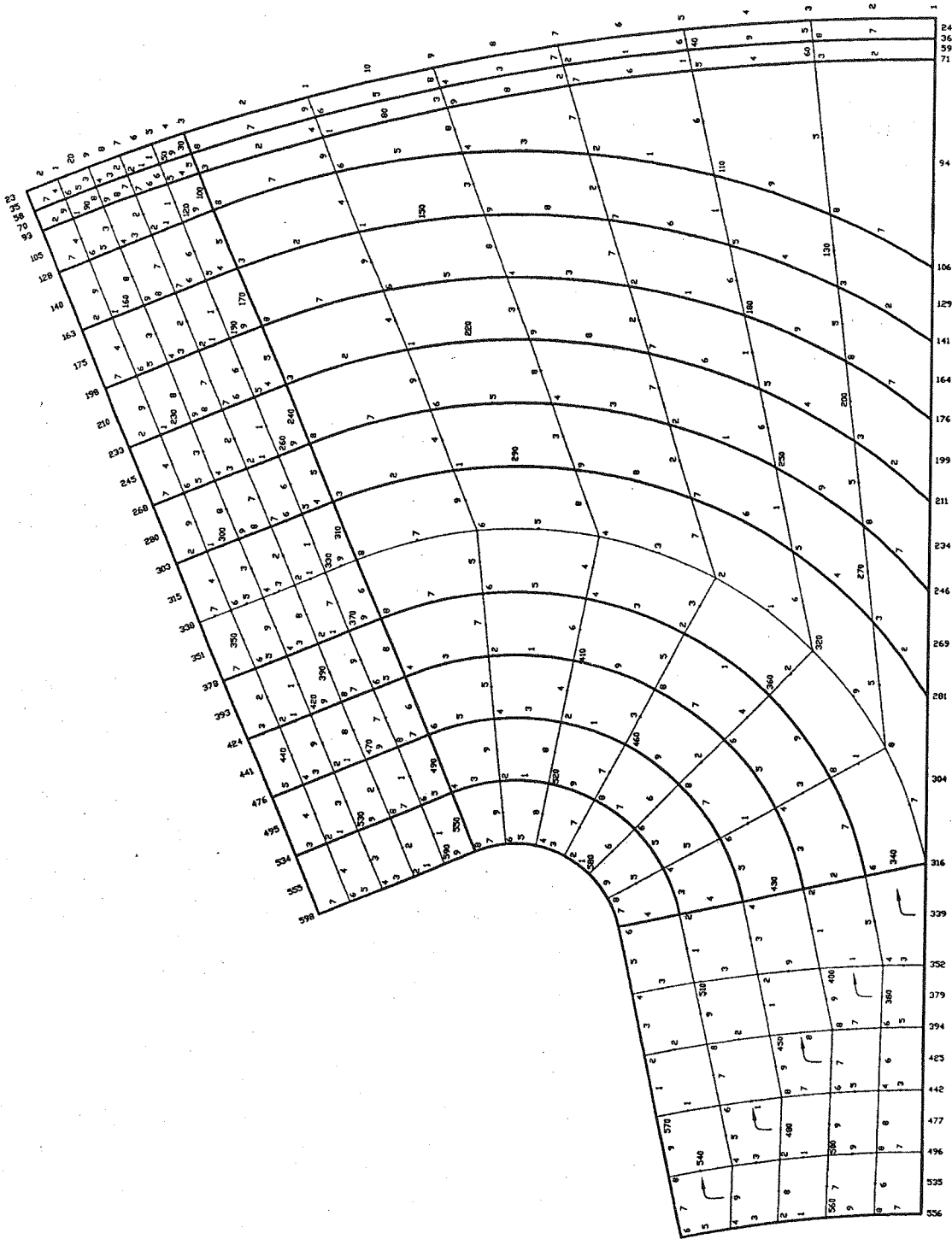
مسیر شماره گذاری درجات آزادی گره ها، منطبق بر مسیر شماره گذاری گره ها است. بدین ترتیب شماره درجات آزادی هر گره از ابتدا تا زمان سوختن ثابت خواهد ماند. هر گره بطور کلی دارای دو درجه آزادی U_x و U_y است. گره هایی که روی خطوط صفر و $22/5^\circ$ قرار می گیرند باید در جهت عمود بر این خطوط فاقد جابجایی باشند که این امر بخاطر وجود شرایط متقارن در مساله پیش می آید.

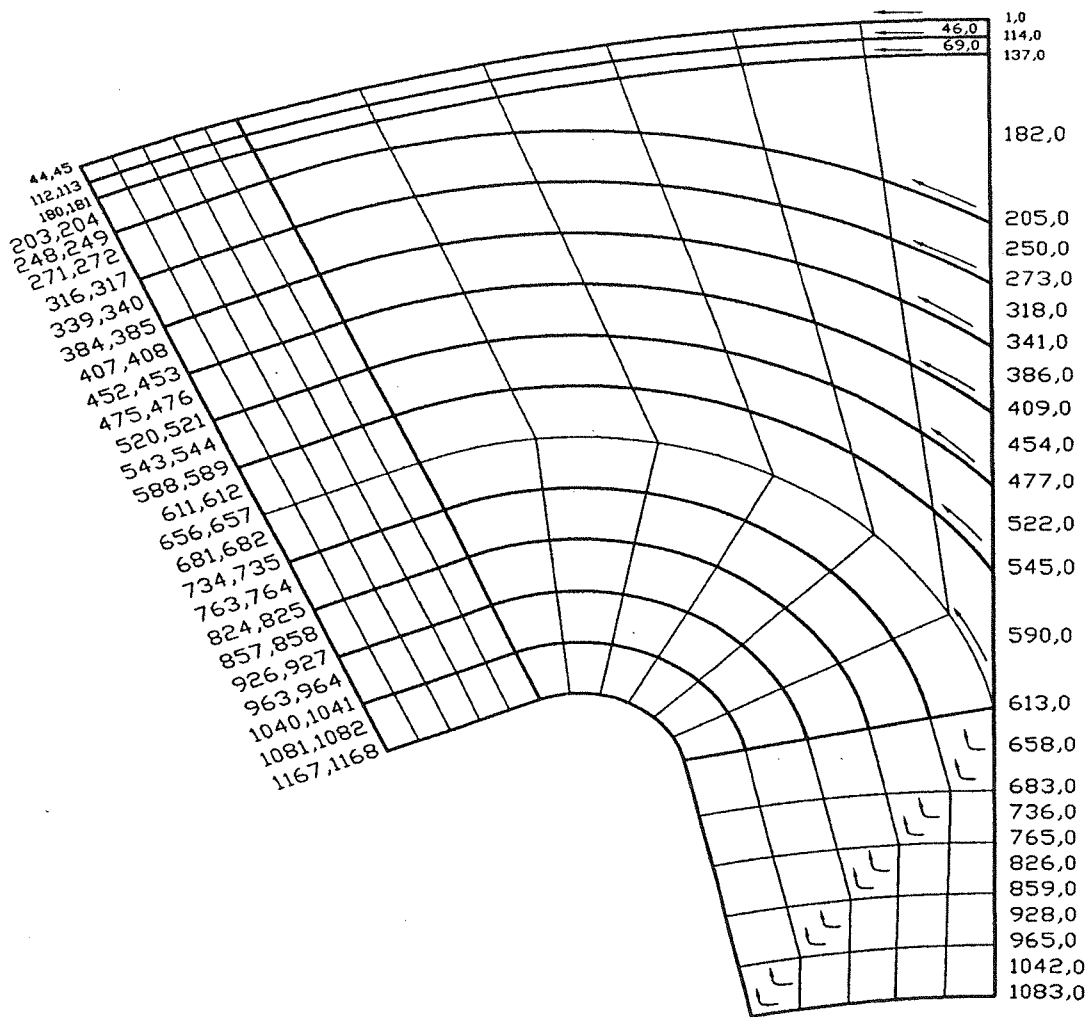
اطلاعات مربوط به گره هایی که روی خطوط صفر و $22/5^\circ$ واقع می شوند بصورت ورودی توسط فایل DATA.TXT به برنامه داده می شود.
شماره گذاری درجات آزادی گره ها و جهت افزایش آنها در شکل (۵) آورده شده است.



شکل (۳): المان بندی قطاع موتور و سوخت

شکل (۳): شماره گذاری گره ها





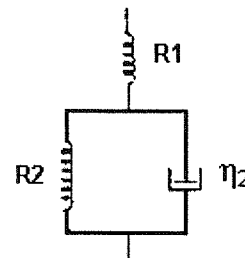
شکل (۵): شماره گذاری درجات آزادی گره ها و جهت افزایش آنها

۳- ملاحظات درباره خواص مکانیکی

پوسته موتور و گرین سوخت

۳-۱- مدل جامد استاندارد

معمولا ماده ویسکوالاستیک را با المان هایی از فنر و دشپات تقریب می زنند: آنگاه با استفاده از معادله مشخصه مدل مزبور، اقدام به تحلیل ماده ویسکوالاستیک می کنند. در این مقاله رفتار ویسکوالاستیک سوخت جامد با استفاده از مدل جامد استاندارد که شامل سه المان مطابق شکل (۶) است، مدل شده است.



شکل (۶): مدل جامد استاندارد

معادله مشخصه مدل استاندارد خطی بصورت زیر

است:

$$\sigma + \frac{\eta_2}{R_1 + R_2} \dot{\sigma} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon + \frac{R_1 \eta_2}{R_1 R_2} \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

کلیه ضرایب و متغیرها در فهرست علائم تعریف شده اند. معادلات کلی زیر مربوط به مواد ویسکوالاستیک را در نظر می گیریم:

$$P_1 s_{ij}(t) = Q_1 d_{ij}(t) \quad (2)$$

$$\left[p'_0 + p'_1 \frac{\partial}{\partial t} + p'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p'_a \frac{\partial^a}{\partial t^a} \right] s_{ij}(t) = \left[q'_0 + q'_1 \frac{\partial}{\partial t} + q'_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + q'_b \frac{\partial^b}{\partial t^b} \right] d_{ij}(t) \quad (3)$$

با مقایسه سه رابطه بالا اپراتورهای P_1 و Q_1 برای کرنش های برشی مهندسی بدست می آیند. بایستی توجه داشت که کرنش های برشی مهندسی دو برابر کرنش های

۴- از نیروهای حجمی در مقایسه با فشار داخلی اعمال شده صرفنظر می شود.

۵- خصوصیات ماده در هر گام زمانی ثابت فرض می شود. با توجه به فرضیات فوق و روابط بدست آمده برای مدول برشی، خصوصیات ماده عبارتند از:

برای رفتار الاستیک

مدول برشی: (از رابطه (۹))

$$G_e = R_1 \quad (12)$$

مدول حجمی:

$$K_e = K \quad (13)$$

ضریب پواسون:

برای رفتار خزشی

$$\nu_e = \frac{3K - 2R_1}{6K + 2R_1} \quad (14)$$

مدول برشی:

$$G_c(D) = R_2 + \eta_2 D \quad (15)$$

مدول حجمی:

$$K_c = \infty \quad (16)$$

ضریب پواسون:

$$\nu_c = \frac{1}{2} \quad (17)$$

بطور خلاصه با در نظر گرفتن مدل جامد استاندارد برای ماده ویسکوالاستیک سوخت و نیز باتوجه به فرضیات در نظر گرفته شده مشخصات لازم برای مدل به صورت زیر هستند

$$R_1 = 10^5 \text{ psi} = 689.4 \text{ [Mpa]}$$

$$R_2 = 0.5 \times 10^5 \text{ [Psi]} = 344.7 \text{ [Mpa]}$$

$$\eta_2 = 6.895 \times 10^6 \left[\frac{N \text{ Sec}}{m^2} \right]$$

$$\nu_e = 0.45$$

$$E_e = 2(1 + \nu_e)G_e = 2(1 + 0.45) \times 689.4 \\ = 1.99926 \text{ [Gpa]} \approx 2 \text{ [Gpa]}$$

$$\nu_c = 0.5$$

مقادیر مربوط به پوسته الاستیک که از جنس فولاد است، عبارتند از:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ [Psi]} = 2.068 \times 10^5 \text{ [Mpa]}$$

$$\nu = 0.3$$

۴- محاسبه کرنش های خزشی [۱۴]

برای بدست آوردن کرنش های خزشی به جای ثابت های الاستیک معادل اپراتوری آنها را در رابطه

برشی معمولی هستند. بدین ترتیب با فرض $D = \frac{\partial}{\partial t}$ خواهیم داشت:

$$P_1 = \frac{R_1 + R_2 + \eta_2 D}{R_1} D \quad (4)$$

$$Q_1 = 2[R_2 + \eta_2 D] \quad (5)$$

از طرفی در مواد ویسکوالاستیک داریم:

$$\frac{1}{G} = \frac{2P_1}{Q_1} \quad (6)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{2 \left[\frac{R_1 + R_2 + \eta_2 D}{R_1} D \right]}{2[R_2 + \eta_2 D]} \quad (7)$$

با ساده کردن رابطه (۷) به معادله زیر می رسیم:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{D + \left(\frac{R_2}{\eta_2} \right)} \quad (8)$$

با توجه به معادله (۸) رفتار خزشی و الاستیک ماده به

صورت زیر از هم تفکیک می شوند:

قسمت مربوط به رفتار الاستیک:

$$\frac{1}{G_e} = \frac{1}{R_1} \quad (9)$$

و قسمت مربوط به رفتار خزشی

$$\frac{1}{G_c(D)} = \frac{1}{D + \left(\frac{R_2}{\eta_2} \right)} \quad (10)$$

معمولا فرض می شود که مواد ویسکوالاستیک تحت اثر تنش های هیدرواستاتیکی غیر قابل تراکم هستند و به عبارت دیگر مدول حجمی را بی نهایت در نظر می گیرند. با چنین فرضی ضریب پواسون برابر یک دوم است. در این مقاله فرضیات ساده کننده زیر در نظر گرفته شده است:

۱- بافرض غیر قابل تراکم بودن در تغییرات حجمی و فرض رفتار ویسکوالاستیک در برش خواهیم داشت ν متغیر تبدیل لاپلاس می باشد

$$K(s) = \infty \\ \nu(s) = \frac{1}{2} \quad (11)$$

۲- رفتار ماده تحت اثر تنش های هیدرواستاتیکی، الاستیک است.

۳- رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک می باشد.

تنش - کرنش قرار می دهیم. بر همین اساس رابطه (۱۸) مقادیر کرنشهای خزشی را برحسب تنش بدست می دهد:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_c} \begin{bmatrix} (1-\nu_c^2) & -\nu_c(1+\nu_c) & 0 \\ -\nu_c(1+\nu_c) & -(1-\nu_c^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

با توجه به رابطه: $E = 2(1+\nu)G$ برای مواد الاستیک، عبارت $\frac{1}{E_c}$ در معادله (۱۸) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{2(1+\nu_c)} \frac{1}{G_c(D)} \quad (19)$$

اکنون می توان با اعمال اپراتور $\frac{1}{G_c(D)}$ برروی تنشها رابطه نهایی تنش - کرنش را بدست آورد. ابتدا با استفاده از معادله (۱۵) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{G_c(D)} = \frac{1}{R_2 + \eta_2 D} = \frac{\eta_2}{D + \left(\frac{R_2}{\eta_2}\right)} = \frac{A}{D + B} \quad (20)$$

برای کرنشهای خزشی داریم:

$$\frac{A}{D + B} \sigma(t) = \varepsilon(t) \quad (21)$$

اعمال اپراتور برروی طرف دوم معادله و استفاده از انتگرال کانولوشن رابطه زیر را بدست می دهد:

$$\varepsilon(t) = A \int_0^t \sigma(t-t') e^{-Bt'} dt' + \varepsilon(0) e^{-Bt} \quad (22)$$

می دانیم در لحظه $t=0$ کرنشهای خزشی برابر صفر می باشد و از آنجایی که مقدار تنش در هر گام زمانی ثابت در نظر گرفته می شود معادلات زیر حاصل خواهند شد:

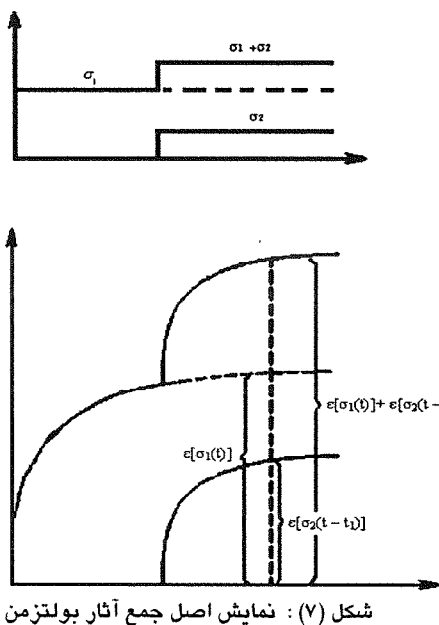
$$\varepsilon(t) = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt}) \sigma_0 \quad (23)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{R_2} (1 - e^{-R_2/\eta_2 t}) \sigma_0 \quad (24)$$

با توجه به معادله (۲۴) و با در نظر گرفتن $\nu_c = \frac{1}{2}$ ، نتیجه نهایی برای معادله ماتریسی (۱۸) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_2} (1 - e^{-R_2/\eta_2 t}) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (25)$$

فرمول (۲۵) رابطه بین تنشها و کرنشهای خزشی را ارائه می کند. از آنجایی که ما رفتار ماده را ویسکو الاستیک خطی در نظر گرفته ایم و از طرفی مقدار تنش را در طول هر گام زمانی ثابت فرض کرده ایم می توانیم با عنایت به اصل جمع آثار بولتزمن کرنشهای خزشی را در پایان هر پله زمانی محاسبه کنیم. اصل جمع آثار بولتزمن چنانکه در شکل (۷) نمایش داده شده است این مطلب را بیان می دارد که خروجی کرنش ناشی از ترکیب دو ورودی تنش مختلف که در زمانهای متفاوتی اعمال شده اند، برابر با مجموع خروجیهای کرنش ناشی از اعمال هر یک از آنها به تنهایی است. از این رو باید کرنش خزشی حاصل از تغییرات تنش در هر گام را به کرنشهای جزئی بوجود آمده در گامهای پیشین، اضافه نماییم یعنی کرنش خزشی در هر گره حاصل از جمع آثار همه تغییرات پله ای تنش در آن نقطه است که در گامهای زمانی پیشین بوجود آمده است. واضح است که تغییرات تنش در عمل پیوسته است اما دلیل این که پله های زمانی، کوچک فرض شده اند می توانیم مقدار تنش را در هر پله زمانی ثابت بگیریم. این تغییرات پله ای تنش $(\Delta\sigma_i)$ در شکل (۸) به نمایش گذاشته شده است. از این رو، در واقع σ ها و ε_c ها در فرمول (۲۵)، به ترتیب نشانگر تغییرات پله ای تنش و تغییرات کرنش خزشی در هر گره و در هر گام زمانی نسبت به گام زمانی پیشین است.



۵- نتایج

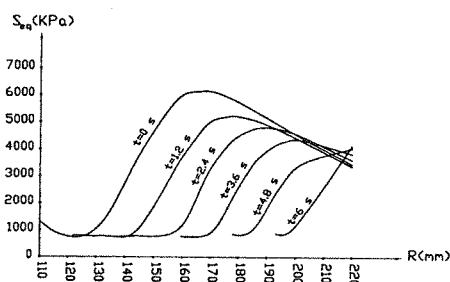
۵-۱- بررسی نتایج بصورت نمودار

با استفاده از اطلاعات موجود در فایل‌های تولید شده توسط برنامه، سعی شده است تا نمودارهایی به منظور درک آسانتر چگونگی تغییرات تنش فون میزز در گرین سوخت جامد تهیه گردد. قطاع ۲۲/۵ درجه را که تحلیل کرده‌ایم روی چهار زاویه $\theta_1 = 0^\circ$ ، $\theta_2 = 7.5^\circ$ ، $\theta_3 = 14.5^\circ$ و $\theta_4 = 22.5^\circ$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدیهی است که روی هر برش زاویه ای، مقدار θ ثابت خواهد بود لذا فقط شاهد تغییرات شعاع و گذر زمان خواهیم بود. اثر تغییرات شعاع و گذر زمان را بر مقدار تنش فون میزز در نمودارهای پایین بررسی می‌کنیم:

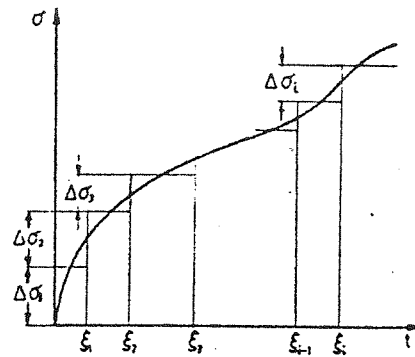
۵-۲- نمودار مربوط به برش صفر درجه گرین

سوخت جامد

در شکل (۹) تغییرات تنش فون میزز بر اثر تغییر شعاع در پله های زمانی اول ($t=0$ s)، سوم ($t=1.2$ s)، پنجم ($t=2.4$ s)، هفتم ($t=3.6$ s)، نهم ($t=4.8$ s) و یازدهم ($t=6$ s) مشاهده می‌شود. همان طور که در نمودار دیده می‌شود افزایش شعاع از سطح داخلی سوخت به سمت پوسته موتور همراه با سه گونه تغییر در تنش فون میزز می‌شود. در ابتدای افزایش شعاع تقریباً در همه گامهای زمانی شاهد این هستیم که مقدار تنش S_{eq} در محدوده کوچکی ثابت باقی می‌ماند. سپس با افزایش شعاع، مقدار S_{eq} با شیب نسبتاً زیادی افزایش می‌یابد تا اینکه به مقدار بیشینه خود در هر گام زمانی برسد در مرحله آخر هم با افزایش در شعاع مقدار S_{eq} به آرامی کاهش می‌یابد. ضمناً گذشت زمان موجب افزایش تنش S_{eq} در شعاعهای بزرگ می‌گردد، اما در شعاعهای کوچکتر افت تنش فون میزز را باعث می‌شود.



شکل (۹): نمودار تنش فون میزز- شعاع در پله های زمانی مختلف و در زاویه صفر درجه



شکل (۸): تقریب زدن تغییرات تنش پیوسته به تغییرات تنش پله ای

۴-۱- محاسبه تنشها

با در نظر گرفتن کرنش خزشی به عنوان یک کرنش اولیه در ابتدای هر گام زمانی، به معادله اساسی زیر خواهیم رسید:

$$[K][U] = [P] + [F_c] \quad (26)$$

ماتریس سختی $[K]$ مربوط به قسمت الاستیک است و بردار نیروی $[P]$ وابسته به بار اعمال شده خارجی و بردار نیروی $[F_c]$ وابسته به کرنش اولیه خزشی است. باحل معادله (۲۶) و دست آوردن جابجایی گره ای $[U]$ ، تنش در هر گام زمانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[\sigma] = [D][\epsilon] - [\epsilon_c] \quad (27)$$

$[\epsilon_c]$ کرنشهای خزشی، $[\epsilon]$ کرنشهای کلی سیستم و $[D]$ ماتریس خواص مصالح است.

بدین ترتیب در هر گام زمانی کرنشهای خزشی سیستم بدست می‌آید و نهایتاً توزیع تنش در گام زمانی مربوطه از طریق معادله (۲۷) مشخص می‌گردد و این روند برای هر گام زمانی تکرار می‌شود.

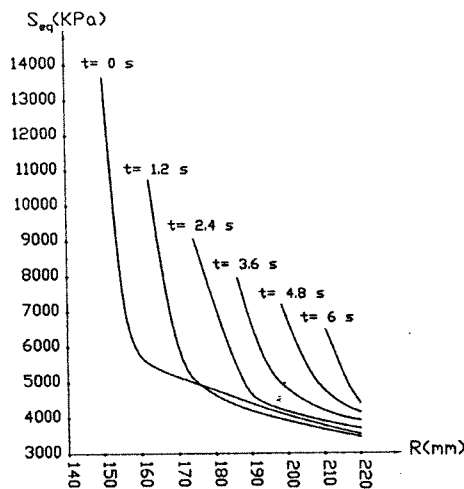
۴-۲- بررسی اثر حرارت تولید شده از سوختن سوخت

حرارت بسیار بالایی بر اثر سوختن سوخت ایجاد می‌شود اما این حرارت هیچ گونه تأثیری در تحلیل مسأله و محاسبه تنشها نخواهد داشت زیرا سرعت سوزش سوختهای جامد بسیار بیشتر از سرعت انتقال حرارت در آنها است. به عبارت دیگر در هنگام سوختن سوخت، قبل از این که نقاط آتش گرفته فرصت کنند حرارت خود را به بخشهای داخلی سوخت انتقال دهند به سرعت از گرین سوخت جدا می‌شوند و همراه گازهای خروجی از موشک خارج می‌شوند بنابراین حرارت تولید شده بر اثر سوختن سوخت نمی‌تواند تأثیری بر مسأله بگذارد.

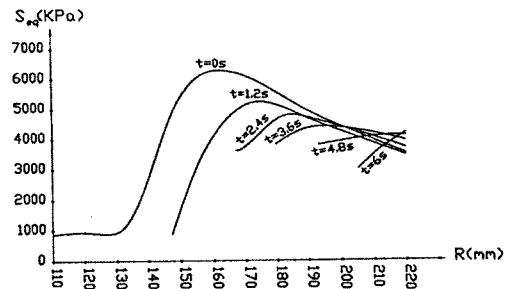
۳-۵- نمودار مربوط به برش ۷/۵ درجه

درگرین سوخت جامد

در شکل (۱۰) تغییرات تنش فون میزز بر اثر تغییر شعاع در پله های زمانی اول، سوم، پنجم، هفتم، نهم و یازدهم به نمایش در آمده است. این نمودار بسیار شبیه به نمودار قبلی است علت آن است که از نظر هندسی موقعیت خط برش ۷/۵ درجه مشابه خط برش صفر درجه است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که تمامی نقاطی از سوخت که روی قسمت برجسته گرین سوخت قرار دارند الگوی تغییرات تنش فون میزز در آنها به همین شکل است.



شکل (۱۱): نمودار تنش فون میزز-شعاع در پله های زمانی مختلف و در زاویه ۱۴/۵ درجه

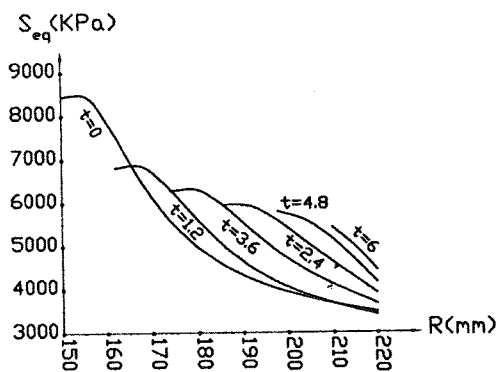


شکل (۱۰): نمودار تنش فون میزز-شعاع در پله های زمانی مختلف و در زاویه ۷/۵ درجه

۵-۵- نمودار مربوط به برش ۲۲/۵ درجه

درگرین سوخت جامد

الگوی تغییرات تنش فون میزز-شعاع در گامهای مختلف زمانی روی خط برش ۲۲/۵ درجه در شکل (۱۲) ارایه شده است الگوی این تغییرات شبیه تغییرات تنش خط ۱۴/۵ درجه می باشد علت شباهتی است که بین موقعیت هندسی این دو خط برش وجود دارد بنابراین می توان نتیجه گرفت که همه نقاطی که در فرو رفتگی گرین سوخت قرار دارند از همین الگو تبعیت می کنند. فقط به علت عدم وجود تغییرات ناگهانی هندسی روی این خط، شاهد جهش ناگهانی مقدار S_{eq} در شعاعهای داخلی نمی باشیم بلکه در شعاعهای کوچکتر شاهد قسمت کوچکی هستیم که در آنها مقدار S_{eq} تقریباً ثابت مانده است.



شکل (۱۲): نمودار فون میزز-شعاع در پله های مختلف زمانی و در زاویه ۲۲/۵ درجه

۴-۵- نمودار مربوط به برش ۱۴/۵ درجه در

گرین سوخت جامد

در شکل (۱۱) نیز مانند قبل، تنش فون میزز را در مقابل شعاع و در گامهای زمانی مختلف نشان داده ایم. در این زاویه بیشترین تنشها را روی سوخت مشاهده می کنیم. الگوی تغییرات تنش فون میزز (S_{eq}) در این زاویه متفاوت با زوایای قبلی است که می توان آن را به دو قسمت تقسیم کرد. در شعاع های کوچکتر تغییرات شدیدی در تنش مشاهده می شود. حال آنکه در شعاع های بزرگتر شیب تغییرات تنش کندتر شده است. علت این امر به هندسه مساله بر می گردد. در سطح داخلی سوخت روی خط ۱۴/۵ درجه، از لحاظ هندسی یک شوک وجود دارد. این تغییر ناگهانی که شدت آن در گامهای زمانی نخست بیشتر است باعث ایجاد تمرکز تنش در نقاطی می شود که نزدیک سطح داخلی هستند. هرچه زمان می گذرد شعاع هندسی آن قسمت بزرگتر می شود؛ بنابراین تاثیر تمرکز تنش کاسته می گردد که در نمودار شکل شماره ۱۰ قابل مشاهده است. گذر زمان عموماً باعث افزایش تنش فون میزز در نقاط مختلف شده است.

۶- نتیجه گیری و پیشنهاد

با بررسی دوباره نمودارهای بدست آمده از تحلیل المان محدود سوخت مورد نظر نتایج زیر را می توان بدست آورد:

۱- در کل گرین سوخت فقط دو الگوی تغییرات S_{eq} وجود دارد. یکی مربوط به قسمت برجسته سوخت است و دیگری، نقاط واقع در فرورفتگی گرین سوخت را شامل می گردد.

۲- بیشترین تنش مربوط به محل شعاع را کورد گرین سوخت می شود که در آنجا تمرکز تنش وجود دارد. مقدار این تنش بیشینه در $t=0s$ از همه پله های زمانی دیگر بیشتر می باشد.

۳- با دقت در الگوی تنش فون میزمر مربوط به نقاط واقع در برجستگی سوخت، ملاحظه خواهد شد که در این نواحی عموماً با گذشت زمان مقدار تنش فون میزمر در یک شعاع مشخص بتدریج کاهش می یابد و تنها در نقاط نزدیک پوسته فلزی ناحیه کوچکی هست که با گذشت زمان مقدار تنش S_{eq} در آنجا قدری افزایش از خود نشان می دهد که البته چندان قابل توجه نمی باشد.

۴- با ملاحظه الگوی تنش فون میزمر مربوط به نقاط واقع در فرورفتگی گرین سوخت، چنین نتیجه می شود که عموماً اثرگذر زمان در این نواحی بصورت افزایش مقدار تنش فون میزمر در یک شعاع مشخص بروز می کند.

۵- در هر دو الگوی تنش عموماً $(S_{eq})_{max}$ در هر پله زمانی نسبت به پله های زمانی قبلی کاهش می یابد. بنابراین بطور کلی S_{eq} بحرانی روی هر خط برش زاویه ای در همان زمان $t=0s$ قرار دارد. از طرفی این مقدار بحرانی تنش فون میزمر در محل شعاع را کورد سوخت از بقیه جاها بیشتر خواهد بود.

از آنجایی که معمولاً موشکها را پس از تولید بلافاصله مصرف نمی کنند بلکه اکثراً یک موشک برای سالها در انبارهای مخصوص نگهداری می شود می توان اثر گذشت زمانهای طولانی را بر تغییر خواص مکانیکی سوخت انبار شده بررسی نمود و زمان انبارشدگی را بصورت یک متغیر جدید وارد مسأله کرد. تا بدین ترتیب به توان عمر مفید یک سوخت را در انبار مشخص نمود.

از طرف دیگر می دانیم که دمای محیط نگهداری موشک همان درجه حرارت اولیه گرین سوخت است که در تعیین خواص سوزش سوخت تأثیر قابل توجهی دارد. لذا دمای محیط موشک قبل از شلیک نیز می تواند در تحلیل مسأله بالا نقش ایفا نماید که می باید در کارهای بعدی منظور شود تا

محدوده دمایی مناسب برای نگهداری موشک از این جهت مشخص گردد.

۷- ضمیمه : تعریف علائم

K	مدول حجمی
E_c	مدول خزشی
G_c	مدول برشی خزشی
R_1	معادل مدول برشی (در فنر)
R_2	معادل مدول خزشی (در فنر)
η_2	ضریب ویسکوزیته
ϵ_{cx}	کرنش خزشی در جهت x
ϵ_{cy}	کرنش خزشی در جهت y
γ_{cxy}	کرنش برشی در صفحه xy
ϵ	کرنش محوری
σ	تنش محوری
$\dot{\sigma}$	نرخ تنش محوری
S_{ij}	مولفه های تنش انحراف
d_{ij}	مولف های کرنش انحراف
Q_1	اپراتور دیفرانسیل
P_1	اپراتور دیفرانسیل
E	مدول الاستیک
ν	ضریب پواسون
$G_e = G$	مدول برشی الاستیک

۸- مراجع

- [۱] صنعتگر، محمدرضا. "تحلیل تنش در مواد ویسکوالاستیک و کاربرد آن در سوخت جامد"، پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی، دانشکده فنی، دانشگاه تهران (۱۳۸۲).
- [۲] رضایی، رضا. "تحلیل تنش در سوخت جامد موشک به روش اجزاء محدود"، پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی، دانشکده فنی، دانشگاه علم و صنعت ایران (۱۳۷۴).
- [۳] E.H.Lee, Stress Analysis in Viscoelastic Materials, J Applied Physics, Vol.27, n 7, 665-672 (1956).
- [۴] E.H.Lee, T.G.Rogers, Solution of Viscoelastic Stress Analysis Problems Using Measured Creep or Relaxation Functions, ASME Trans-J Appl.Mech, Vol.30, 127-133 (1963).
- [۵] B.Woodward, J.R.M.Radok, Stress Distribution in a Reinforced Hollow Viscoelastic Cylinder Subjected to Time Dependent Internal Pressure, Brown University Technical Report PA-TR/14 (1955).

- T.M.Jones, Viscoelastic Stresses Due to Internal Pressurization of Solid Propellant Rocket Grain, Developments in Theoretical & Appl.Mech, Vol.2, 247-260 (1965). [۶]
- J. T. Chen and S. -Y. Leu, Finite element analysis, design and experiment on solid propellant motors with a stress reliever, Finite Elements in Analysis and Design, Volume 29, Issue 2, 1 June 1998, Pages 75-86. [۷]
- John Z. Wu, Ren G. Dong and Aaron W. Schopper, Analysis of effects of friction on the deformation behavior of soft tissues in unconfined compression tests, Journal of Biomechanics, In Press, Corrected Proof, Available online 17 July 2003. [۸]
- J. I. R. Blake, R. A. Shenoj, J. House and T. Turton, Strength modelling in stiffened FRP structures with viscoelastic inserts for ocean structures, Ocean Engineering, Volume 29, Issue 8, July 2002, Pages 849-869. [۹]
- Fernand Ellyin, Zihui Xia and Yu Chen, Viscoelastic micromechanical modeling of free edge and time effects in glass fiber/epoxy cross-ply laminates, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Volume 33, Issue 3, March 2002, Pages 399-409. [۱۰]
- M.L.Williams, Structural Analysis of Viscoelastic Materials, AIAA J, Vol.2,785-808, (1964). [۱۱]
- M.Shinozuka, Stresses in incompressible Viscoelastic-Plastic Thick-Walled Cylinder, AIAA J, Vol.2, n 10, 1800-1804 (1964). [۱۲]
- M.L.Williams, Strain Analysis of Solid Propellant Rocket Grains, J Aerospace Sciences, Vol.27, n 8, 574-586 (1960). [۱۳]
- O.C.Zienkewich , the Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics , McGraw – Hill , New York (1967) [۱۴]