زمان‌بندی بهینه مساله کمینه‌سازی مجموع بیشینه زودکرد و دیرکرد با بیکاری عمدی در مساله یک ماشین

قاسم مصلحی

استادیار

مرتضی واسعی

کارشناسی ارشد

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

در این مقاله، مساله درنظرگرفتن بیکاری عمدی در مسایل تک‌ماشینی با معیار کمینه‌سازی مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد مورد بررسی قرار می‌گیرد. این معیار به دلیل سعی در حداقل کردن و به صفر رساندن مقادیر زودکرد و دیرکرد منطبق بر سیستم‌های تولیدی مختلفی از جمله JIT می‌باشد. حالت‌های خاص درنظرگرفتن بیکاری عمدی با موعدتحویل مشترک بررسی و جواب بهینه آنها ارایه شده است. برای حالت کلی، مساله یک ماشین و n کار با توالی معلوم و مجاز بودن بیکاری عمدی ($n/1/OI/ET_{max}$)، قضایای موثری استفاده شده و جواب بهینه به‌دست آمده است. ارایه قضایای قوی موجب شده این الگوریتم بسیاری از مسایل را در مدت زمان‌های کوتاه به صورت بهینه حل نماید. در حالت یک ماشین ۱۰۲۰ مساله در اندازه‌های کوچک، متوسط و بزرگ به صورت تصادفی تولید شده است. محدوده این مسایل از ۷ تا ۱۰۰۰ کار بوده و کارایی الگوریتم پیشنهادی در آنها نشان داده شده است.

کلمات کلیدی

زمان‌بندی ـ تک‌ماشین ـ بیشینه زودکرد ـ بیشینه دیرکرد ـ بیکاری عمدی مجاز

Optimal scheduling for single machine with maximum early/tardy cost and idle insert

G. Moslehi
Assistant Professor
M. Vasei
M. Sc
Department of Industrial Engineering,
Isfahan University of Technology

Abstract

The problem of inserting idle insert in one machine with the objective function of minimizing the sum of maximum earliness and tardiness is studied. Since this problem is trying to minimize and diminish the value of earliness and tardiness, is corresponds to different production systems, such as JIT. Special cases of determining of idle insert with common due date are studied and their optimal solution, are introduced. In general case, for one machine and n jobs with obvious sequence and idle insert ($n/1/OI/ET_{max}$) effective theorems are developed and the optimal solution is determined. Strong theorems are introduced in the idle insert algorithm, so that many problems would give optimal result quickly. In order to show the effectiveness of the suggested algorithm, *1020 problems of different sizes, with 7 to 1000 jobs, have been randomly generated and solved.*

Keywords
Scheduling, Single machine, Maximum Earliness, Maximum Tardiness, Idle insert

مقدمه

برنامه‌ریزی تولید یکی از فعالیت‌های مهم هر واحد تولیدی است. هدف برنامه‌ریزی تولید استفاده بهینه از منابع یک کارخانه بوده و رسیدن به اهداف کلان یک واحد، کاملا بستگی به تناسب برنامه‌های زمان‌بندی دارد. در تولید مدرن امروزه، تعیین توالی و زمان‌بندی در سیستم‌های پیشرفته از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که ضرورت توجه به آن را دو چندان کرده است. امروزه در برنامه‌ریزی‌ها یک هدف مطرح نبوده بلکه اهداف چندگانه مورد توجه تصمیم‌گیرندگان قرار می‌گیرد. از اینرو، جهت و سمت کارهای بسیاری از محققین، ارایه الگوریتم‌هایی با اهداف چندگانه است. بنابراین تشخیص اهداف مناسب و جدید از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد.

مساله یک ماشین و n قطعه پایه توسط بیکر [۱] با فرضیاتی معرفی می‌شود که عبارت است، تمام قطعات در زمان صفر آماده است. قطع عملیات[1] مجاز نیست. بیکاری عمدی[2] برای ماشین وجود ندارد. ماشین در هر زمان فقط بر روی یک قطعه کار انجام می‌دهد. برای پیداکردن جواب بهینه توابع هدف منظم[3]، کافی است در مجموعه برنامه‌های ترتیب[4] جستجو کرد. برای مدل پایه یک ماشین روش‌های ساده برای حل تعدادی از اهداف منظم وجود دارد. ترتیب SPT[5]، متوسط مدت زمان در جریان $(\bar{F})$[6]، متوسط مغایرت موعدتحویل و زمان ختم $(\bar{L})$[7] و متوسط انتظار قطعات را کمینه می‌کند. ترتیب EDD[8]، بیشینه مغایرت موعدتحویل و زمان ختم (L_{max}) و بیشینه دیرکرد (T_{max})[9] را کمینه می‌کند [۱].

با توسعه سیستم تولیدی JIT[10]، مساله زمان‌بندی زودکرد و دیرکرد که ادغامی از زودکرد و دیرکرد قطعات است در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته و مقالات متعددی در بررسی این‌گونه مسایل منتشر شده است. در این مقالات دسته‌بندی‌های متفاوتی دیده می‌شود. فرای [۲] این مسایل را به‌طور کلی به سه دسته تقسیم‌بندی کرد.

دسته اول، بهینه‌کردن مجموع وزنی دو زیرمعیار و تبدیل آنها به یک مساله تک‌معیاری است. اگر π یک توالی مشخص از کارها، E(π) و T(π) به ترتیب تابعی از زودکرد و دیرکرد توالی مذکور باشند و α ضریب هزینه هر واحد زودکرد کار و β ضریب هزینه هر واحد دیرکرد کار باشد این نوع تابع هدف را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر نشان داد. بیشتر مسایل زودکرد و دیرکرد تابع هدفی شبیه تابع هدف این نوع مسایل دارند.

$$f(\pi) = \alpha E(\pi) + \beta T(\pi) \qquad (۱)$$

با توجه به پارامترهای این نوع مسایل می‌توان مساله زودکرد و دیرکرد را از جهات مختلفی مورد بررسی قرار داد. به عنوان نمونه هال و همکاران [۳و۴] این مساله را با فرض موعدتحویل مشترک همراه با جریمه‌های خطی حل کردند. کاهل‌باچر [۵] نیز مساله زودکرد و دیرکرد را با درنظرگیری شکل عمومی جریمه‌ها مورد بررسی قرار داد. با توجه به خاصیت‌های مهمی که در حل این‌گونه مسایل همیشه به کار می‌رود، علیدایی [۶] خاصیت V شکل را که در بیشتر مسایل زودکرد و دیرکرد استفاده می‌شود، معرفی کرده و مورد بررسی قرارداد. فرای و همکاران [۷] این تابع را با فرض موعدهای تحویل جداگانه (که برای هر کار موعدتحویل جداگانه وجود دارد) حل کردند. دیویس و کانت [۸] الگوریتمی در مورد مساله تک‌ماشینی با ضرایب جریمه دلخواه ارایه دادند که زمان بیکاری عمدی در توالی مربوطه گنجانده شده است. گری و همکاران [۹] برای همین موضوع وقتی‌که ضرایب جریمه با هم مساوی هستند، الگوریتمی را ارایه کردند. کیم و یانو [۱۰] نیز وقتی هزینه جریمه دیرکرد کوچکتر از هزینه جریمه زودکرد نیست مساله را مورد بررسی قرار دادند. زوارک و موخوپادیای [۱۲] مدل زمان‌بندی زودکرد و دیرکرد ماشین‌های تکی را با در نظرگرفتن بیکاری عمدی بررسی کردند. تابع هدف آن‌ها به صورت زیر در نظر گرفت شد.

$$f(\pi)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i E_i+\beta_i T_i) \quad (۲)$$

در بعضی مسایل، تابع هدف نوع اول با در نظرداشتن موعدهای تحویل مشترک یا جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این‌گونه مسایل هدف کمینه‌کردن مجموع وزنی انحراف مطلق زمان‌های تکمیل کارها پیرامون موعد تحویل مشترک (WSAD[11]) می‌باشد. ماندل [۱۲] و هال و کوبیاک [۱۳] نقش موعد تحویل مشترک را در پیچیدگی مسایل اخیر مورد بررسی قرار دادند. همچنین لی و دانوسپاترا [۱۴] و ونچورا و ونگ [۱۵] با فرموله‌سازی برنامه‌ریزی پویا و هوگوین و اوسترهوت [۱۶] و زوارک [۱۷] با فرموله‌سازی BB[12] این مسایل را حل کردند.

در دسته مسایل نوع اول اشکال دیگری از توابع نیز دیده شده است. به عنوان نمونه تابع هدف مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد که برای اولین بار مورد توجه امین‌نیری و مصلحی [۱۸] قرار گرفته است. این تابع هدف زمانی کاربرد خواهد داشت که وجود مقادیر بزرگ زودکرد و یا دیرکرد موجب اشکال در سیستم تولیدی شود. مثلا حالتی‌که کارهای خروجی ماشین به صورت بسته‌های متشکل از چندین قطعه از کارخانه خارج شوند. اگر تمام کارهای یک بسته به موقع تولید شده ولی کاری دیرکرد یا زودکرد داشته باشد، بقیه کارها نیز باید منتظر بمانند. در نتیجه تولید به موقع آنها مزیتی نیست. از کاربردهای دیگر این تابع، تغذیه خط مونتاژ توسط یک ماشین است. بدین معنی که خط مونتاژ، کارها را در زمان مشخصی (موعد تحویل) نیاز دارد. اگر کاری زودکرد و یا دیرکرد داشته باشد موجب مصرف نشدن سایر کارها و اخلال در خط مونتاژ می‌شود.

دسته دوم از سری مسایل دسته‌بندی شده طبق نظر فرای بهینه‌کردن بعضی از زیرمعیارها با در نظرگرفتن زیرمعیارهای دیگر است. یعنی بعضی معیارها به عنوان محدودیت در نظر گرفته می‌شود که باید ارضاء شده و سپس دیگر معیارهای باقیمانده بدون نقض زیرمعیار اول، بهینه شود. درحالت کلی این دسته مسایل را می‌توان به صورت رابطه ۳ نشان داد که تابع هدف کمینه‌کردن مجموع زودکرد یک توالی با درنظرگیری محدودیت مقدار دیرکرد است (β یک عدد ثابت غیرمنفی است).

$$\begin{aligned}&\text{Min } f(\pi)=E(\pi)\\&\text{Subject to: } T(\pi)\le\beta\end{aligned} \quad (۳)$$

این مسایل در حوزه سیستم تولیدی JIT از مسایل دسته اول مهم‌تر است. در این دسته مسایل، سیوشوانگ [۱۹] زمان‌بندی n کار بر روی یک ماشین را مورد مطالعه قرار داد به طوری‌که مطابق با رابطه ۴ زودکرد وزنی با توجه به بیشترین دیرکرد کمینه می‌شود.

$$\begin{aligned}&\text{Min } f(\pi)=E(\pi)\\&\text{Subject to: } T_{max}\le\beta\end{aligned} \quad (۴)$$

برای $\beta=0$ مقالات دیگری نیز ارایه شده است. در یکی از آن‌ها احمدی [۲۰] یک روش BB برای مساله غیروزنی ارایه کرده و در دیگری احمدی [۲۱] یک روش BB برای حل مسایل وزنی توسعه داد. چاند و شنیبرگ [۲۲] اثبات کردند که این مساله Np-Complete[13] است و یک روش ابتکاری و همچنین یک DP[14] برای آن ارایه کردند. گانر [۲۳]، یک هدف دومعیاره با کمینه بیشینه زودکرد (E_{max}) وکمینه تعداد کارهای تاخیردار (N_T) ایجاد کرده است. در اینجا تابع هدف دوگانه به صورت $n/1/E_{max}/N_T$ نشان داده می‌شود یعنی ابتدا اقدام به کمینه‌کردن N_T کرده و سپس E_{max} کمینه می‌شود. که با کمینه‌کردن N_T رضایت مشتریان برآورده شده و با کمینه‌کردن E_{max} هزینه موجودی کالای تمام شده کاهش داده می‌شود. در مقاله‌ای که توسط چانگ [۲۴] نوشته شده، مساله n کار بر روی یک ماشین مورد بررسی قرار می‌گیرد. تابع هدف در اینجا کمینه‌کردن L_{max} با شرط رعایت محدودیت کمینه کارهای تاخیردار (N_T) می‌باشد.

دسته سوم از مسایل دسته‌بندی فرای تولید تمام توالی‌های کارا و سپس تصمیم‌گیری می‌باشد. دراین دسته مسایل، همه توالی‌های کارا تولید شده، سپس تصمیم‌گیرنده با جابجایی میان این توالی‌ها تصمیم می‌گیرد. در مسایل زودکرد و دیرکرد یک

برنامه π_1 بر برنامه π_2 غالب است اگر و فقط اگر $E(\pi_1)\leq E(\pi_2)$ و $T(\pi_1)\leq T(\pi_2)$. مقاله‌ای در این زمینه تحقیق یافت نشد.

همان‌طور که قبلا گفته شد امین‌نیری و مصلحی [۱۸] مساله تعیین توالی مجموعه‌ای از کارها با معیار کمینه‌سازی مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد در یک ماشین مورد بررسی قرار داده‌اند. این معیار در حالت‌های خاص بررسی شده و جواب بهینه آنها با ترتیب‌های ساده آورده شده است. در مقاله مذکور فرضیات مدل پایه و همچنین عدم بیکاری عمدی برای کار و ماشین، مجاز در نظر گرفته شده است. از آنجایی که ET_{max} یک معیار نامنظم است می‌توان فرض مجازنبودن بیکاری عمدی را حذف کرده و مساله جدیدی تعریف کرد. در مساله جدید جستجو برای یافتن توالی بهینه صورت می‌گیرد که می‌تواند بیکاری عمدی داشته باشد. این مساله به وسیله $n/1/I/ET_{max}$ نمایش داده می‌شود.

در صورت بررسی تابع هدف مجموع بیشینه زودکرد و بیشینه دیرکرد با مجازبودن بیکاری عمدی یکی از مسایلی که در پیش‌رو قرار دارد درنظرگرفتن بهترین مقدار بیکاری عمدی در توالی‌های مشخص برای بهبود تابع هدف می‌باشد. در این مقاله الگوریتم بهینه برای دستیابی به بهترین مقدار بیکاری عمدی در یک توالی معلوم ارایه می‌گردد.

در ادامه نمادهای مورد استفاده در حل مساله ارایه شده، سپس در بخش بعدی حالات خاص موعد تحویل مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس قضایای جدید به‌کار رفته در الگوریتم و ترتیب استفاده از این قضایا بیان می‌شود. بعد از آن نوبت به تشریح الگوریتم بیکاری عمدی می‌رسد. در نهایت مساله با روش ارایه شده حل شده و نتایج محاسباتی تحلیل می‌شود.

۲ـ تعریف نمادها

برای بیان قضایا و روابط مختلف، نمادهای عمومی به صورت زیر تعریف شده و از این به بعد کلمات کار و قطعه به جای یکدیگر به کار می‌روند. تعداد قطعات در توالی مشخص، n بوده که زمان پردازش و موعد تحویل قطعه i به ترتیب با p_i و d_i نشان داده می‌شود. در صورتی‌که همه قطعات دارای یک موعد تحویل یکسان با هم باشند و این موعدتحویل از قبل معلوم باشد از آن با نام موعد تحویل مساوی یاد می‌شود و در صورتی‌که این موعدتحویل به عنوان خروجی مساله مد نظر باشد به آن موعدتحویل مشترک اطلاق می‌گردد. زمان اتمام قطعه i با C_i و مدت زمان مغایرت اتمام و موعد تحویل قطعه i با L_i نشان داده می‌شود. در مساله یک ماشین مقادیر زودکرد (E_i) و دیرکرد (T_i) هر کار، بیشینه زودکرد (E_{max}) و بیشینه دیرکرد (T_{max}) توالی و مجموع بیشینه زودکرد و دیرکرد (ET_{max}) توالی از روابط زیر به دست می‌آید.

$$E_i = \max(0, d_i - C_i) \tag{۵}$$

$$T_i = \max(0, C_i - d_i) \tag{۶}$$

$$E_{max} = \max_{1\leq i\leq n}\left\{E_i\right\} \tag{۷}$$

$$T_{max} = \max_{1\leq i\leq n}\left\{T_i\right\} \tag{۸}$$

$$ET_{max} = E_{max} + T_{max} \tag{۹}$$

$$ET_{max} = \max_{1\leq j\leq n}\left\{Ej\right\} + \max_{1\leq k\leq n}\left\{T_k\right\} \tag{۱۰}$$

id مدت زمان بیکاری عمدی قرار داده شده در توالی است. با مشخص‌بودن فعالیت‌های دارای T_{max} و E_{max} در مساله بدون بیکاری عمدی سه مجموعه از سمت چپ به ترتیب با نام‌های A، B و C مطابق شکل شماره ۱ تعریف می‌شوند.

A	B	C

C_E C_T

شکل (۱) نمایش مجموعه‌های A، B و C.

فرض می‌شود فعالیت دارای T_{max} در C_T امین موقعیت توالی و فعالیت دارای E_{max} در C_E امین موقعیت توالی قرار دارد.

بیشترین دیرکرد مجموعه C با $maxT_C$، کمترین زودکرد مجموعه C با $minE_C$ و بیشترین زودکرد مجموعه A با $maxE_A$ نشان داده می‌شود. مساله زمان‌بندی بهینه یک توالی معلوم با تابع هدف ET_{max}، با مجازبودن و مجازنبودن بیکاری عمدی به ترتیب به صورت $n/1/OI/ET_{max}$ و $n/1/O/ET_{max}$ نشان داده می‌شود. در این مقاله هدف به دست آوردن بهترین مقدار بیکاری و بهترین مکان برای قراردادن بیکاری عمدی می‌باشد.

۳ـ حالت‌های خاص موعدتحویل

قضایای زیر حالت‌های مختلف موعدتحویل یکسان میان کارها را در مقابل توالی معلوم در نظر گرفته و مورد بررسی قرار می‌دهد. این موعدهای تحویل ممکن است به عنوان ورودی (موعد تحویل یکسان معلوم) یا خروجی (موعد تحویل یکسان مجهول) مورد فرض قرار گیرد که به ترتیب با نام‌های موعد تحویل مساوی و موعد تحویل مشترک آورده خواهند شد.

قضیه۱ـ بهترین موعد تحویل مشترک در مساله $n/1/O/ET_{max}$، در هر نقطه در فاصله زمانی کار با کوچکترین زمان ختم (C_{min}) و کار با بزرگترین زمان ختم (C_{max}) قرار دارد. (اثبات قضایا در ضمیمه آمده است)

قضیه ۲ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$ با فرض موعدتحویل مساوی، با درنظرگرفتن بیکاری عمدی تابع هدف فقط در حالتی بهبود خواهد یافت که $d>C_n$ باشد.

قضیه ۳ـ بهترین موعدتحویل مشترک در مساله $n/1/OI/ET_{max}$، بعد از زمان ختم اولین کار قرار دارد($d>C_1$). در این حالت تابع هدف فقط در صورتی بهبود می‌یابد که $d>C_n$ باشد و بهترین مقدار بیکاری عمدی قبل از C_1 قرار گیرد.

٤ـ قضایای کاربردی در الگوریتم

در این قسمت قضایایی که پایه و اساس الگوریتم می‌باشد، ارایه می‌گردد. در قضایای چهارم و پنجم به بررسی بهبود یا عدم بهبود تابع هدف ET_{max} با درنظرگرفتن بیکاری عمدی پرداخته می‌شود. در اینجا به این سوال که چه وقت درنظرگرفتن بیکاری عمدی در توالی موجب بهبود خواهد شد پاسخ گفته می‌شود.

قضیه ۴ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$، اگر کار دارای E_{max} قبل از کار دارای T_{max} قرار گرفته باشد، اضافه‌کردن بیکاری عمدی بهبودی در مقدار تابع هدف ایجاد نمی‌کند.

قضیه ۵ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$، اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} باشد. فقط با اضافه‌کردن بیکاری عمدی در مجموعه B، ممکن است منجر به بهبود تابع هدف شود.

بر مبنای دو قضیه چهارم و پنجم می‌توان دو نکته زیر را در مورد درنظرگرفتن یا عدم در نظر گرفتن بیکاری نتیجه‌گیری کرد.

نکته۱: در مساله $n/1/OI/ET_{max}$، اگر همه کارها در توالی مشخص دارای زودکرد نباشند (دارای دیرکرد بزرگتر یا مساوی صفر باشند) با واردکردن بیکاری عمدی نمی‌توان تابع هدف این توالی را بهبود داد.

این نکته حالتی از قضیه چهارم با $E_{max}=0$ می‌باشد که تابع هدف را به $ET_{max}=E_{max}+T_{max}=T_{max}$ تبدیل می‌کند. بنابراین باید مقدار T_{max} کمینه گردد. چون اضافه‌کردن هر نوع بیکاری عمدی موجب کاهش زمان ختم هیچ قطعه‌ای نمی‌گردد. بنابراین T_{max} کاهش نمی‌یابد.

نکته۲: در مساله $n/1/OI/ET_{max}$، اگر همه کارها در توالی مشخص دارای زودکرد مثبت باشند با واردکردن بیکاری عمدی می‌توان تابع هدف این توالی را بهبود داد.

این نکته حالتی از قضیه پنجم با $T_{max}=0$ می‌باشد که تابع هدف را به $ET_{max}=E_{max}+T_{max}=E_{max}$ تبدیل می‌کند. بنابراین باید مقدار E_{max} کمینه گردد. حال اگر مقدار کمینه زودکرد توالی با minE نشان داده شود واضح است که اگر به همین مقدار در ابتدای توالی، بیکاری قرار گیرد موجب کاهش زودکرد تمام قطعات به مقدار minE خواهد شد و مقدار E_{max} هم کاهش می‌یابد.

در نکته زیر و قضیه ششم مقدار بیکاری عمدی و محل‌های واردشدن آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نکته۳: در مساله $n/1/OI/ET_{max}$ ممکن است بهترین تابع هدف با اضافه‌کردن بیکاری در مکان‌های مختلف توالی به‌دست آید. همیشه با واردکردن بیکاری عمدی در یک مکان بهترین بهبود ناشی از در نظرگرفتن بیکاری عمدی حاصل نمی‌شود بلکه در

بعضی مواقع حتما نیاز به بیکاری عمدی چندگانه وجود دارد. به عنوان مثال، ۵ کار با زمان‌های پردازش ۶، ۱، ۲، ۳ و ۶ و موعدهای تحویل ۴، ۹، ۱۲، ۱۷، ۲۸ در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در شکل شماره ۲ دیده می‌شود در توالی (۵-۴-۳-۲-۱)، کار اول دارای بیشترین دیرکرد، T_{max}=۲ و کار آخر دارای بیشترین زودکرد، E_{max}=۱۰ و کارهای میان این دو کار، دارای زودکرد به ترتیب به مقدارهای ۲، ۳ و ۵ می‌باشند.

T_{max}=۲	A	E_1=۲	B	E_2=۳	C	E_3=۲	D	E_{max}=۱۰

شکل (۲) واردکردن بیکاری عمدی در نواحی مختلف.

با درنظرگرفتن بیکاری عمدی در یک نقطه، حالت‌های موجود در جدول شماره ۱، در بهترین حالت به وجود می‌آیند. در حالی‌که اگر بیکاری عمدی در چند نقطه در نظر داشته شود می‌توان در نقاط A، B، C و D به ترتیب مقادیر ۲، ۱، ۲ و ۵ را قرار داد که در نتیجه T_{max}=۲ و $E_{max}=0$ و ET_{max}=۲ می‌شود. یعنی با فرض واردکردن بیکاری در چند نقطه تابع هدف بهتری به دست آمد. به این ترتیب فرض بیکاری عمدی یک‌گانه برای همه حالات مردود خواهد شد.

مکان بیکاری	بهترین بیکاری	بیشترین دیرکرد	بیشترین زودکرد	تابع هدف
A	۴	۲	۶	۸
B	۵	۲	۵	۷
C	۷	۲	۳	۵
D	۵	۲	۵	۷

جدول (۱) محاسبه بیشترین زودکرد و بیشترین دیرکرد.

قضیه ۶ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$، داشتن محدوده برای بیکاری عمدی، بهینگی را در بعضی مواقع از بین نمی‌برد.
با توجه به قضیه ۶، از آنجایی که درنظرگرفتن بیکاری عمدی با مقادیر مختلف از ابتدا تا انتهای یک بازه، موجب بهبود یکسانی در تابع هدف می‌شود بنابراین کمترین مقدار یعنی نقطه ابتدایی بازه در الگوریتم بیکاری مورد جستجو قرار می‌گیرد.
کاربرد قضیه هفتم تا یازدهم در الگوریتم بیکاری عمدی است. از این قضایا برای درنظرگرفتن یا عدم درنظرگرفتن بیکاری و تعیین مقدار بیکاری عمدی استفاده می‌شود.
قضیه ۷ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر در توالی،کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} واقع شود چهار نقطه حدی وجود دارد که هیچ‌گاه بیکاری عمدی نمی‌تواند از کمینه آن مقادیر بیشتر باشد این چهار نقطه عبارتند از:

$$E_{max}\text{-}\max E_A,\ \min E_C+T_{max},\ T_{max}\text{-}\max T_C,\ E_{max} \qquad (11)$$

قضیه ۸ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر در توالی، کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} واقع شود و بیشینه زودکردها غیر از کار دارای E_{max} قبل از کار دارای T_{max} قرار گیرد میزان id از رابطه زیر به دست می‌آید و محل قرارگیری این مقدار بیکاری بلافاصله قبل از کار دارای E_{max} می‌باشد.

$$id=\min\{(E_{max}\text{-}\max E_A), (\min E_C+T_{max}), (T_{max}\text{-}\max T_C), E_{max}\} \qquad (12)$$

قضیه ۹ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر دیرکردی مانند T' پس از نقطه ورود بیکاری عمدی id (که باید قبل از یک زودکرد، بیکاری اضافه شود) وجود داشته باشد با فرض زودکرد E برای کار بلافاصله بعد از نقطه ورود بیکاری، id یک‌گانه در صورت رعایت چهار نقطه حدی، باید شرط زیر را داشته باشد.

(۱۳) $id \le \min\{(T_{max}-T'), \max(0, (E-$بیشینه E های قبل از نقطه ورود بیکاری$))\}$

قضیه ۱۰ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} قرار گیرد و بیشینه زودکردها غیر از کار دارای E_{max} در فاصله بین کار دارای T_{max} و کار دارای E_{max} واقع شد(مجموعه B). id بلافاصله قبل از اولین زودکردی اضافه می‌شود که از $maxE_A$ بزرگتر است.

قضیه ۱۱ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} قرار گیرد و شرایط به‌گونه‌ای بود که می‌توان در فاصله بین کار دارای T_{max} و کار دارای E_{max}، بیکاری اضافه شود و اگر در نقطه مجاز برای اضافه‌کردن بیکاری به بعد، تنها زودکرد وجود داشته باشد، بیکاری اضافه شده باید کوچکتر یا مساوی فاصله کمینه زودکردهای بعد از نقطه ورود بیکاری عمدی و فاصله میان بیشینه زودکردهای پس از این نقطه و بیشینه زودکرد قبل از این نقطه باشد.

۵ـ الگوریتم ورود بیکاری عمدی

در این قسمت گام‌های الگوریتم آورده شده و سپس نمودار جریان‌کاری در نمودار شماره ۱ ترسیم می‌شود.

گام اول ـ زودکرد و دیرکرد کارها را محاسبه کنید.

گام دوم ـ در صورتی‌که همه کارها زودکرد داشته باشند از اولین نقطه دارای زودکرد شروع کرده و به اندازه کمینه مقادیر ۱- زودکرد این نقطه، ۲- کوچکترین زودکرد پس از این نقطه و ۳- فاصله بیشینه زودکرد پس از این نقطه تا بیشینه زودکرد قبل از این نقطه، بیکاری وارد کنید. بعد از واردکردن بیکاری در تمام نقطه‌ها، به گام آخر بروید.

گام سوم ـ در صورتی‌که همه کارها دارای زودکرد نباشند کار دارای بیشترین زودکرد و کار دارای بیشترین دیرکرد را به‌دست آورید. اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} قرار داشته باشد به گام چهارم رفته در غیر این‌صورت به گام پنجم بروید.

گام چهارم ـ اگر همه کارها دارای دیرکرد هستند با بیکاری عمدی تابع هدف بهبود نمی‌یابد بنابراین به گام آخر بروید.

گام پنجم ـ به غیر از کار دارای E_{max}، بزرگترین زودکرد به‌دست آمده و 'E نامیده می‌شود. اگر 'E قبل از کار دارای T_{max} باشد به اندازه کمینه چهار نقطه حدی بلافاصله قبل از کار دارای E_{max} بیکاری عمدی وارد کرده و به گام آخر بروید در غیر این‌صورت به گام ششم بروید.

گام ششم ـ اگر بین کارهای دارای T_{max} و E_{max} زودکردی بزرگتر از $maxE_A$ وجود ندارد به اندازه کمینه چهار نقطه حدی بلافاصله قبل از کار دارای E_{max} بیکاری عمدی وارد کرده و سپس به گام آخر بروید در غیر این‌صورت به گام هفتم بروید.

گام هفتم ـ اولین زودکردی که از $maxE_A$ بیشتر است را انتخاب کرده و آن را به عنوان نقطه قرارگیری بیکاری در نظر بگیرید.

گام هشتم ـ اگر بعد از مکان مورد نظر برای ورود بیکاری عمدی تا کار دارای E_{max} دیرکرد وجود نداشته باشد فاصله همه زودکردهای پس از نقطه ورود بیکاری عمدی تا T_{max} و فاصله بزرگترین زودکرد پس از نقطه ورود بیکاری عمدی و بزرگترین زودکرد قبل از نقطه ورود بیکاری عمدی را در مجموعه D قرار دهید. کمینه مجموعه D را به دست آورده، در صورتی که این عدد منفی شد آن را تبدیل به صفر کنید. سپس به گام دهم بروید. در غیر این‌صورت در گام نهم، الگوریتم را ادامه دهید.

گام نهم ـ فاصله تمام دیرکردهای بعد از نقطه ورود بیکاری را تا کار دارای T_{max} اندازه گرفته و در مجموعه‌ای با نام B قرار دهید (اعضای این مجموعه را $T_{max}-T_i$ تشکیل می‌دهد). سپس به گام دوازدهم بروید.

گام دهم ـ اگر کوچکترین عضو مجموعه D از چهار نقطه حدی کوچکتر باشد به اندازه کوچکترین عضو مجموعه D در نقطه ورود بیکاری عمدی، بیکاری اضافه نموده و به گام اول بروید. در غیر این‌صورت به گام یازدهم بروید.

گام یازدهم ـ به اندازه کمینه چهار نقطه حدی در همان مکان یا قبل از کار دارای E_{max} بیکاری اضافه کرده و به گام آخر بروید.

گام دوازدهم ـ اگر از مجموعه B عضو کوچکتر از فاصله E تا $maxE_A$ (این فاصله d تعریف می‌شود) وجود نداشته باشد به گام سیزدهم بروید در غیر این‌صورت به گام چهاردهم بروید.

گام سیزدهم ـ اگر d کوچکتر از چهار نقطه حدی باشد به اندازه d در نقطه ورود بیکاری، بیکاری واردکرده و به گام اول بروید در غیر این‌صورت به گام یازدهم بروید.

گام چهاردهم ـ اگر کوچکترین عضو B از چهار نقطه حدی کوچکتر باشد به اندازه کوچکترین عضو B در نقطه ورود بیکاری

وارد کرده و به گام اول بروید در غیر این‌صورت به گام یازدهم بروید.

گام پانزدهم ـ پایان.

۶ـ کارایی الگوریتم

برای نشان‌دادن کارایی الگوریتم بیکاری عمدی در مساله یک ماشین باید مسایلی طراحی شود تا توانایی و نقاط ضعف آن نشان داده شود. در این بخش نحوه طراحی مسایل و طراحی روش آزمون الگوریتم بیکاری عمدی با استفاده از روش به‌کار رفته امین‌نیری و مصلحی [۱۸] ارایه شده است.

۶-۱ـ طراحی مساله

محققان زیادی در زمینه زودکرد و دیرکرد کارها تحقیق کرده‌اند. ایشان برای تولید مساله از نمونه‌های تصادفی استفاده کرده‌اند. این محققان دو عامل مهم را در تولید مساله در نظر گرفته‌اند. عامل اول به نام عامل دیرکرد بوده و با τ نمایش داده می‌شود. این عامل متوسط موعدتحویل کارها را نسبت به مجموع زمان‌های پردازش در مسایل یک ماشین مشخص کرده است. او و مورتون [۲۵]، یانو و کیم [۲۶]، کیم و یانو [۲۷] و جیمز و بیوکانن [۲۸] از محققانی بوده‌اند که دو عامل فوق را در نظرگرفته و برای τ رابطه زیر را در نظر گرفته‌اند.

$$\bar{d} = (1-\tau)\sum_{j=1}^{n} p_j \qquad (۱۴)$$

که در آن $\bar{d}$ متوسط موعدتحویل است. در رابطه بالا مقدار زمان‌های پردازش و مقدار τ مشخص شده و مقدار $\bar{d}$ به‌دست آورده می‌شود. عامل دوم، عامل دامنه موعد تحویل می‌باشد. این عامل توسط محققان اشاره شده به طور مشابه به کار گرفته شده است. زمان‌های پردازش مطابق ذگردی و همکاران [۲۹] از توزیع یکنواخت در دامنه [5,25] استفاده شده است. با استفاده از رابطه τ و مشخص‌بودن مقدار آن، متوسط موعدتحویل $\bar{d}$ به‌دست می‌آید. سپس با استفاده از یک توزیع یکنواخت موعدتحویل قطعات مشخص می‌شود. توزیع یکنواخت موعدتحویل قطعات در فاصله زیر می‌باشد.

$$[\bar{d}(1-R/2), \bar{d}(1+R/2)] \qquad (۱۵)$$

در رابطه بالا R دامنه موعدتحویل بوده و مقدار آن مشخص است. او و مورتون [۲۵] و ذگردی و همکاران [۲۹] مقدار عامل دیرکرد τ را برابر ۰/۲ و ۰/۶ و مقدار عامل دامنه‌موعد تحویل، R را برابر ۰/۶ و ۱/۶ فرض کرده‌اند. این اعداد تقریبا در تحقیقات استاندارد شده است. محققان از این اعداد برای تولید مسایل تصادفی استفاده می‌کنند.

۶-۲ـ طراحی روش آزمون

برای سنجش کارایی الگوریتم بیکاری عمدی از ترکیب دو عامل دیرکرد و دامنه تحویل قطعات، چهار دسته مساله ایجاد می‌شود. دسته اول با τ=۰/۲ و R=۱/۶، دسته دوم با τ=۰/۶ و R=۱/۶، دسته سوم با τ=۰/۲ و R=۰/۶ و دسته چهارم با τ=۰/۶ و R=۱/۶ می‌باشند. مسایل در هر دسته با اندازه‌های ۷، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۴۰، ۶۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۰۰، ۲۵۰، ۳۰۰، ۳۵۰، ۴۰۰، ۵۰۰، ۶۰۰، ۸۰۰ و ۱۰۰۰ کار در نظر گرفته شده است. تعداد ۱۵ مساله از هر اندازه در هر دسته تولید و حل شده است. بنابراین ۲۵۵ مساله (۲۵۵=۱۷×۱۵) و برای تمام دسته‌ها ۱۰۲۰ مساله (۱۰۲۰=۲۵۵×۴) تولید شده است. این مسایل با کامپیوتر شخصی پنتیوم II حل شده است.

۶-۳ـ حل مساله و نتیجه محاسباتی

خلاصه نتایج حل مسایل دسته اول، دوم، سوم و چهارم که برای ۲۵۵ مساله در ۱۷ اندازه محاسبه شده به ترتیب در جداول شماره ۲، ۳، ۴ و ۵ آورده می‌شود. در این جداول ستون "تعداد کار" اندازه مساله، ستون "متوسط زمان اجرای الگوریتم" متوسط زمان اجرای الگوریتم بیکاری عمدی و ستون "متوسط زمان اجرای شمارش کامل" متوسط زمان اجرای شمارش کامل بیکاری را نشان می‌دهد.

در جدول شماره ۲ تعداد ۵ عدد از ۲۵۵ مساله در زمانی بیش از ۰/۰۰۱ ثانیه به جواب بهینه رسیده‌اند و بقیه مسایل با

استفاده از الگوریتم بیکاری عمدی با زمانی کوچکتر یا مساوی ۰/۰۰۱ ثانیه به جواب بهینه رسیده‌اند. در جداول شماره ۳، ۴ و ۵ نیز به ترتیب ۸، ۳ و ۳ عدد از ۲۵۵ مساله در زمانی بیش از ۰/۰۰۱ ثانیه به جواب بهینه رسیده‌اند که این موضوع توانایی فوق‌العاده الگوریتم بیکاری عمدی را نشان می‌دهد. (با توجه به این‌که دقت اعداد نشان داده شده در جدول با دو رقم اعشار می‌باشد این زمان‌ها در جدول نشان داده نمی‌شود).

همان‌طور که در جدول شماره ۳ مشاهده می‌شود متوسط زمان اجرای شمارش کامل با شیب تند از ۷ کار تا ۱۰۰۰ کار در حال افزایش است تا این که در ۱۰۰۰ کار به طور متوسط ۱۵۴۵/۹۴ ثانیه زمان برای اجرای شمارش کامل صرف می‌شود. هر چه زمان محاسبه شمارش کامل بالاتر رود نیاز به استفاده از الگوریتم بیکاری عمدی نمایان‌تر می‌شود. بنابراین هر چه تعداد کارها افزایش یابد این الگوریتم در کاهش هر چه بیشتر زمان محاسبات کارایی خود را بهتر نشان می‌دهد. در جداول شماره ۴ و ۵ نیز موارد مربوط به جداول دسته اول و دوم رخ داده است. و افزایش سریع زمان شمارش کامل نسبت به افزایش تعداد کار مشهود است.

در مقایسه میان زمان محاسباتی که برای چهار دسته تهیه شده می‌توان نتیجه گرفت که متوسط زمان محاسبات شمارش کامل چهار دسته دارای این رابطه است که زمان محاسبات شمارش کامل دسته اول> دسته سوم>دسته دوم>دسته چهارم. در تمام مسایل چهار دسته فوق قضیه اول صدق می‌کند بنابراین ورود بیکاری عمدی در هیچ‌یک موجب بهبود در تابع هدف نمی‌شود. در هر دسته (با τ و R ثابت) با افزایش تعداد کار، زمان محاسبات شمارش کامل بیشتر می‌شود. این موضوع با کاهش τ نیز رخ می‌دهد یعنی با کاهش τ در میان دسته‌های مختلف زمان محاسبات شمارش کامل بیشتر شده و بالعکس. در ضمن با ثابت‌بودن τ و با افزایش R نیز زمان محاسبات شمارش کامل افزایش می‌یابد. بنابراین زمان محاسبات شمارش کامل با τ نسبت معکوس و با R نسبت مستقیم دارد. در این صورت با افزایش τ مساله ساده‌تر می‌شود و این موضوع در میان مسایل با τ ثابت، با کاهش R رخ می‌دهد. هر چه مساله دشوارتر شود کارایی الگوریتم بیشتر نشان داده می‌شود.

با کاهش τ، $\bar{d}$ افزایش یافته و در این صورت حد بالای دامنه توزیع یکنواخت مربوط به تولید موعدتحویل بیشتر می‌شود لذا موعدهای تحویل بزرگتری نسبت به قبل تولید می‌شود بنابراین E_{max} های بزرگتری نیز تولید می‌شود و از آنجایی که زمان محاسبات شمارش کامل با مقدار E_{max} رابطه مستقیم دارد (چون در هر نقطه از شمارش کامل مقادیر صفر تا E_{max} مورد ارزیابی قرار می‌گیرد) بنابراین زمان محاسبات شمارش کامل با τ رابطه معکوس دارد. با افزایش R نیز حد بالای دامنه توزیع یکنواخت مربوط به تولید موعدتحویل بیشتر شده و همانند توضیح مربوط به کاهش τ موجب افزایش زمان محاسبات شمارش کامل می‌شود.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله تابع هدف کمینه‌سازی مجموع بیشینه‌های زودکرد و دیرکرد (ET_{max}) و تطبیق آن با سیستم‌های تولیدی ارایه شده و زمان‌بندی بهینه مساله کمینه‌سازی مجموع بیشینه زودکرد و دیرکرد با استفاده از الگوریتم بیکاری عمدی در مساله یک ماشین تشریح شد. با توجه به کارایی الگوریتم پیشنهادی در این مقاله، حل مسایل تعیین توالی تک‌ماشینی $n/1/I/ET_{max}$ را می‌توان بسیار ساده کرد.

جمعا ۱۰۲۰ مساله در ۴ دسته برای سنجش کارایی الگوریتم بیکاری عمدی طراحی و حل شدند. معمولا با افزایش اندازه مساله، الگوریتم‌ها با افزایش شدید زمان محاسبات روبرو می‌شوند. این مشکل در مسایل بزرگ بیشتر وجود دارد. ولی در الگوریتم بیکاری عمدی چنین موضوعی با توجه به مسایل حل‌شده مشاهده نشد. همان‌طور که دیده شد در چهار دسته مسایل تولید شده برای سنجش کارایی الگوریتم بیکاری عمدی تا تعداد ۱۵۰ کار را می‌توان در زمان قابل قبولی حل کرد ولی نباید فراموش کرد که این زمان تنها برای ورود بیکاری عمدی در یک توالی است و برای وارد کردن بیکاری در شمارش تعداد زیادی از توالی‌های ممکن در مسایل تعیین توالی که مورد استفاده اصلی این الگوریتم می‌باشد، زمان زیادی صرف می‌شود.بنابراین یکی از زمینه‌های تحقیق می‌تواند حل مساله تعیین توالی تک‌ماشینی $n/1/I/ET_{max}$ باشد. کاربردهای دیگر تابع هدف ET_{max} در سایر مسایل زمان‌بندی مانند مسایل Job shop، Flow shop و..... همچنین تغییر در فرضیات را می‌توان از زمینه‌های دیگر تحقیق برشمرد.

جدول (۲) خلاصه نتایج الگوریتم دسته اول (R=۱/٦،τ=۰/۲).

تعداد کار	تعداد مساله در هر دسته	متوسط زمان اجرای الگوریتم (ثانیه)	متوسط زمان اجرای شمارش کامل (ثانیه)
۷	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۱۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۱
۲۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۲
۲۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۶
۴۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۲۳
۶۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۸۸
۱۰۰	۱۵	۰/۰۰	۳/۷۲
۱۵۰	۱۵	۰/۰۰	۱۳/۷۳
۲۰۰	۱۵	۰/۰۰	۲۸/۳۲
۲۵۰	۱۵	۰/۰۰	۵۶/۰۰
۳۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۰۵/۲۸
۳۵۰	۱۵	۰/۰۰	۱۶۷/۰۹
۴۰۰	۱۵	۰/۰۰	۲۲۸/۱۹
۵۰۰	۱۵	۰/۰۰	۴۲۵/۸۳
۶۰۰	۱۵	۰/۰۰	۷۳۹/۴۸
۸۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۸۲۰/۳۴
۱۰۰۰	۱۵	۰/۰۰	۳۳۵۲/۲۱
جمع	۲۵۵		

جدول (۳) خلاصه نتایج الگوریتم دسته دوم (R=۱/٦،τ=۰/٦).

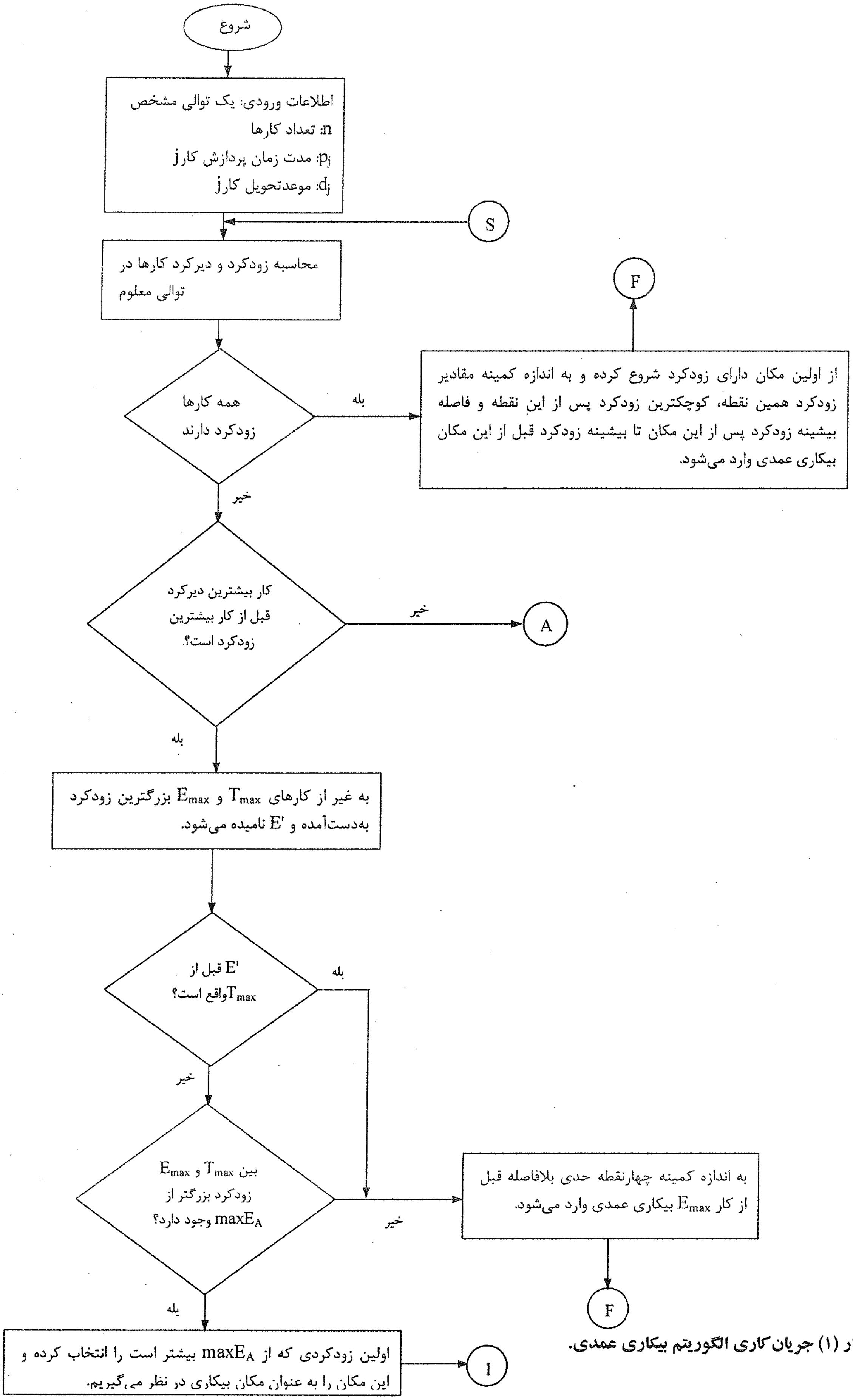
تعداد کار	تعداد مساله در هر دسته	متوسط زمان اجرای الگوریتم (ثانیه)	متوسط زمان اجرای شمارش کامل (ثانیه)
۷	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۱۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۲۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۲۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۲
۴۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۱۰
۶۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۳۴
۱۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱/۶۵
۱۵۰	۱۵	۰/۰۰	۵/۵۰
۲۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۴/۰۸
۲۵۰	۱۵	۰/۰۰	۲۷/۸۰
۳۰۰	۱۵	۰/۰۰	۴۶/۶۴
۳۵۰	۱۵	۰/۰۰	۷۴/۲۶
۴۰۰	۱۵	۰/۰۰	۹۶/۷۶
۵۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۸۶/۵۸
۶۰۰	۱۵	۰/۰۰	۳۲۶/۳۴
۸۰۰	۱۵	۰/۰۰	۷۹۰/۱۶
۱۰۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۵۴۵/۹۴
جمع	۲۵۵		

جدول (٤) خلاصه نتایج الگوریتم دسته سوم (R=۰/٦،τ=۰/۲).

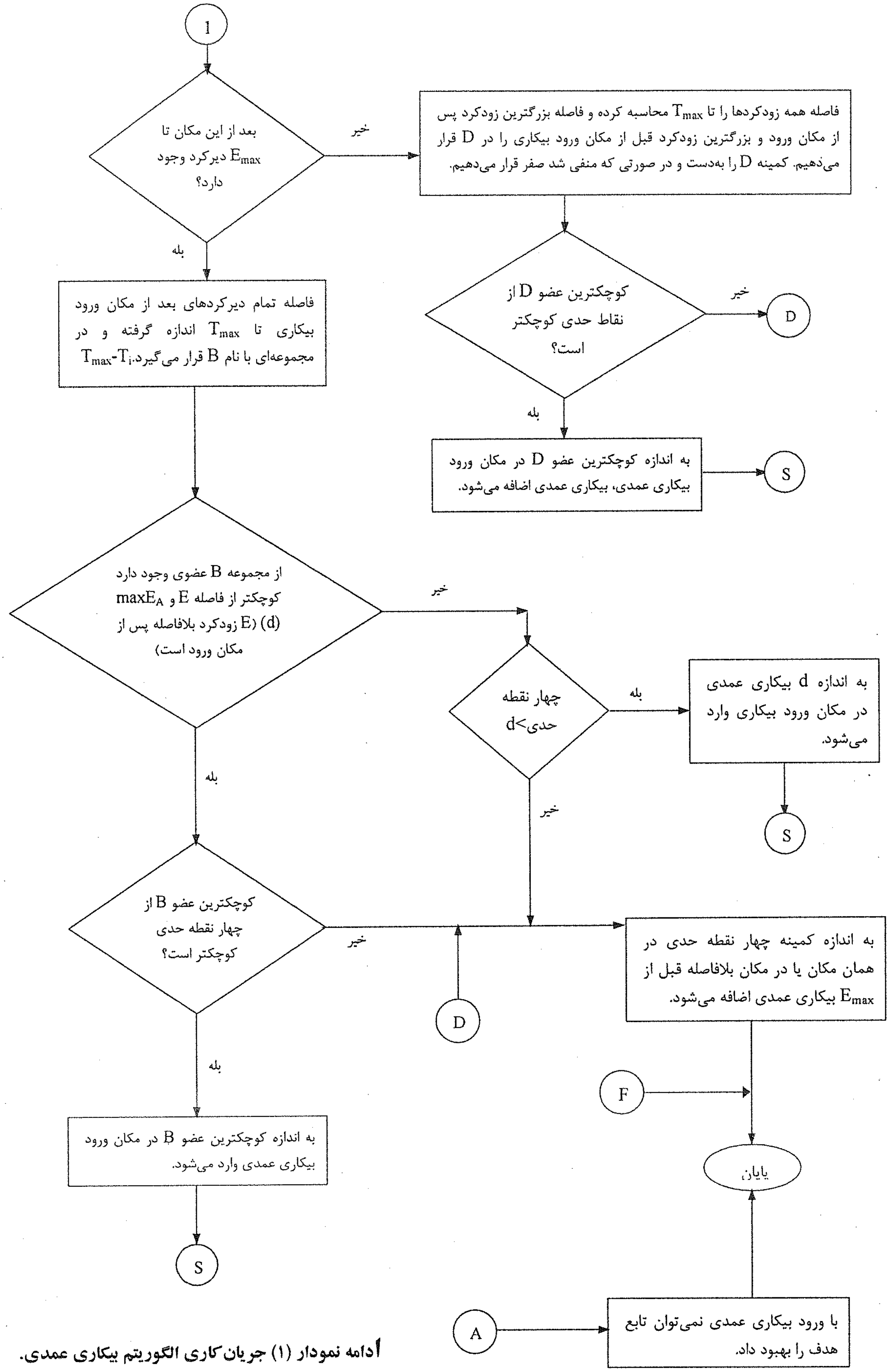
تعداد کار	تعداد مساله در هر دسته	متوسط زمان اجرای الگوریتم (ثانیه)	متوسط زمان اجرای شمارش کامل (ثانیه)
۷	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۱۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۲۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۲
۲۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۴
۴۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۱۳
۶۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۴۷
۱۰۰	۱۵	۰/۰۰	۲/۴۵
۱۵۰	۱۵	۰/۰۰	۷/۸۳
۲۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۸/۸۸
۲۵۰	۱۵	۰/۰۰	۳۶/۴۲
۳۰۰	۱۵	۰/۰۰	۶۴/۵۱
۳۵۰	۱۵	۰/۰۰	۱۰۰/۸۲
۴۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۳۳/۷۶
۵۰۰	۱۵	۰/۰۰	۲۶۹/۳۰
۶۰۰	۱۵	۰/۰۰	۴۶۶/۴۲
۸۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۱۲۴/۶۸
۱۰۰۰	۱۵	۰/۰۰	۲۲۲۹/۴۸
جمع	۲۵۵		

جدول (۵) خلاصه نتایج الگوریتم دسته چهارم (R=۰/٦،τ=۰/٦)

تعداد کار	تعداد مساله در هر دسته	متوسط زمان اجرای الگوریتم (ثانیه)	متوسط زمان اجرای شمارش کامل (ثانیه).
۷	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۱۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۲۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۰
۲۵	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۳
۴۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۰۶
۶۰	۱۵	۰/۰۰	۰/۲۲
۱۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱/۷۳
۱۵۰	۱۵	۰/۰۰	۳/۶۳
۲۰۰	۱۵	۰/۰۰	۸/۶۲
۲۵۰	۱۵	۰/۰۰	۱۶/۴۲
۳۰۰	۱۵	۰/۰۰	۳۰/۸۹
۳۵۰	۱۵	۰/۰۰	۴۸/۷۸
۴۰۰	۱۵	۰/۰۰	۶۰/۶۴
۵۰۰	۱۵	۰/۰۰	۱۲۴/۰۸
۶۰۰	۱۵	۰/۰۰	۲۰۶/۴۰
۸۰۰	۱۵	۰/۰۰	۴۹۶/۹۸
۱۰۰۰	۱۵	۰/۰۰	۹۷۶/۱۹
جمع	۲۵۵		



نمودار (۱) جریان‌کاری الگوریتم بیکاری عمدی.



ادامه نمودار (1) جریان کاری الگوریتم بیکاری عمدی.

زیرنویس‌ها

1-Preemption
2- Idle Insert
3- Regular
4- Permutation Schedules
5- Shortest Processing Time
6- Flow Time
7- Lateness
8- Earliest Due Date
9- Tardiness
10-Just In Time
11- Weighted sum of absolute deviation
12- Branch and Bound
13- Non polynominal
14-Dynamic Programming

فهرست علایم لاتین

E_i: زودکرد کار i ام
E_{max}: بیشترین زودکرد
d_i: موعد تحویل کار i ام
R: عامل موعد تحویل
P_i: زمان پردازش کار i ام
$f(\pi)$: تابع هدف مربوط به توالی π
T_i: دیرکرد کار i ام
T_{max}: بیشترین دیرکرد
N_T: تعداد کارهای دیرکرددار
N: تعداد کارها
C_i: خاتمه کار i ام

فهرست علایم یونانی

α: ضریب هزینه هر واحد دیرکرد کار.
π: یک توالی معلوم.
β: ضریب هزینه هر واحد دیرکرد کار.

ضمیمه

قضیه۱ـ بهترین موعد تحویل مشترک در مساله $n/1/O/ET_{max}$، در هر نقطه در فاصله زمانی کار با کوچکترین زمان ختم (C_{min}) و کار با بزرگترین زمان ختم (C_{max}) قرار دارد.

اثبات: اگر کار ۱ تا n به صورتی چیده شده باشد که کار اول تا کار n ام به ترتیب دارای زمان تکمیل C_1، C_2،...و C_n باشد حالت‌های زیر قابل بررسی است.

الف ـ در صورتی‌که موعدتحویل مشترک میان $C_1(C_{min})$ و $C_n(C_{max})$ واقع شود کار اول بیشترین زودکرد و کار آخر بیشترین دیرکرد را دارا می‌باشد. با توجه به موقعیت کارهای با بیشترین زودکرد و بیشترین دیرکرد به ترتیب در ابتدا و انتهای توالی روابط $E_{max}=d-C_1$ و $T_{max}=C_n-d$ به‌دست می‌آید که می‌توان با جمع‌بندی این دو، رابطه ۱۶ را به‌دست آورد.

$$ET_{max}=E_{max}+T_{max}=C_n-C_1 \qquad (۱۶)$$

با توجه به ثابت‌بودن زمان تکمیل کارهای اول و آخر، مقدار ET_{max} ثابت است.

ب ـ در صورتی‌که موعدتحویل قبل از C_1 واقع شود ($d\leq C_1$) همه کارها دیرکرد خواهند داشت و T_{max} از رابطه $T_{max}=C_n-d$ محاسبه می‌شود. در نتیجه رابطه ۱۷ برای ET_{max} به‌دست خواهد آمد.

$$ET_{max}=E_{max}+T_{max}=C_n-d \qquad (۱۷)$$

چون $(C_n-d)>(C_n-C_1)$ بنابراین جواب بدتری نسبت به حالت الف به دست خواهد آمد.

ج ـ در صورتی‌که موعد تحویل بعد از C_n واقع شود ($d\geq C_n$) همه کارها زودکرد خواهند داشت که مقدار آن از رابطه $E_{max}=d-C_1$ به دست می‌آید. در نتیجه رابطه ۱۸ برای ET_{max} به‌دست خواهد آمد.

$$E_{max}+T_{max}=d-C_1 \tag{۱۸}$$

چون $(d-C_1)>(C_n-C_1)$ در این محدوده نیز جواب بدتری نسبت به حالت الف به دست خواهد آمد. بنابراین بهترین موعدتحویل مشترک مربوط به قسمت الف یعنی میان زمان تکمیل کار اول (C_1) و کار آخر (C_n) قرار دارد و در آن تابع هدف برای هر موعد تحویلی در میان C_1 تا C_n یکسان است.

قضیه ۲ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$ با فرض موعدتحویل مساوی، با درنظرگرفتن بیکاری عمدی تابع هدف فقط در حالتی بهبود خواهد یافت که $d>C_n$ باشد.

اثبات: حالت‌های ممکن موعدتحویل در زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

الف ـ $d\leq C_1$: در اینجا همه کارها با هر توالی دارای دیرکرد می‌باشند و بیشترین دیرکرد مربوط به کار آخر می‌باشد یعنی:

$$\forall i;\ C_i-d<C_n-d \Rightarrow T_i<T_n,\ T_{max}=T_n \tag{۱۹}$$

در این حالت اگر id چه قبل از d و چه بعد از d قرار داشته باشد موجب افزایش تابع هدف ET_{max} خواهد شد، چون بیشترین دیرکرد به دست آمده (T'_{max}) به میزان id افزایش خواهد داشت.

$$T'_{max}=T_{max}+id>T_{max} \tag{۲۰}$$

ب ـ $C_1<d<C_n$: در این حالت در مورد بیشترین زودکرد و بیشترین دیرکرد می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت.

$$\forall i;\ d-C_1>d-C_i \Rightarrow E_{max}=E_1 \tag{۲۱}$$

$$\forall i;\ C_i-d<C_n-d \Rightarrow T_{max}=T_n \tag{۲۲}$$

قرارگرفتن id قبل از C_1 موجب افزایش T_{max} و کاهش E_{max} به‌ترتیب به صورت $T'_{max}=T_{max}+id$ و $E'_{max}=E_{max}-id$ خواهد شد و تابع هدف جدید برابر خواهد بود با تابع هدف قبلی، یعنی:

$$ET'_{max}=E'_{max}+T'_{max}=E_{max}+T_{max} \tag{۲۳}$$

پس تابع هدف ثابت باقی می‌ماند. حال اگر id بعد از d و قبل از C_n قرار گیرد موجب افزایش بیشترین دیرکرد و ثابت ماندن بیشترین زودکرد می‌شود یعنی $T'_{max}=T_{max}+id$ و $E'_{max}=E_{max}$. و در نهایت تابع هدف جدید به صورت $ET'_{max}=E_{max}+T_{max}+id$ افزایش خواهد یافت و در این حالت نیز با ورود id تابع هدف بدتر می شود. لازم به ذکر است که اگر id قبل از d و بعد از C_1 قرار گیرد همچنان حالت فوق رخ خواهد داد. بنابراین در این حالت با معلوم‌بودن توالی افزودن بیکاری عمدی موجب بهبود تابع هدف نخواهد شد.

ج ـ $d\geq C_n$: در این حالت همه کارها دارای زودکرد هستند که مقدار آن از رابطه $E_{max}=d-C_1$ به‌دست می‌آید و $T_{max}=0$ خواهد بود. افزایش id قبل از C_1 موجب بهبود تابع هدف تا مقدار$(d-C_n)$ خواهد شد یعنی $E'_{max}=E_{max}-id$ و $T_{max}=0$. و افزایش id بیشتر از مقدار $d-C_n$، کار n ام در توالی را تبدیل به دیرکرد خواهد کرد. اگر بیکاری عمدی $id=d-C_n$ باشد بیشترین زودکرد از رابطه زیر به‌دست خواهد آمد.

$$E_n=d-C_n \tag{۲۴}$$

اگر $id>d-C_n$ باشد $E_n=0$ و $T_n>0$ خواهد شد. در این حالت مساله تبدیل به حالت ب می‌گردد■

قضیه ۳ـ بهترین موعدتحویل مشترک در مساله $n/1/OI/ET_{max}$ بعد از زمان ختم اولین کار قرار دارد($d>C_1$). در این حالت تابع هدف فقط در صورتی بهبود می‌یابد که $d>C_n$ باشد و بهترین مقدار بیکاری عمدی قبل از C_1 قرار گیرد.

اثبات: سه حالت زیر در نظر گرفته می‌شود.

الف ـ $C_1<d<C_n$: در این حالت اگر id قبل از کار اول اضافه شود تابع هدف ثابت باقی می‌ماند چون میزان افزایش بیشترین دیرکرد برابر است با کاهش بیشترین زودکرد یعنی $T'_{max}=T_{max}+id$ و $E'_{max}=E_{max}-id$ و در نهایت تابع هدف به دست آمده در اثر ورود بیکاری عمدی تغییری نخواهد کرد.

$$ET'_{max}=E'_{max}+T'_{max}=E_{max}+T_{max}=ET_{max} \tag{۲۵}$$

اگر id به مکانی قبل از C_n و بعد از C_1 اضافه شود تابع هدف افزایش می‌یابد چون بیشترین دیرکرد و بیشترین زودکرد به ترتیب برابر می‌شود با $T'_{max}=T_{max}+id$ و $E'_{max}=E_{max}$ و در نتیجه تابع هدف به دست آمده از ورود بیکاری عمدی به صورت زیر می‌شود.

$$ET'_{max}=E_{max}+id>ET_{max} \tag{۲۶}$$

ب ـ $d\leq C_1$: در این حالت تمام قطعات دیرکرد دارند در نتیجه افزایش بیکاری عمدی موجب افزایش تابع هدف خواهد شد و تابع هدف جدید به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$ET'_{max}=T'_{max}=T_{max}+id>ET_{max} \tag{۲۷}$$

ج ـ $d\geq C_n$: در اینجا همه کارها دارای زودکرد هستند ($T_{max}=0$). اگر بیکاری عمدی قبل از شروع توالی (قبل از C_1) قرار داده شود بیشترین زودکرد کاهش خواهد یافت یعنی $E'_{max}=E_{max}-id$. اما اگر افزایش بیکاری عمدی از مقدار معینی افزایش یابد زودکرد کار nام تبدیل به دیرکرد خواهد شد یعنی $E'_n=0,\ T'_n>0$. این مقدار به صورت $id>d-C_n$ نشان داده می‌شود. یعنی افزایش بیکاری عمدی با رابطه مذکور دیرکرد به وجود می‌آورد و افزایش id در این حالت موجب بهترشدن تابع هدف نخواهد شد. پس قبل از شروع توالی با افزایش بیکاری عمدی تابع هدف حداکثر به میزان $d-C_n$ بهبود خواهد داشت. بنابراین با بررسی سه حالت فوق نتیجه می‌شود که افزایش بیکاری عمدی تنها در حالت ج موجب بهبود تابع هدف می‌شود.

قضیه ۴ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$ اگر کار دارای E_{max} قبل از کار دارای T_{max} قرار گرفته باشد، اضافه‌کردن بیکاری عمدی بهبودی در مقدار تابع هدف ایجاد نمی‌کند.

اثبات: فرض می‌شود توالی مشخص با n کار با شماره‌های از ۱ تا n وجود داشته باشد و k کاری باشد که بلافاصله بعد از آن id اضافه می‌شود. مقدار id حداقل به یکی از نواحی A، B و C اضافه می‌شود.

$$\forall i,\ \text{if } i>k \Rightarrow C'_i=C_i+id \tag{۲۸}$$

الف ـ اضافه‌کردن id در مجموعه A: کار دارای بیشترین دیرکرد همان کار باقی می‌ماند، فقط بر میزان دیرکردش اضافه می‌شود یعنی $T'_{max}=T_{max}+id$. کار دارای بیشترین زودکرد ممکن است همان کار باقی بماند و یا تبدیل به کار دیگری شود به هر حال می‌توان گفت حداکثر به میزان بیکاری عمدی از مقدار بیشترین زودکرد کاسته خواهد شد یعنی:

$$E'_{max}\geq E_{max}-id \tag{۲۹}$$

در مجموع رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$E'_{max}+T'_{max}=ET'_{max}\geq E_{max}+T_{max}+id-id \Rightarrow ET'_{max}\geq ET_{max}. \quad (30)$$

ب ـ اضافه‌کردن id در مجموعه B: کار دارای بیشترین دیرکرد همان کار باقی مانده و فقط بر میزان دیرکردش اضافه می‌شود یعنی $T'_{max}=T_{max}+id$ ولی کار دارای بیشترین زودکرد همان کار باقی می‌ماند یعنی $E'_{max}=E_{max}$.
در مجموع می‌توان نتیجه گرفت:

$$E'_{max}+T'_{max}=E_{max}+T_{max}+id \Rightarrow ET'_{max}\geq ET_{max} \quad (31)$$

ج ـ اضافه‌کردن id در مجموعه C: با اضافه‌کردن بیکاری عمدی در این مجموعه کار دارای بیشترین دیرکرد ممکن است همان کار باقی بماند یا تبدیل به کار دیگری شود یعنی $T'_{max}\geq T_{max}$ و کار دارای بیشترین زودکرد همان کار باقی می‌ماند یعنی $E'_{max}=E_{max}$.
با جمع‌بندی سه حالت الف، ب و ج در مجموع خواهد شد.

$$E'_{max}+T'_{max}\geq E_{max}+T_{max}\Rightarrow ET'_{max}\geq ET_{max} \quad (32)$$

با توجه به سه حالت فوق نتیجه می‌شود که اضافه‌کردن بیکاری عمدی موجب بهبود در تابع هدف نخواهد شد.

قضیه ۵ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$ اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} باشد. فقط با اضافه‌کردن بیکاری عمدی در مجموعه B، ممکن است منجر به بهبود تابع هدف شود.

اثبات: اضافه‌کردن بیکاری در محدوده‌های زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

الف ـ اضافه‌کردن id در مجموعه A: با اضافه‌کردن بیکاری عمدی در مجموعه A کار دارای بیشترین دیرکرد همان کار باقی می‌ماند، فقط بر میزان دیرکردش اضافه می‌شود یعنی $T'_{max}=T_{max}+id$ و کار دارای بیشترین زودکرد ممکن است همان کار باقی بماند و یا تبدیل به کار دیگری شود به هر حال حداکثر به میزان بیکاری عمدی از آن کاسته خواهد شد یعنی $E'_{max}\geq E_{max}-id$ بنابراین در مجموع، تغییرات زیر در تابع هدف جدید ایجاد شده و رابطه ۳۳ به‌دست خواهد آمد.

$$ET'_{max}=E'_{max}+T'_{max}\geq E_{max}+T_{max}\Rightarrow ET'_{max}\geq ET_{max} \quad (33)$$

ب ـ اضافه‌کردن id در مجموعه B: با اضافه‌کردن بیکاری عمدی در مجموعه B، کار دارای بیشترین دیرکرد و کار دارای بیشترین زودکرد ممکن است همان کارها باقی بماند و یا تبدیل به کار دیگری شود به هر حال خواهیم داشت $T'_{max}\geq T_{max}$ و $E'_{max}\geq E_{max}-id$ بنابراین در مجموع، تغییرات زیر در تابع هدف جدید ایجاد خواهد شد و رابطه ۳۴ به‌دست خواهد آمد.

$$ET_{max}=E'_{max}+T'_{max}\geq E_{max}+T_{max}-id \Rightarrow ET'_{max}\geq ET_{max}-id \quad (34)$$

که می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در این حالت می‌توان تابع هدف را بهبود داد.

ج ـ اضافه‌کردن id در مجموعه C: با اضافه‌کردن بیکاری عمدی در مجموعه C کار دارای بیشترین دیرکرد ممکن است همان کار باقی بماند و یا تبدیل به کار دیگری شود به هر حال خواهیم داشت $T'_{max}\geq T_{max}$ و کار دارای بیشترین زودکرد همان کارباقی می‌ماند یعنی $E'_{max}=E_{max}$ در نتیجه رابطه ۳۳ به دست می‌آید.

$$ET'_{max}=E'_{max}+T'_{max}\geq E_{max}+T_{max} \Rightarrow ET'_{max}\geq ET_{max} \quad (33)$$

با توجه به سه حالت فوق نتیجه می‌شود که تنها در حالت ب می‌توان تابع هدف را بهبود داد.

قضیه ۶ـ در مساله $n/1/OI/ET_{max}$، داشتن محدوده برای بیکاری عمدی، بهینگی را در بعضی مواقع از بین نمی‌برد.

اثبات: همان‌طور که قبلا اثبات شد اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} قرار گرفته باشد. می‌توان انتظار داشت با واردکردن بیکاری در بین این دو کار تابع هدف بهتری به وجود بیاید. اگر نقطه i محل واردکردن بیکاری باشد. با واردکردن بیکاری، بیشترین زودکرد کاهش می‌یابد یعنی $E'_{max}<E_{max}$. در نتیجه تابع هدف ET_{max} بهبود یافته و $ET'_{max}<ET_{max}$.

فرض می‌شود زودکردی با نام E_1 قبل از نقطه i وجود داشته باشد که بعد از ورود بیکاری عمدی، E_{max} به مقدار E_1 کاهش یابد. همچنین فرض می‌شود با افزایش‌دادن بیکاری عمدی تا مقدار ii، مقدار T_{max} افزایش نیافته و E_{max} برابر با E_1 باقی بماند. بنابراین می‌توان رابطه زیر را نتیجه گرفت.

$$E_{max}-E_1\leq id\leq ii \Rightarrow ET'_{max}=E'_{max}+T_{max} \qquad (۳۵)$$

یعنی تابع هدف جدید ثابت می‌ماند.

قضیه ۷ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر در توالی،کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} واقع شود چهار نقطه حدی وجود دارد که هیچ‌گاه بیکاری عمدی نمی‌تواند از کمینه آن مقادیر بیشتر باشد این چهار نقطه عبارتند از:

$$E_{max}-\max E_A,\ \min E_C+T_{max},\ T_{max}-\max T_C,\ E_{max} \qquad (۱۱)$$

اثبات: با درنظرگرفتن بیکاری عمدی تنها به واسطه کاهش E_{max} می‌توان تابع هدف را بهبود داد. این کاهش تا میزان $\max E_A$ ممکن خواهد بود چون بیشترین زودکرد مجموعه A قابل کاهش نبوده و ورود بیکاری عمدی در مجموعه A موجب بهبود تابع هدف نمی‌شود. با توجه به این موضوع هر کدام از چهار حد زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱ـ $id\leq(E_{max}-\max E_A)$: چون اگر $id>(E_{max}-\max E_A)$ باشد E_{max} از خاصیت بزرگترین زودکرد خارج شده و بزرگترین زودکرد در مجموعه A قرار می‌گیرد یعنی $E'_{max}=\max E_A$ و کار دارای E_{max} قبل از کار دارای T_{max} واقع می‌شود که در این شکل با افزایش id نمی‌توان تابع هدف را بیش از این بهبود داد. بنابراین $E_{max}-\max E_A$ یک نقطه حدی است.

۲ـ $id\leq\min E_C+T_{max}$: چون اگر $id>\min E_C+T_{max}$، مقدار T_{max} از خاصیت بزرگترین دیرکرد خارج شده و کوچکترین زودکرد مجموعه C تبدیل به بزرگترین دیرکرد خواهد شد یعنی $T'_{max}=\min E_C$. و کار دارای T_{max} بعد از کار دارای E_{max} قرار می‌گیرد که در این شکل با افزایش id نمی‌توان تابع هدف را بهبود داد. بنابراین $\min E_C+T_{max}$ یک نقطه حدی است.

۳ـ $id\leq T_{max}-\max T_C$: چون اگر$id>T_{max}-\max T_C$ باشد در این‌صورت بزرگترین دیرکرد مجموعه C تبدیل به بزرگترین دیرکرد توالی می‌شود یعنی $T'_{max}=\max T_C$. بنابراین کار دارای T_{max} پس از کار دارای E_{max} قرار می‌گیرد و در این‌صورت افزایش id موجب بهبود تابع هدف نخواهد شد. بنابراین $T_{max}-\max T_C$ یک نقطه حدی است.

۴ـ $id\leq E_{max}$: چون اگر $id>E_{max}$، به این معنی است که بیشتر از مقدار بیشترین زودکرد بیکاری در نظر گرفته شود. تابع هدف بیشتر از مقدار E_{max} بهبود پیدا نکرده و حداکثر بهبود به میزان E_{max} خواهد بود و این حالت در صورتی رخ خواهد داد که تمام زودکردهای توالی تبدیل به صفر شده و هیچ زودکردی وجود نداشته باشد و T_{max} با همان مقدار قبلی ثابت بماند. شاید بتوان بیش از مقدار E_{max} هم بیکاری در نظر گرفت و در این صورت تابع هدف ET_{max} (که در این حالت تبدیل به T_{max} شده است) بدتر نشود ولی به علت عدم بهبود بیشتر از آن صرف‌نظر می‌شود. بنابراین E_{max} یک نقطه حدی است.

از آنجایی که این چهار نقطه حدی، همگی باید رعایت شوند لذا بیکاری عمدی باید کوچکتر یا مساوی کوچکترین مقدار مربوط به این مقادیر باشد یعنی:

$$id\leq\min\{(E_{max}-\max E_A),\ (\min E_C+T_{max}),\ (T_{max}-\max T_C),\ E_{max}\} \qquad (۳۶)$$

قضیه ۸ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر در توالی، کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} واقع شود و بیشینه زودکردها غیر از کار دارای E_{max} قبل از کار دارای T_{max} قرار گیرد میزان id از رابطه زیر به دست می‌آید و محل قرارگیری این مقدار بیکاری بلافاصله قبل از کار دارای E_{max} می‌باشد.

$$id=\min\{(E_{max}-\max E_A), (\min E_C+T_{max}), (T_{max}-\max T_C), E_{max}\} \quad (۱۲)$$

اثبات: در این حالت تنها می‌توان بیکاری را در فاصله میان کارهای دارای E_{max} و T_{max} قرار داد و حداکثر بهبود در تابع هدف در این حالت به اندازه فاصله $E_{max}-\max E_A$ خواهد بود. چون اگر بیکاری عمدی $id=E_{max}-\max E_A$ باشد تابع هدف جدید به صورت رابطه ۳۷ به‌دست می‌آید.

$$ET'_{max}=ET_{max}-id=ET_{max}-(E_{max}-\max E_A) \quad (۳۷)$$

در این حالت با افزایش بیش از این مقدار id، چون کار دارای E_{max} قبل از کار دارای T_{max} قرار خواهد گرفت لذا نمی‌توان تابع هدف را بهبود داد. از طرفی طبق قضیه قبل رابطه ۳۶ به‌صورت زیر نتیجه شد.

$$id\leq\min\{(E_{max}-\max E_A), (\min E_C+T_{max}), (T_{max}-\max T_C), E_{max}\} \quad (۳۶)$$

بنابراین از دو رابطه (۳۶) و (۳۷) نتیجه نهایی به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$id=\min\{(E_{max}-\max E_A), (\min E_C+T_{max}), (T_{max}-\max T_C), E_{max}\} \quad (۳۸)$$

اگر در نقطه‌ای غیر از نقطه بلافاصله قبل از کار دارای E_{max}، این بیکاری قرار بگیرد ممکن است دیرکرد دیگری مانند "T پیدا شود که بعد از محل قرارگیری بیکاری وجود داشته باشد که $T_{max}-T''<E_{max}-\max E_A$ خواهد شد. لذا در این حالت نتیجه می‌شود که علاوه بر قرارگیری بیکاری قبل از کار دارای "T به اندازه id_1 باقیمانده id به اندازه $E_{max}-\max E_A-id_1$ در نقطه بلافاصله قبل از E_{max} قرار گیرد که هیچ دیرکردی در فاصله کارهای دارای T_{max} و E_{max} بعد از آن نقطه (یعنی بلافاصله قبل از کار دارای E_{max}) واقع نیست. بنابراین برای راحتی کار چون تاثیری در بهبود تابع هدف ندارد می‌توان یک نقطه برای قراردادن id انتخاب شده و به جای چندگانه‌کردن بیکاری، از بیکاری یک‌گانه در نقطه بلافاصله قبل از کار دارای E_{max} استفاده کرد.
قضیه ۹) در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر دیرکردی مانند 'T پس از نقطه ورود بیکاری عمدی id (که باید قبل از یک زودکرد، بیکاری اضافه شود) وجود داشته باشد با فرض زودکرد E برای کار بلافاصله بعد از نقطه ورود بیکاری، id یک‌گانه در صورت رعایت چهار نقطه حدی، باید شرط زیر را داشته باشد.

id≤min{(T_{max}-T'), max (0, (E-بیشینه E های قبل از نقطه ورود بیکاری))} (۱۳)

اثبات: اگر دیرکردی مانند 'T وجود داشته باشد که رابطه ۳۹ در آن برقرار باشد:

(۳۹)
(T_{max}-بیشینه E های قبل از نقطه ورود بیکاری))
(T'<max (0, E))

و $id>T_{max}-T'$ باشد می‌توان نتیجه گرفت $T'_{max}>T_{max}$. پس $ET'_{max}>ET_{max}$ و واردشدن id موجب بهبود تابع هدف نمی‌شود بنابراین رابطه ۴۰ نتیجه می‌شود.

$$id \le T_{max} - T' \qquad (۴۰)$$

از طرفی می‌توان در این نقطه مورد فرض تا فاصله (بیشینه E های قبل از نقطه ورود بیکاری-E) در تابع هدف بهبود ایجاد کرد پس:

$$id = \min\{(T_{max} - T'), \max(0, (E - \text{بیشینه E های قبل از نقطه ورود بیکاری}))\} \qquad (۴۱)$$

قضیه ۱۰ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} قرار گیرد و بیشینه زودکردها غیر از کار دارای E_{max} در فاصله بین کار دارای T_{max} و کار دارای E_{max} واقع شد(مجموعه B). id بلافاصله قبل از اولین زودکردی اضافه می‌شود که از $maxE_A$ بزرگتر است.

اثبات: چون اگر بیکاری در نقطه بعد از آن اضافه شود (مثلا در نقطه بلافاصله قبل از فعالیتی با زودکردی به مقدار"E) ممکن است "E>E باشد پس در نقطه بلافاصله قبل از "E می‌توان به اندازه "E-E، بیکاری عمدی به شرط رعایت چهار نقطه حدی وارد کرد و به همین اندازه بهبود در تابع هدف ایجاد کرد.

$$\min\{(maxE_A - E'), (T_{max} - T')\} > \min\{(E - E''), (T_{max} - T')\} \qquad (۴۲)$$

همان‌طور که در رابطه فوق دیده می‌شود، میزان بهبود مجاز در تابع هدف کاهش داده می‌شود. ولی اگر در نقطه بلافاصله قبل نباشد و در نقطه‌های قبل‌تر ورود بیکاری صورت گیرد موجب بهبود بیشتری در تابع هدف نخواهد شد چون اولین زودکرد بزرگتر از $maxE_A$ که باید کاهش یابد مقدار E است. لذا جهت راحت‌شدن کار از قراردادن بیکاری چندگانه پرهیز و در یک نقطه، بیکاری قرار داده می‌شود.

قضیه ۱۱ـ در مساله $n/1/I/ET_{max}$، اگر کار دارای T_{max} قبل از کار دارای E_{max} قرار گیرد و شرایط به‌گونه‌ای بود که می‌توان در فاصله بین کار دارای T_{max} و کار دارای E_{max}، بیکاری اضافه شود و اگر در نقطه مجاز برای اضافه‌کردن بیکاری به بعد، تنها زودکرد وجود داشته باشد، بیکاری اضافه شده باید کوچکتر یا مساوی فاصله کمینه زودکردهای بعد از نقطه ورود بیکاری عمدی و فاصله میان بیشینه زودکردهای پس از این نقطه و بیشینه زودکرد قبل از این نقطه باشد.

اثبات: اگر $id \le (minEi+Tmax)$ نباشد یعنی $id > (minE_i + T_{max})$. در این‌صورت تابع هدف حاصل از ورود بیکاری، $ET'_{max} = ET_{max} - id$ خواهد شد. از طرفی بیشترین دیرکردی که از ورود بیکاری عمدی به‌دست می‌آید مقدار $T'_{max} = T_{max} + (id - (minE_i + T_{max}))$ خواهد بود بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $T'_{max} > T_{max}$ و در نهایت تابع هدف جدید دارای رابطه $ET'_{max} \ge ET_{max}$ خواهد بود. در جایی که همراه با افزایش T_{max}، E_{max} کاهش یابد، اضافه‌کردن بیکاری اثر مثبت یا منفی بر تابع هدف نخواهد داشت. اگر بیشینه زودکردهای پس از نقطه ورود بیکاری عمدی را با $maxE_a$ و بیشینه زودکردهای قبل از نقطه ورود بیکاری عمدی با $maxE_b$ نشان داده شود. مقدار id باید کوچکتر یا مساوی $(maxE_a - maxE_b)$ باشد. چون اگر بیشتر از اندازه $maxE_a - maxE_b$، بیکاری اضافه شود. نمی‌توان E_{max} را از $maxE_b$ بیشتر کاهش داد. بنابراین بیکاری در این نقطه باید کوچکتر یا مساوی کمینه $(maxE_a - maxE_b)$ و کمینه زودکردهای پس از نقطه ورود بیکاری عمدی باشد

مراجع

[1] K.R. Baker, Introduction to sequencing and scheduling, John Wiley, New York, (1974).

[2] T.D. Fry, R.D. Armstrong and H. Lewis, A framework for single machine multiple objectives sequencing research, Omega, Vol. 17, 595-607 (1989).

[3] N.G. Hall and M.E. Posner, Earliness-Tardiness scheduling problems, I: Weighted deviation of completion times about a common due date, Opns. Res., Vol. 39, 836-846 (1991).

[4] N.G. Hall, W. Kubiak and S.P. Sethi, Earliness-Tardiness scheduling problems, II: Deviation of completion times about a restrictive common due date, Opns. Res., Vol. 39, 847-856 (1991).

[5] H.G. Kahlbacher, Scheduling with monotonous earliness and tardiness penalties, Euro. J. Opnl. Res, Vol. 64, 258-277 (1993).

[6] B. Alidaee and D. Rosa, A note on the V-shaped property in one-machine scheduling, J. Pnl. Res. Soc. Vol. 46, 128-132 (1995).

[7] T.D. Fry, R.D. Armstrong and L.D. Rosen, Single machine scheduling to minimize mean absolute lateness, a heuristic solution comp., Opns. Res., Vol. 17, 105-112 (1990).

[8] J.S. Davis and J.J. Kanet, Single machine scheduling with early and tardy completion costs, Naval Research Logistics, Vol. 40, 85-101 (1993).

[9] M.R. Garey, R.E. Tarjan and G.T. Wilfong, One processor scheduling with symmetric earliness and tardiness Penalties, Mathematics of Operations Research, Vol. 13, 330-348 (1998).

[10] C.A. Yano and Y.D. Kim, Algorithms for a class of single machine weighted tardiness and tardiness problems, European Journal of Operational Research, Vol. 52, 167-178 (1991).

[11] W. Szwarc and S.K. Mukhopadhyay, Optimal timing schedules in earliness-tardiness single machine sequencing, Naval Research Logistics, Vol. 42, 1109-1114 (1995).

[12] S.A. Mandal and A.K. Sen., Single machine weighted earliness-tardiness penalty problem with a common due date, Computer and Operations Research, Vol. 28, 649-669 (2001).

[13] Ng Hall, W. Kubiak and SP. Sethi, Earliness-Tardiness scheduling problems II: Weighted deviation of completion times about a restrictive common due date, Operation Research, Vol. 39(5), 847-856 (1991).

[14] CY Lee, SY Danuspatra and C. Lin, Minimizing weighted number of tardy jobs and weighted earliness-tardiness penalties about common due date, Computers and Operations Research, Vol. 18(4), 379-389 (1991).

[15] JA. Ventura and MX. Weng, An improved dynamic programming algorithm for the single machine mean absolute deviation problem with a restrictive common due date, Operations Research Letters, Vol. 17, 149-152 (1995).

[16] A. Hoogveen, H. Oosterhout and V.D. Velde, New lower and upper bounds for scheduling around a small common due date, Operations Research, Vol. 42(1), 102-110 (1994).

[17] W. Szwarc, Single machine scheduling to minimize absolute deviation of completion time from a common due date, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 36(5), 663-673 (1989).

مجید امین‌نیری و قاسم مصلحی، الگوریتم بهینه تعیین توالی عملیات در مساله یک ماشین با زودکرد و دیرکرد، نشریه علمی-پژوهشی استقلال، دانشگاه صنعتی اصفهان، شماره ۱، صص۳۵-۴۸، ۱۳۷۹.

[17] C. Tsiushuang and Q. Xiangtong, Single machine scheduling to minimize weighted earliness subject to maximum tardiness, Computers Opns. Res., Vol. 24, 147-152 (1997).

[18] R. Ahmadi and U. Bagchi, Single machine scheduling to minimize earliness subject to deadlines, Working Paper, Dept. of Management, Univ. of Texas, Austin, Texas, (1985).

[19] R. Ahmadi and U. Bagchi, Just in time scheduling in single machine systems, Working Paper 86/86-4-21, Dept. of Management, Univ. of Texas, (1986).

[20] S. Chand and H. Schneeberger, Single machine scheduling to minimize weighted earliness subject to no tardy jobs, Euro. J. Opnl. Res. Vol. 34, 221-230 (1988).

[21] E. Guner, S. Erol and K. Tani, One machine scheduling to minimize the maximum earliness with minimum number of tardy jobs, International J. of Production Economics, Vol. 55, 213-219 (1998).

[22] P. Chang and L.H. Su, Scheduling N jobs on one machine to minimize the maximum lateness with minimum number of tardy jobs, Computer & Industrial Engineering, Vol. 40, 349-360 (2001).

[23] P.S. Ow and T.E. Morton, The single machine early/tardy problem, Management Science, Vol. 35, No. 2, 177-191 (1989).

[24] Y.D. Kim and C.A. Yano, Minimizing mean tardiness and earliness in single-machine scheduling problems with unequal due dates, Naval Research Logistics, Vol. 41, No. 7, 913-933 (1994).

[25] C.A. Yano and Y.D. Kim, Algorithms for a class of single-machine tardiness and earliness problems, European Journal of Operational Research, Vol. 52, No. 2, 167-178 (1991).

[26] R.J.W. James and J.T. Buchanan, A neighborhood scheme with a compressed solution space for the early/tardy scheduling problem, European Journal of Operational Research, Vol. 102, No. 3, 513-527 (1997).

[27] S.H. Zegordi, K. Itoh and T. Enkawa, A knowledgeable simulated annealing scheme for the early/tardy flow shop scheduling problem, International Journal of Production Research, Vol. 33, No. 5, 1449-1466 (1995).