استفاده از غنی‌سازی ترکیبی در مدل کردن ترک دو بعدی به روش المان محدود توسعه یافته

مجید میرزایی
استادیار

علی پورکمالی انارکی
دانشجوی دکتری

بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنّی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

«روش المان محدود توسعه یافته»[1]، یک روش عددی برای مدل کردن انواع ناپیوستگی‌ها از جمله ترک است که بر مبنای المان محدود استاندارد استوار است و تنها توابع خاصّی بسته به نوع ناپیوستگی به حلّ عددی استاندارد اضافه می‌شوند. برای مدل کردن ترک در مادّهٔ الاستیک خطی، از یک تابع برای ایجاد ناپیوستگی در امتداد طول ترک و از تابع دیگری برای ایجاد شرایط «تکینه»[2] در المان نوک ترک استفاده می‌شود. در نتیجهٔ اعمال توابع، درجهٔ آزادی گره‌های اطراف المان نوک ترک و گره‌های اطراف طول ترک افزایش می‌یابد که به آن غنی‌سازی گره‌ای گفته می‌شود. با این روش، ترک به صورت مجازی و مستقل از مش مدل می‌شود و نیاز به استفاده از مش ریز، المان تکینه در اطراف نوک ترک و ایجاد مش مجدد در بررسی رشد ترک، نخواهد بود. در این مقاله اصول روش المان محدود توسعه یافته توضیح داده می‌شود. یک روش جدید برای «تقسیم‌بندی المانی»[3]، برای غنی‌سازی گره‌ای ارائه می‌شود. در این روش، گره‌های اضافه در محل برخورد ترک با اضلاع المان های ترک خورده، غنی می‌شوند. دیده می‌شود که استفاده از غنی‌سازی گره‌های اضافه، دقّت روش المان محدود توسعه یافته را افزایش می‌دهد. برای مدل کردن ترک های دو بعدی به روش المان محدود توسعه یافته، اصول و روشهای جدید در یک نرم‌افزار تخصّصی استفاده شده است که در این مقاله به آن اشاره می‌شود. نتایج حاصل از نرم‌افزار نوشته شده بر پایهٔ روشهای جدید، برای ترکهایی با هندسهٔ مختلف، در مقایسه با نتایج روابط تحلیلی دقیق، تطبیق خوبی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی

المان محدود توسعه یافته، مدل کردن ترک دو بعدی، غنی سازی گره‌ای، افزایش درجات آزادی

A Combined Node-Enrichment Scheme for Modeling 2D Cracks in Extended Finite Element Method

M. Mirzaei
Professor Assistant

A. Pourkamali Anaraki
PH. D. Student

Department of Mechanical Engineering,
Tarbiat Moddaress University

Abstract

The extended finite element method (X-FEM) is a numerical method for modeling discontinuties, such as cracks, within the standard finite element framework. In X-FEM,

special functions are added to the finite element approximation. For crack modeling in linear elasticity, appropriate functions are used for modeling discontinuties along the crack length and simulating the singularity in the crack tip element. As a result, the degrees of freedom (D.O.F.) for the nodes arround the crack tip and the crack length are increased, the so-called node-enrichment scheme. This virtual crack modeling, which is mesh independent, avoids the usage of refined mesh and singular elements arround the crack tip and does not require remeshing during crack growth simulation. In this paper the priciples of the X-FEM are described. A new method for element partitioning is proposed for the node-enrichment scheme. In this method, additional nodes at the intersections of the crack and the cracked elements are defined and enriched. It is shown that the usage of these nodes will enhance the accuray of the method. The proposed method is verified through the analyses of different standard cracked geometries.

Keywords

Extended Finite Element Method, 2D Crack Modeling, Node Enrichment, Degree Of Freedom Increase

مقدّمه

مدل کردن ناپیوستگی‌ها و به ویژه ترک به علّت ضرورت آن همیشه از نظر طرّاحانی که با دیدگاه مکانیک شکست و تحمل ترک توسط قطعه طرّاحی می‌کرده‌اند از اهمّیّت خاصّی بر خودار بوده است. روش های «المان محدود»[۴] و «المان مرزی»[۵] از سال ۱۹۸۷ به بعد برای مدل کردن ترک به کار گرفته شده‌اند و در هر یک از این دو روش نیز پیشرفت هایی حاصل شده است ولی مشکل مشترک این دو روش، تطبیق ترک با مش‌بندی و تغییر مش در هر مرحله از رشد ترک است. بنابراین برای حل این مشکل Belytscho و همکارانش (۱۹۹۴) روش «بدون المان»[۶] را که در آن فقط گره در محیط مدل درنظر گرفته می‌شد، بنیان گذاری کردند [۲و۱]. استفاده از مفهوم «تفکیک پیوستگی»[۷] که Melenk و Babuska [۳] و Duate و Oden [۴] در سال ۱۹۹۶ ارائه کردند چشم‌انداز جدیدی برای مدل کردن ترک به وجود آورد و در سال ۱۹۹۹، Moes و همکارانش روشی را بر پایهٔ المان محدود که نیاز به مش‌بندی مجدّد نداشت بر اساس مفهوم تفکیک پیوستگی بنیان گذاری کردند [۵]. Dolbow در سال ۱۹۹۹ جزئیّات، مربوط به تعیین گره‌های اطراف ترک و غنی‌سازی آنها را بیان کرد (غنی‌سازی خارجی) و روابط پایه برای اضافه کردن توابع پله‌ای واحد و تکینه را برای مدل های ساده با المان های چهار گره‌ای ارائه کرد [۶]. در سال ۲۰۰۰ Daux و همکارانش با تکمیل روش Moes مبانی روشی به نام المان محدود توسعه یافته را بنا نهادند [۷]. از ویژگی های روش المان محدود توسعه یافته این است که چون معادلات پایهٔ آن براساس روش المان محدود استاندارد استوار است لذا تمام خواص آنرا به همراه خواهد داشت و همچنین امکان استفاده از المان های نسبتاً درشت‌تر و معمولی (غیرتکینه) در اطراف نوک ترک نیز میسّر است[۷].

در این روش برای مدل کردن ترک درون یک المان پیوسته (به صورت مستقل از مش)، با استفاده از مفهوم تفکیک پیوستگی شرایط مرزی ترک را به گره‌ها منتقل کردند. با این کار درجات آزادی گره‌های اطراف ترک به صورت مجازی افزایش می‌یابد که این کار «غنی‌سازی گره‌ای»[۸] نامیده می‌شود. در سال ۲۰۰۰ Dolbow و همکارانش با استفاده از توابع غنی‌ساز مناسب از طریق روابط انرژی (J-Integral) پارامترهای نوک ترک را به دست آوردند [۸]. در سال ۲۰۰۰، Daux و همکارانش ترک های چند شاخه و سوراخها را به روش المان محدود توسعه یافته بررسی کردند[۷]. برای اوّلین بار کاربرد روش المان محدود توسعه یافته در مدل کردن ترک های سه بعدی توسط Sukumar و همکارانش ارائه شد [۹]. در بررسی ترکهای دو بعدی ارائه معیار تشخیص و انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی برایشان اجرا شود کار دشواری بوده است و این مشکل در مدل‌های سه بعدی بیشتر نمود پیدا کرده است از این رو روشی به نام Level Sets در سال ۲۰۰۱ توسط Stolarska و همکارانش در حالت دو بعدی [۱۰] و نیز Sukumar و همکارانش [۱۱] و همچنین روش دیگری در سال ۲۰۰۳ به نام Fast Marching توسط Sukumar و همکارانش در حالت سه بعدی ارائه شده است [۱۲].

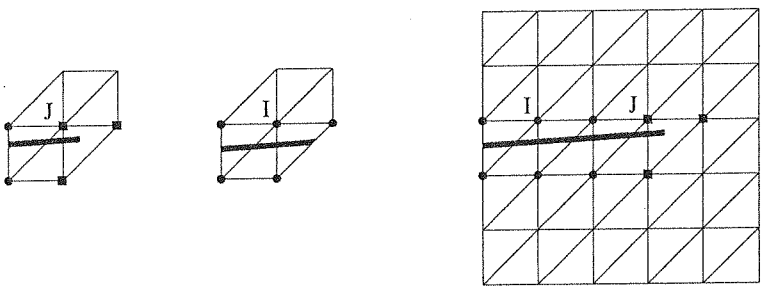
البته در تحقیقاتی که تا به حال صورت گرفته غنی‌سازی فقط برای گره‌های اطراف المان ترک خورده به کار رفته است که

در این مقاله به آن غنی‌سازی خارجی گفته می‌شود. در این مقاله معیار جدیدی برای غنی‌سازی داخلی و افزایش درجات آزادی مربوط به نقاط برخوردترک با اضلاع المان و نیز نوک ترک ارائه می‌شود که بدین وسیله مختصّات نقاط در راستای ترک نیز وارد روابط حاکم بر مدل المان محدود می‌شود که در نتیجه دقّت جواب ها افزایش خواهد یافت. در این مقاله ضمن اشارهٔ مختصر به کارهای تحقیقاتی انجام شده در راستای پیشرفت المان محدود توسعه یافته، اصول پایهٔ این روش تشریح می‌گردد. معیار غنی‌سازی خارجی (غنی‌سازی ساده) و معیار جدید غنی‌سازی داخلی- خارجی توأم که در این مقاله به آن غنی‌سازی ترکیبی اطلاق می‌شود نیز ارائه می‌شود. اصول روش المان محدود توسعه یافته با معیار غنی‌سازی ساده و نیز با معیار جدید غنی‌سازی ترکیبی، توسّط مؤلّفین مقاله در یک نرم‌افزار تخصصی به نام MEXFEM2D به کار گرفته شده است. این نرم‌افزار به زبان Visual - Fortran 6.5 برای بررسی انواع حالت های ترک‌دوبعدی در مدل هایی با المان های مثلثی، توسط مؤلّفین نوشته شده است.

۲ـ مدل کردن ترک دو بعدی به روش المان محدود توسعه یافته

در روش المان محدود استاندارد به هر گره از المان «تابع شکل»[۹] نسبت داده می‌شود و در حالت دو بعدی هر گره ۲ درجه آزادی دارد که ترکیب خطّی حاصلضرب تابع شکل هر نقطه داخل المان در تغییر مکان های گره‌ای می‌تواند تغییر مکان نقاط داخل المان را مشخّص کند.در المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل المان محدود استاندارد استفاده می‌شود [۵] و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند (غنی‌سازی) که این کار بر اساس مفهوم تفکیک پیوستگی[۳] صورت می گیرد؛ یعنی، با اعمال توابع خاص درجات آزادی که به واسطه ناپیوستگی در محل ترک درون المان بوجود می‌آید به نقاط گره‌ای اطراف آن المان اختصاص پیدا می‌کند (غنی‌سازی خارجی).

برای تعیین نوع تابع مناسب برای غنی‌سازی، محل برخورد ترک با اضلاع المان ها مشخص می‌شود اگر ترک در دو ناحیه اضلاع یک المان را ببرد از تابع پله‌ای واحد جهت غنی‌سازی گره‌های اطراف آن المان استفاده خواهد شد و اگر ترک تنها یکی از اضلاع المان را قطع کند یا به عبارت دیگر نوک ترک داخل المان باشد برای گره‌های اطراف آن المان غنی‌سازی به روش تابع تکینه انجام خواهد شد. البته چون هر گره بین چند المان مشترک است در مجموعهٔ المانی اطراف آن گره انواع موقعیت نسبی بین ترک و المان بوجود می‌آید که برای غنی‌سازی خارجی گره مورد نظر از توابع مراتب بالاتر استفاده می‌شود [۶] . برای مثال مطابق شکل (۱- الف) گره‌های اطراف ترک که با دایرهٔ توپر مشخص شده‌اند از طریق تابع پله‌ای واحد غنی می‌شوند و سه گره اطراف نوک ترک که با مربع توپر مشخص شده است با تابع تکینه غنی می شوند. در شکل (۱- ب) مجموعهٔ المانی مرتبط با گره I ترسیم شده که سه المان بالا توسط ترک بریده نمی‌شود و سه المان پایین در دو نقطه برش می‌خورد برای این، غنی‌سازی با تابع پلّه‌ای واحد برای I در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۱- ج) مجموعهٔ المانی مرتبط با گره J مشخّص شده است، سه المان بالا توسّط ترک قطع نشده، دو المان پایین از سمت چپ در دو نقطه بریده شده و آخرین المان فقط در یک نقطه برش خورده، بنابراین برای گره J غنی‌سازی از طریق تابع تکینه صورت می گیرد.



شکل ۱- ج　　شکل ۱- ب　　شکل ۱- الف

شکل (۱): نمایش گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی خارجی برای افزایش درجات آزادی دارند.

برای غنی‌سازی با تابع پله‌ای واحد از یک تابع دو مقداری H به صورت زیر استفاده می‌شود [۵].

$$H=\begin{cases}+1 & ; \quad \text{اگر} \quad y>0\\ -1 & ; \quad \text{اگر} \quad y<0\end{cases} \qquad (1)$$

برای استفاده از تابع فوق محور Xها را به صورت محلّی بر امتداد ترک قرار می دهیم به گونه‌ای که جهت مثبت آن به سمت نوک ترک باشد در این شرایط نقاط بالای محور Xها ($y>0$) دارای H برابر ۱+ و در غیر این صورت برابر ۱- می‌شود.

غنی‌سازی خارجی در گره‌های اطراف نوک ترک با تابع تکینه اجرا می شود تا بهترین تطبیق را با شرایط واقعی جا به جایی‌های اطراف نوک ترک پیدا کند. عبارتی که ایجاد حالت تکینه در نقاط اطراف ترک می‌کند $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$ است که r,θ مختصّات قطبی نقاط اطراف نوک ترک در دستگاه مختصّات قطبی واقع در نوک ترک است. البته برای افزایش دقّت جواب ها عبارات دیگری نیز به عبارت مربوط به تکینه‌سازی اضافه می‌شود که این عبارات از رابطهٔ بین جابه جایی های نقاط اطراف نوک ترک برحسب موقعیّت آن نقاط و «ضرایب شدّت تنش»[10] در نوک ترک به دست می‌آیند که در نهایت تابع‌چهار جمله‌ای به صورت زیر برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۳].

$$\left[\phi_\alpha,\alpha=1,4\right]=\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right] \qquad (2)$$

براساس معیار غنی‌سازی خارجی اگر ترک از گره‌ای عبور کند امکان تعریف H برای آن به وجود نمی‌آید و همچنین اگر امتداد ترک از یکی از گره‌های المان حاوی نوک ترک عبور کند به علّت اینکه θ آن گره صفر می‌شود عبارت $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$ که ایجاد حالت تکینه می‌کند صفر می‌شود و در نتیجه در جوابها خطا ایجاد می‌شود. اما در معیار غنی‌سازی ترکیبی این مشکل برطرف شده است.

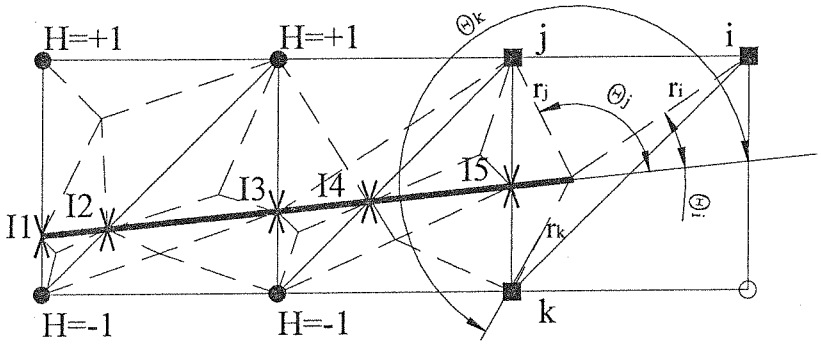
در شکل ۲ تقسیم‌بندی المانی المان‌های ترک خورده و المان نوک ترک نیز مشاهده می‌شود که به واسطه این تقسیم‌بندی تعدادی المان مثلثی جدید در دو سمت ترک ایجاد می‌شود که برای به دست آوردن ماتریس سفتی کل المان مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطابق شکل ۲ دو گره بالای ترک با $H=+1$ و دو گره پایین ترک با $H=-1$ غنی می‌شوند و گره i از المانی که نوک ترک درون آن واقع است توسط تابع ϕ و مختصات (r_i,θ_i) غنی می‌شود و گره‌های j و k به ترتیب با (r_j,θ_j) و (r_k,θ_k) درجات آزادی‌شان افزایش پیدا می‌کند.

برای مدل کردن ترک به روش غنی‌سازی ترکیبی افزون بر استفاده از معیار غنی‌سازی برای افزایش درجات آزادی گره‌های المان‌های ترک خورده (غنی‌سازی خارجی) که در بالا گفته شد، معیار جدید غنی‌سازی برای افزایش درجات آزادی نقاط برخورد ترک با اضلاع المان و نقاط میانی آنها و نیز نوک ترک و نقطه برخورد فرضی ترک با المان حاوی نوک ترک نیز به کار گرفته می‌شود و برای این، تقسیم بندی المانی نیز به شکل جدیدی خواهد بود.

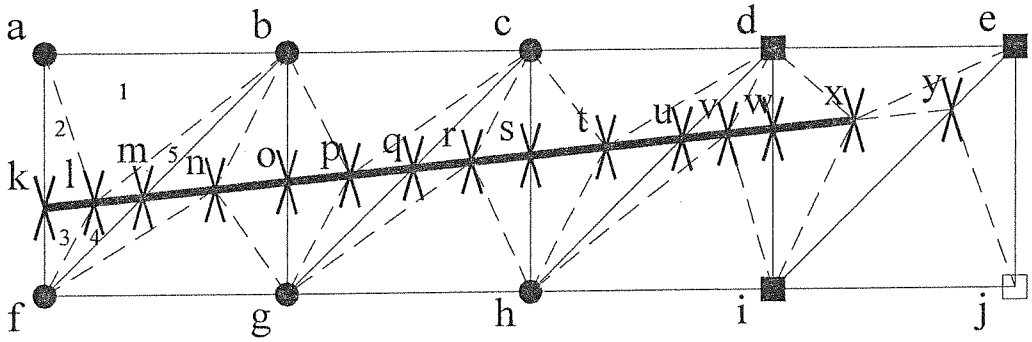
پس از یافتن نقاط برخورد، مطابق شکل ۳ المان هایی که در دو نقطه توسط ترک برش خورده‌اند به پنج المان جدید تقسیم می‌شوند که بدین منظور نقطهٔ وسط دو نقطهٔ برخورد نیز درایجاد المان های جدید دارای نقش می‌شوند (نقاط l، n، t، r، p).

از مزیّتهای این روش نسبت به روش تقسیم‌بندی المانی مطابق شکل ۲ این است که تعداد نقاط در راستای طول ترک زیاد می‌شود و در نتیجه با دقّت بیشتری می‌توان جابه جایی های نقاط یا گره‌های جدید در راستای طول ترک را به دست آورد و در نتیجه دقّت در محاسبهٔ ضرایب شدّت تنش، افزایش می‌یابد. المان حاوی نوک ترک نیز به پنج المان جدید تقسیم می‌شود که برای ایجاد المان های جدید علاوه بر یک نقطهٔ برخورد واقعی (نقطهٔ w) و نوک ترک (نقطه x) نقطهٔ فرضی برخورد امتداد ترک با یکی از مرزهای المان نیز در تقسیم‌بندی دخالت می‌کند (نقطهٔ y) [۱۵].

در غنی‌سازی ترکیبی مطابق شکل ۳ برای ایجاد ناپیوستگی در محلّ ترک برای نقاط برخورد ترک با اضلاع المان و نقاط میانی و نیز نقطهٔ نوک ترک و نقطهٔ فرضی، غنی‌سازی مناسب در نظر گرفته می‌شود (غنی‌سازی داخلی). نقاط جدیدی که روی اضلاع المان حاوی نوک ترک است (w,y) با تابع تکینه غنی می‌شوند که بدین منظور باید θ, r مربوط به آن نقاط بدست آورده شود. r فاصلهٔ نقاط تا نوک ترک است و θ برای w و y به ترتیب 180° و 0° می‌باشد. برای سایر نقاط موجود در امتداد ترک و نیز نوک ترک $(x,v,u,t,s,r,q,p,o,n,m,l,k)$ غنی‌سازی با تابع پله‌ای واحد انجام می‌شود.



شکل (۲): پارامترهای مربوط به غنی‌سازی خارجی گره‌های اطراف ترک و اطراف نوک ترک و تقسیم بندی المانی مناسب آن.



شکل (۳): نمایش نقاط در راستای ترک جهت غنی‌سازی داخلی و تقسیم‌بندی المانی المان های ترک خورده با توجّه به روش غنی‌سازی ترکیبی.

در غنی‌سازی ترکیبی، برای ایجاد پرش و ناپیوستگی در محلّ ترک، طبق معیار زیر دو مقدار ۱+ و ۱- به عنوان H برای نقاط جدید در امتداد ترک در نظر گرفته می‌شود، بدیهی است که معیار غنی‌سازی خارجی برای تعیین H برای این نقاط به کار نمی‌آید زیرا ترک دقیقاً از آنها عبور می‌کند. اگر گره جدید درون المان تقسیم شده‌ای باشد که آن المان دارای حداقل یک گره با H برابر ۱+ باشد H آن نیز ۱+ می‌شود و به طور مشابه اگر گره جدید درون المان تقسیم شده‌ای باشد که آن المان دارای حداقل یک گره باH برابر ۱- باشد H آن نیز ۱- می‌شود. برای مثال مطابق شکل ۳ مقدارH برای گره جدید k در المان ۲ برابر ۱+ و برای المان ۳ برابر ۱- است. برای l نیز در المان‌های ۱، ۲ و ۵ مقدار H برابر ۱+ و در المان‌های ۴ و ۳ برابر ۱- می‌باشد. به واسطهٔ دو مقداری بودن H برای نقاط جدید دقیقاً در محل ترک جدایی سطوح ترک و فاصله بین آنها به وجود می‌آید که به طور مستقیم می‌توان مقدار باز شدن ترک در نقاط مختلف امتداد ترک را مشخّص کرد که در قسمت پایانی با استفاده از این ویژگی با دقّت بیشتری ضرایب شدّت تنش محاسبه می‌شوند [۱۵].

۳ ـ روابط حاکم بر غنی‌سازی گره‌ها

پس از تعیین گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی دارند و مشخّص نمودن نوع تابع مناسب برای غنی‌سازی آنها، باید با استفاده از مفهوم تفکیک پیوستگی و اعمال تابع مناسب، ایجاد ناپیوستگی مجازی در محل ترک نمود. این کار با روابط زیر انجام می‌شود [۳].

$$v = \sum_{i=1}^{N} N_i \left(\sum_{j=1}^{M} \psi_j a_j \right) \qquad (۳)$$

$$u = \sum_{i=1}^{N} N_i \left(\sum_{j=1}^{M} \psi_j c_j \right) \qquad (۴)$$

در روابط فوق v و u جابه جایی های گره به ترتیب در راستای y و x و N_i تابع شکل در روش المان محدود استاندارد، $\psi(J)$ توابع غنی‌ساز و c_j, a_j ضرایب مجهول مرتبط با توابع غنی‌ساز به ترتیب در جهات y و x است که در نهایت با این روابط، ضرایب مجهول c_j, a_j به درجات آزادی گره‌های اطراف ترک اضافه می‌شوند. با توجه به دو نوع تابع غنی‌ساز مشخّص شده در قسمت قبل، روابط (۳) و (۴) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$v = \sum_{i=1}^{N} N_i \left[\underbrace{v_i}_{i \varepsilon N} + \underbrace{Ha_i}_{i \varepsilon P} + \sum_{\alpha=1}^{4} \underbrace{\phi_\alpha \; b_{\alpha i}}_{i \varepsilon Q} \right] \qquad (۵)$$

$$u = \sum_{i=1}^{N} N_i \left[\underbrace{u_i}_{i \varepsilon N} + \underbrace{Hc_i}_{i \varepsilon P} + \sum_{\alpha=1}^{4} \underbrace{\phi_\alpha \; d_{\alpha i}}_{i \varepsilon Q} \right] \qquad (۶)$$

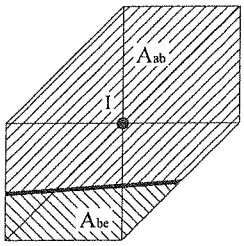
در روابط فوق u_I, v_I جابه‌جایی گره I ام به ترتیب در راستای x , y مربوط به حل المان محدود استاندارد است که همهٔ گره‌ها را شامل می‌شود (مجموعهٔ N). c_i, a_i ضرایب مجهول مربوط به درجات آزادی افزایش یافته مرتبط با تابع غنی‌ساز پله‌ای واحد به ترتیب در جهات x , y است که در غنی‌سازی ساده فقط برای گره‌های اطراف المان های کاملاً بریده شده توسط ترک و در غنی‌سازی ترکیبی علاوه بر آنها برای گره‌های جدید مشخص شده در امتداد ترک نیز به کار گرفته می‌شوند (مجموعهٔ گره‌های P). $b_{\alpha i}$, $d_{\alpha i}$ ضرایب مجهول نظیر افزایش درجات آزادی مرتبط با تابع غنی‌کنندهٔ تکین به ترتیب در جهات x, y می‌باشد که فقط برای سه گره اطراف المانی که نوک ترک در آن واقع است (در غنی‌سازی ساده) و نیز در روش غنی‌سازی ترکیبی علاوه بر آنها برای دو گره جدید روی مرز المان حاوی نوک ترک (مجموعهٔ Q) به کار گرفته می‌شود.

برای قرار گرفتن گره در مجموعهٔ P علاوه بر شرایطی که تا به حال ارائه شده است، شرط دیگری نیز باید برقرار باشد. وقتی ترک، المانی را در دو ناحیه قطع کند و برای گره اطراف آن شرایط غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد ایجاد شود، مجموعهٔ المانی اطراف آن گره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. اگر اندازهٔ سطح در یک سمت ترک A_{ab} و در سمت‌دیگر ترک A_{be} و سطح کلّ مجموعهٔ المانی آن گره A باشد، نسبت های زیر طبق شکل ۴ قابل‌تعریف است.

$$r_{ab} = \frac{A_{ab}}{A} \quad , \quad r_{be} = \frac{A_{be}}{A} \qquad (۷)$$

اگر هر یک از نسبت های r_{ab} یا r_{be} کوچکتر از 10^{-4} باشد، گره I ام مربوط به آن مجموعهٔ المانی از مجموعهٔ گره‌های P حذف می‌شود [۶].

مطابق شکلهای ۲ و ۳ پس از تقسیم‌بندی المان ها می‌توان سطح هر یک از المان‌های مثلثی حاصله را به دست آورد و با توجه به رابطـهٔ (۷) مقدار r_{ab} در r_{be} را محاسبه کرد و معیار غنی‌سازی خارجی گره‌های اطراف المان‌ها را بررسی نمود.



شکل (٤) تقسیم سطح مجموعهٔ المانی مربوط به گره I ام به دو سطح نسبت به موقعیت ترک.

٤ ـ استخراج رابطهٔ سفتی برای انواع المان

«انرژی پتانسیل کل»[11] (Π) در حالت الاستیک از طریق جمع «انرژی کرنشی کـل»[12] سـازه (U) و «پتانـسیل کـار»[13] حاصل از نیروهای خارجی (متمرکز، سطحی و حجمی) به دست می‌آید [۱۴].

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_v \sigma^T \varepsilon dv - \int_v u^T f dv - \int_s u^T T ds - \sum_i u_i^T P_i \qquad (۸)$$

در رابطهٔ فوق σ تنش، ε کرنش، u جابه‌جایی، f نیروهای حجمی، T نیروهای سطحی و P_i نیروهای متمرکـز اسـت. در المان محدود استاندارد که حجم، توسط تعدادی المان مدل می‌شود رابطهٔ انرژی پتانسیل کل بر حـسب مشخّـصات المـان بـه صورت زیر ارائه می‌شود [۱۴]:

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2}\int_e \varepsilon^T D\varepsilon t dA - \sum_e \int_e u^T f t dA - \int_L u^T T t dL - \sum_i u_i^T P_i \qquad (۹)$$

$$\Pi = \sum_e U^e - \sum_e (f^e + T^e + P^e) \qquad (۱۰)$$

در رابطهٔ (۹)، D ماتریس تنش ـ کرنش مادّه است که متقارن است و در حالت دو بعدی بـا توجـه بـه نـوع تحلیـل «تـنش صفحه‌ای»[14] و یا «کرنش صفحه‌ای»[15] مشخص می‌شود و t ضخامت المان است. در المان محـدود اسـتاندارد بـا رابطـهٔ انـرژی کرنشی المان می‌توان ماتریس سفتی المان را به دست آورد که به صورت زیر است [۱۴].

$$K_e = t_e A_e [B]^T [D][B] \qquad (۱۱)$$

در رابطهٔ فوق، t_e ضخامت، A_e مساحت و [B] «ماتریس کرنش-جابه‌جایی»[16] المان است. مساحت هر المـان بـا دترمینـان ماتریس ژاکوبین انتقال مختصّات (از مختصات عمومی به مختصات ایزو پارامتریک) به صورت زیر ارتباط دارد. [۱۴]

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

$$A_e = \frac{1}{2}|\det J| \qquad (۱۳)$$

اگر گره‌های هر المان در جهت عکس عقربه‌های ساعت با k, j, i مشخّص شوند $det\ J$ به صورت زیر تعریف می‌شـــــود [۱۴].

$$\det\ J = x_{ik}\, y_{jk} - x_{jk}\, y_{ik} \qquad (۱۴)$$

$$y_{jk} = y_j - y_k \quad , \quad x_{kj} = x_k - x_j \qquad (۱۵)$$

ماتریس $[B]$ از طریق جاگذاری روابط ۵ و ۶ درون رابطه کرنش بر حسب جابـه‌جـایـی (رابطـهٔ ۱۶) و اسـتفاده از مـاتریس ژاکوبین انتقال و معکوس آن به دست می‌آید [۱۴].

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} , \quad [\varepsilon] = [B]\ \ [q] \qquad (۱۶)$$

$[\varepsilon]$ کرنش در هر المان و $[q]$ جابه‌جایی های مربوط به درجات آزادی متناظر گره‌های اطراف هـر المـان اسـت. در المـان محدود توسعه یافته نیز پس از تقسیم‌بندی المان های ترک خورده المان های مثلّثی پیوسته در دو طرف ترک ایجاد مـی‌شـود لذا می‌توان به صورت مستقیم از رابطهٔ (۱۱) برای یافتن ماتریس سفتی هر المان استفاده کرد، فقـط بایـد بـا توجـه بـه معیـار غنی‌سازی خارجی یا ترکیبی ارائه شده در قسمت قبل، تأثیر درجات آزادی افزوده شده به هر گره در ابعاد ماتریس $[B]$ در نظر گرفته شود. لذا ابعاد ماتریس [B] نیز تفاوت می‌کند و برای هر نوع گره باید سهم مناسبی در ماتریس $[B]$ در نظر گرفته شود.

اگرگره i نیاز به غنی‌سازی نداشته باشد در حالت دو بعدی ۲ درجهٔ آزادی خواهد داشت و سهم آن در مـاتریس بـه صـورت زیر خواهد بود [۱۵]:

$$B_i = \frac{1}{det\ J} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 \\ 0 & x_{kj} \\ x_{kj} & y_{jk} \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

اگرگره i نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد داشته باشد در حالت دو بعدی ۴ درجهٔ آزادی خواهـد داشـت و سـهم آن در ماتریس [B] به صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$B_i = \frac{1}{\det\ J} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{jk} H_i & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{kj} H_i \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{kj} H_i & y_{jk} H_i \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

اگرگره i نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع تکین داشته باشد در حالت دو بعدی ۱۰ درجهٔ آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس [B] به صورت زیرخواهد بود [۱۵].

$$a_i = \sqrt{r_i}\sin\frac{\theta_i}{2} \quad , \quad b_i = \sqrt{r_i}\cos\frac{\theta_i}{2} \quad , \quad c_i = \sqrt{r_i}\sin\theta_i\sin\frac{\theta_i}{2} \quad , \quad d_i = \sqrt{r_i}\sin\theta_i\cos\frac{\theta_i}{2} \qquad (۱۹)$$

$$B_i = \frac{1}{\det J}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{jk}a_i & y_{jk}b_i & y_{jk}c_i & y_{jk}d_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{kj}a_i & x_{kj}b_i & x_{kj}c_i & x_{kj}d_i \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{kj}a_i & x_{kj}b_i & x_{kj}c_i & x_{kj}d_i & y_{jk}a_i & y_{jk}b_i & y_{jk}c_i & y_{jk}d_i \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

بنابراین سهم هر سه نوع کلّی گره به طور جداگانه در روش المان محدود توسعه یافته، درون ماتریس [B] به دست آورده شد (روابط ۱۷، ۱۸، ۱۹و۲۰) که با توجه به نوع گره‌های اطراف، روی مرز یا داخل هر المان می‌توان ماتریس کلی [B] را برای آن المان به دست آورد. البته این امکان وجود دارد که گره‌های اطراف هر المان با توجه به موقعیّت نسبی آن المان و ترک از نوع های مختلف باشد ولی چون تعداد سطرهای ماتریس [B] متناظر با آنها همواره یکسان است برای این به راحتی می‌توان ماتریس کلی [B] مربوط به هر المان را به دست آورد که ابعاد آن در غنی‌سازی خارجی می‌تواند از [۳×۶] تا [۳×۳۰] و در غنی‌سازی ترکیبی از [۳×۶] تا [۳×۵۴] متغیر باشد. سپس با رابطهٔ ۱۱ ماتریس سفتی مربوط به آن المان مشخص می‌شود که در ماتریس سفتی کلّ مدل مونتاژ می‌شود. در روش غنی‌سازی خارجی مختصات و درجات آزادی نقاط برخورد ترک با اضلاع المان $(I2,I1,...)$ در ماتریس [B] و در نتیجه در ماتریس سفتی کل المان وارد نمی‌شود و تنها درجات آزادی اضافهٔ منتسب به گره‌های اطراف المان امکان جابه جایی های بیشتر گره‌ای در اثر ترک را فراهم می‌کند ولی در روش غنی‌سازی ترکیبی علاوه بر درجات آزادی اضافهٔ گره‌های اطراف ترک، مختصّات و درجات آزادی گره‌های داخل المانی که در اثر برخورد ترک با المان به وجود آمده‌اند نیز در ماتریس سفتی وارد می‌شوند. از جمع ماتریس سفتی تک تک المان‌های داخل المان ترک خورده که پس از «تقسیم بندی المانی» به دست آمده‌اند می‌توان ماتریس سفتی کل المان ترک خورده را به دست آورد. جمع ماتریس‌های سفتی درون المانی مشابه روش مونتاژ ماتریس‌های سفتی هر المان در ماتریس سفتی کل است که در نهایت در روش غنی‌سازی خارجی تنها سطرها و ستون‌های مربوط به درجات آزادی گره‌های داخلی $(I2,I1,...)$ از ماتریس سفتی کل المان ترک خورده حذف می‌شود ولی در روش غنی‌سازی ترکیبی سطرها وستونهای مربوط به درجات آزادی گره‌های داخلی حذف نمی‌شوند[۱۵].

$$K_e = \sum_S K_S \qquad (۲۱)$$

بدیهی است ابعاد ماتریس سفتی المان که وابسته به ابعاد ماتریس [B] است از [۶×۶] تا [۳۰×۳۰] برای روش غنی‌سازی خارجی و از [۶×۶] تا [۵۴×۵۴] برای روش غنی‌سازی ترکیبی می‌تواند متفاوت باشد اما از لحاظ ریاضی به راحتی قابل اثبات است که همواره ماتریس سفتی برای هر نوع المان متقارن خواهد بود که در نتیجه ماتریس سفتی کل سازه نیز متقارن می‌شود [۱۵].

۵ ـ اعمال روش المان محدود توسعه یافته در برنامهٔ کامپیوتر

اصول روش المان محدود توسعه یافته به روش غنی‌سازی خارجی و غنی‌سازی ترکیبی در قسمت‌های قبل ارائه شد. در این قسمت چگونگی اعمال آن اصول در قالب یک نرم‌افزار المان محدود توسعه یافته به نام MEXFEM2D برای تحلیل سازه‌های ترک‌دار دو بعدی توضیح داده می‌شود. این نرم‌افزار به زبان Visual - Fortran 6.5 برای تحلیل مدل‌هایی با المان‌های مثلثی خطّی ارائه شده است. قسمتهای اصلی این برنامه به صورت زیر است:

الف ـ مرحلهٔ « پیش از تحلیل[17]»

۱ـ ورود اطّلاعات به برنامه

۲ ـ تشخیص موقعیّت نسبی ترک و المان‌ها

۳ ـ تعیین ماتریس سفتی هر المان و مونتاژ آن در ماتریس سفتی کلّ سازه

ب ـ مرحلهٔ «تحلیل[18]»

۱ـ حل دستگاه معادلات حاصله و تعیین مجهولات گره‌ای

ج ـ مرحلهٔ «پس از تحلیل[19]»

۱ـ محاسبهٔ کمیّتهای مورد نیاز برای تعیین پارامترهای نوک ترک

در ادامه هر یک از بخشهای فوق مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

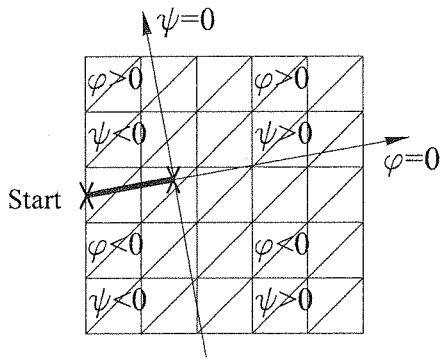
۱-۵ـ ورود اطلاعات به برنامه

در این قسمت فایل ورودی که با روش خاصّی تهیه شده است به برنامه معرفی می‌شود و برنامه با توجه به ویژگی ساختاری آن فایل، اطلاعاتی از قبیل هندسهٔ مدل، تعداد گره، تعداد المان، مختصّات گره، شمارهٔ هر المان، شمارهٔ محلّی و عمومی گره‌ها، شرایط مرزی و بارگذاری را به دست می‌آورد. همچنین مشخّصات ترک به دو روش در برنامه قابل تعریف است. روش اوّل ارائه مختصّات نقطهٔ شروع و پایان ترک است و روش دوم مشخّص کردن نقطهٔ شروع، طول و زاویهٔ ترک نسبت به محور x+ می‌باشد. برای مشخص کردن ترک‌ها در وسط مدل و نیز مدل کردن ترک‌هایی با فرم منحنی و نیز امکان تعریف ترک‌هایی در چند ناحیه، این قابلیّت در نرم افزار ایجاد شده که بتوان چند ترک را به صورت ورودی در برنامه معرفی کرد.

۲-۵ـ تشخیص موقعیت نسبی ترک و المان‌ها

برای تشخیص موقعیت نسبی ترک و المان‌ها و متعاقب آن تعیین نوع غنی‌سازی مناسب برای آن‌ها از روش‌های Level Sets در مرجع [۱۰] و Fast Marching در مرجع [۱۲] استفاده شده است. در این بخش از برنامه مشخص می‌شود که آیا ترک به صورت کامل المانی را بریده، یا اینکه نوک ترک در داخل المان است و یا کلاً ترک دور از المان است و بر مبنای آن، نوع غنی‌سازی مناسب برای گره‌های اطراف و یا داخل آن المان تشخیص داده می‌شود و درجات آزادی گره‌ها افزایش می‌یابد. در این مقاله از روش جدید دستگاه مختصّات متعامد محلّی نوک ترک $(\phi - \psi)$ استفاده می‌شود [۱۵]. در این روش مطابق شکل ۵ محور $\phi = 0$ را در راستای ترک و به سمت خارج از آن و محور $\psi = 0$ عمود بر ϕ به صورت راستگرد تعریف می‌شود.

تمام گره‌های بالای محور $\phi = 0$ ، دارای $\phi > 0$ و گره‌های پایین محور، $\phi < 0$ دارند. همچنین گره‌های سمت چپ $\psi = 0$، دارای $\psi < 0$ و گره‌های سمت راست، دارای $\psi > 0$ می‌باشند. با توجّه به علامت ϕ و ψ در گره‌های اطراف هر المان می‌توان تشخیص داد که آیا ترک از المان فاصله دارد یا اینکه کاملاً آنرا برش داده و یا نوک ترک درون آن واقع است. برای هر گره در محدودهٔ اطراف نوک ترک ϕ و ψ محاسبه می‌شود و سپس در هر المان مقدار بیشترین و کمترین مقدار ϕ و ψ تعیین می‌شود.



شکل (۵) دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک $(\phi - \psi)$.

اگر در المانی حاصلضرب $\phi_{min}.\phi_{max} \geq 0$ ترک آن المان را قطع نمی‌کند و اگر حاصلضرب $\phi_{min}.\phi_{max} < 0$ باشد، احتمالاً ترک با المان برخورد می‌کند. جهت تعیین وضعیت به علامت ψ توجه می‌شود. اگر در آن المان ψ_{max} و $\psi_{min} \leq 0$ باشد ترک در دو نقطه المان را قطع می‌کند و در نتیجه غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد، برای افزایش درجات آزادی گره‌های اطراف المان در غنی‌سازی ساده و گره‌های اطراف، رو و داخل المان و نیز نوک ترک در غنی‌سازی ترکیبی لازم خواهد بود و درجات آزادی از ۲ به ۴ افزایش می‌یابد و اگر ψ_{max} و $\psi_{min} \geq 0$ باشد ترک با المان برخوردی نخواهد داشت و اگر حاصلضرب $\psi_{min}.\psi_{max} < 0$ باشد، نوک ترک احتمالاً درون آن المان قرار گرفته است. شاید دو یا چند المان به طور همزمان شرط آخر را عمل کنند که در چنین شرایطی برای تشخیص دقیق موقعیّت نوک ترک، پس از شناسایی گره‌های مشترک در المان‌های مشخّص شده، موقعیّت گره سوم هر المان را با نوک ترک در دستگاه مختصّات جدیدی که یکی از محورهای آن روی خط واصل بین گره‌های مشترک آن المان‌ها واقع شده، مقایسه می‌کنیم و نتیجه‌گیری قطعی صورت می‌پذیرد و در نهایت تنها یک المان که نوک ترک درون آن قرار دارد مشخص می‌شود که گره‌های اطراف آن المان در غنی‌سازی ساده و گره‌های اطراف و روی آن در غنی‌سازی ترکیبی توسط تابع تکین غنی می‌شود و درجات آزادی آنها از ۲ به ۱۰ افزایش می‌یابد [۱۵].

با توجه به معیار فوق گره‌های مشترک بین چند المان ممکن است از نظر هر المان درجات آزادی متفاوتی کسب کند، در این موارد با توجّه به اصول روش المان محدود توسعه یافته، بیشترین‌تعداد درجات‌آزادی برای آن گره در نظرگرفته می‌شود[۶].

در این قسمت، تقسیم‌بندی المانی (متناسب با معیار مورد استفاده) در سطوح دو طرف ترک در المان‌های کاملاً بریده شده (متقاطع در دو نقطه) انجام می‌شود و با استفاده از رابطهٔ (۱۳) سطح مثلث‌های به وجود آمده محاسبه و سپس با رابطهٔ (۷) و معیار ارائه شده برای نسبت سطوح مجموعهٔ المانی گره در مرجع [۶] ، نسبت به غنی‌سازی گره مورد نظر یا عدم غنی‌سازی تصمیم‌گیری می‌شود.

پس از تشخیص وضعیّت گره‌ها و افزایش تعداد درجات آزادی آنها پارامترهای لازم، با توجه به روش مناسب برای غنی‌سازی آنها مشخّص می‌شود. در غنی‌سازی خارجی برای گره‌های خارجی با ۴ درجهٔ آزادی اگر مقدار $\phi > 0$ باشد مقدار H برابر ۱+ و در غیراینصورت ۱- خواهد بود و در غنی‌سازی داخلی برای نقاط برخورد ترک با المان‌های به طور کامل برش خورده و نقاط میانی آنها با توجه به موقعیت نسبی قرارگیری نقاط هر دو مقدار ۱+ و ۱- اختصاص پیدا می‌کند و برای بقیهٔ گره‌ها H صفر می‌شود. با بدست آوردن مقدار H در گره‌ها می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۱۸) غنی‌سازی مناسب برای گره‌های ۴ درجهٔ آزادی را انجام داد. برای گره‌های ۱۰ درجهٔ آزادی (۳ گره در روش غنی‌سازی خارجی و ۵ گره در روش غنی‌سازی ترکیبی) نیز مطابق شکلهای ۲ و ۳ فاصله تا نوک ترک (r) و زاویه با امتداد ترک (θ) تعیین می‌شود و از طریق روابط (۱۹ و ۲۰) غنی‌سازی مطلوب برای این گره‌ها انجام می‌شود. شایان ذکر است که مقدار r و θ برای گره‌هایی که المان آنها حامل نوک ترک نیست برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. در پایان این قسمت تعداد درجات آزادی گره‌ها و پارامترهای مورد نیاز برای غنی‌سازی آنها مشخص می‌شود.

۳-۵- تعیین ماتریس سفتی هر المان و مونتاژ آن در ماتریس سفتی عمومی

در این بخش با توجه به تعداد درجات آزادی گره‌ها و پارامترهای به دست آمده از قسمت قبل ماتریس [B] از طریق روابط ۱۷ یا ۱۸ و یا ۱۹ و ۲۰ به دست آورده می‌شود و سپس از طریق رابطهٔ ۱۱ و در صورت نیاز مونتاژ اولیّه برای المان‌های تقسیم شده، ماتریس سفتی هر المان مشخص می‌شود. پس از آن جهت مونتاژ این ماتریس در ماتریس سفتی عمومی ارتباطی بین شماره درجهٔ آزادی محلی هر گره از المان و شمارهٔ درجهٔ آزادی عمومی همان گره از المان برقرار می‌شود.

البته برای برنامه‌نویسی بهتر، در این قسمت براساس روابط ۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۰ یک ماتریس کلی برای [B] ارائه شده است که در این ماتریس تمام پارامترهای مربوط به غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد و غنی‌سازی از طریق تابع تکین به صورت همزمان گنجانده شده است. بدیهی است که در برنامه، تمام پارامترها برای تمام گره‌ها تعریف می‌شود و اگر نیاز به غنی‌سازی نباشد پارامتر مربوط به آن صفر تعریف می‌شود و در نتیجه اثر آن از ماتریس [B] حذف خواهد شد.

در پایان این قسمت دستگاه معادلات بر اساس روش المان محدود توسعه یافته به فرم کلی [K][U]=[F] به دست می‌آید.

[K] ماتریس سفتی کل مدل است که متقارن می‌باشد، [U] ماتریس مجهولات گره‌ای است که در آن، مجهولات مربوط به درجات آزادی استاندارد (جابه‌جایی در جهت y,x هرگره) و درجات آزادی مرتبط با غنی‌سازی هر گره (در صورت وجود) به صورت متوالی قرار گرفته است. [F] نیز ماتریس نیروهای خارجی اعمال شده به گره‌ها می‌باشد [۱۵].

٤-۵ ـ تحلیل دستگاه معادلات حاصله و تعیین مجهولات

در این مرحله ابتدا شرایط مرزی به «روش پنالتی[۲۰]» اعمال می‌شود. در این روش جابه‌جایی‌های گره‌ای مشخّص (شرایط مرزی) در ماتریس [U] قرار داده می‌شود و سپس متناظر با آن در ماتریس سفتی [K] و ماتریس نیرو [F] تغییرات مناسب ایجاد می‌گردد [۱۴]. پس از آن به «روش حذفی گاوس[۲۱]» دستگاه معادلات حاصله تحلیل می‌شود. در روش حذفی گاوس ابتدا [K] به یک ماتریس بالا مثلّثی تبدیل می‌شود و سپس از آخرین مجهول در [U] محاسبات اجرا می‌گردد [۱۴]. مجهولات گره‌ای حاصله پس از تحلیل دستگاه معادلات، جابه‌جایی‌های استاندارد گره‌ها در جهات y,x و نیز ضرایب مجهول مربوط به توابع غنی‌ساز مناسب (در صورت وجود) است که این ضرایب مجهول در روابط (۵) و (۶) وجود داشتند که در پایان این قسمت این ضرایب معلوم شده‌اند.

۵-۵ ـ محاسبهٔ کمیت‌های مورد نیاز برای تعیین پارامترهای نوک ترک

در این قسمت ضرایب مجهول به دست آمده در قسمت قبل درون روابط (۵) و (۶) قرار داده می‌شود تا جابه‌جایی‌های گره‌ای در هر جهت مشخص شود. بدیهی است گره‌هایی که تحت تأثیر توابع غنی‌ساز قرار گرفته‌اند تحت تأثیر ضرایب مجهول حاصله و نوع تابع غنی‌ساز، جابه‌جایی‌هایشان تغییر می‌کند هرچند که پیوستگی المان حفظ شده است به عبارت دیگر همانطور که قبلاً اشاره شد ترک و ناپیوستگی در روش المان محدود توسعه یافته به صورت مجازی مدل می‌شود.

از طریق رابطهٔ $[\varepsilon]=[B][U]$ کرنش در هر المان مثلثی به صورت ثابت به دست آورده می‌شود که در آن [U] ضرایب مجهول معلوم شده مربوط به المان مورد نظر است. سپس با رابطهٔ $[\sigma]=[D][\varepsilon]$ تنش ثابت در هر المان مثلثی محاسبه می‌شود. تنش و کرنش ثابت از ویژگی‌های مربوط به المان مثلثی است که در المان محدود کلاسیک نیز به همین صورت است (Constant Strain Triangles) [۱۴].

برای تعیین «ضرایب شدّت تنش» نوک ترک به اندازهٔ جابه‌جایی نقاط اطراف نوک ترک در جهات مختلف و یا اندازهٔ تنش در آن نقاط نیاز است. البته در صورت استفاده از اندازهٔ جابه‌جایی‌ها، ضرایب شدّت تنش (K_I, K_{II}) با دقّت بیشتری محاسبه می‌شوند. رابطهٔ جابه‌جایی نقطه‌ای اطراف نوک ترک بر حسب ضرایب شدّت تنش و موقعیّت آن نقطه نسبت به نوک ترک به صورت زیر است [۱۶].

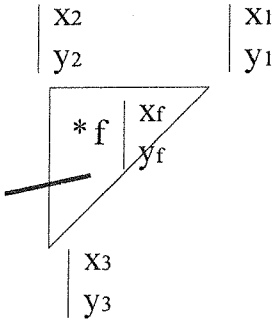
$$u=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left[\kappa-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]+\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[\kappa+1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \qquad (۲۲)$$

$$v=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[\kappa+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]-\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left[\kappa-1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \qquad (۲۳)$$

در روابط فوق u و v جابه‌جایی نقطه‌ای اطراف نوک ترک به ترتیب در جهت x و y است، r فاصله آن نقطه تا نوک ترک و θ زاویه نقطه نسبت به امتداد ترک است، K_I ضریب شدّت تنش مربوط به حالت I و K_{II} ضریب شدّت تنش مربوط به حالت II ترک است و μ مدول برشی است و κ به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & ; \quad \text{Plane Strain}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & ; \quad \text{Plane Stress}\end{cases} \qquad (۲۴)$$

برای یافتن جابه‌جایی در جهت x و y (v,u) نقطه‌ای در اطراف نوک ترک مطابق شکل ۶ از یک درون‌یابی خطّی داخل المانی که نقطه در آن واقع است استفاده می‌شود. ابتدا با داشتن مختصات نقطهٔ مورد نظر و مختصات گره‌های اطراف المان، توابع شکل در نقطهٔ مورد نظر به دست آورده می‌شود (Nf_1, Nf_2, Nf_3) سپس طبق رابطهٔ خطی زیر جابه‌جایی گره‌های اطراف المان به نقطه مورد نظر منتقل می‌شود.



شکل (٦) المان مثلثی جهت درون‌یابی خطی برای یافتن خواص در نقطهٔ f.

$$u_f = Nf_1 u_1 + Nf_2 u_2 + Nf_3 u_3 \qquad (۲۵)$$

$$v_f = Nf_1 v_1 + Nf_2 v_2 + Nf_3 v_3 \qquad (۲۶)$$

بدیهی است جابه‌جایی نقاط مختلف اطراف نوک ترک، متفاوت خواهد بود و با وجود تغییر θ, r مربوط به نقاط مختلف نسبت به نوک ترک، K_{II}, K_I حاصل از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول (۲۲ و ۲۳) یکسان نخواهد بود در نتیجه در این مقاله به دو روش مقدار K_{II}, K_I مربوط به نوک ترک مشخص می‌شود.

روش اول: در این روش برای غنی‌سازی ساده با استفاده از روابط درون‌یابی خطی(۲۵و۲۶)، جابه‌جایی‌های دو نقطهٔ I و J در امتداد ترک و پشت آن در دو جهت افقی و عمودی به دست آورده می‌شود. ولی در غنی‌سازی ترکیبی چون مشخّصات گره‌های جدید تعریف شده در امتداد ترک، درون ماتریس سفتی وارد شده است برای این مستقیماً جابه‌جایی‌های افقی و عمودی آنها به دست می‌آید. سپس روابط مربوط به جابه‌جایی‌های نقاط اطراف نوک ترک (۲۲ و ۲۳)، برای دو نقطه روی امتداد ترک و پشت آن $(\theta = \pm 180^\circ)$ نوشته می‌شود و با برقراری رابطهٔ بین جابه‌جایی افقی و عمودی نقاط مشخّص شدهٔ روی امتداد ترک برحسب فاصله تا نوک ترک (r) دستگاه معادلات دو معادله و دو مجهول به صورت زیر حاصل می‌شود که پس از حل آن می‌توان ضرایب شدّت تنش را به دست آورد [۱۷]. در واقع در این روش چون امکان محاسبهٔ میزان جابه‌جایی نسبی نوک ترک به صورت مستقیم وجود ندارد لذا از طریق برون‌یابی با تابع خطّی اندازهٔ جابه‌جایی نسبی نوک ترک به دست آورده می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{|\Delta v_I|}{\sqrt{r_I}} = A + Br_I \\ \dfrac{|\Delta v_J|}{\sqrt{r_J}} = A + Br_J \end{cases} \qquad (۲۷)$$

$$\begin{cases} \dfrac{|\Delta u_J|}{\sqrt{r_I}} = C + Dr_I \\ \dfrac{|\Delta u_J|}{\sqrt{r_J}} = C + Dr_J \end{cases} \qquad (۲۸)$$

از حلّ دستگاه دو معادله و دو مجهول (۲۷)، ضرایب مجهول A و B محاسبه می‌شود و به طرز مشابه از دستگاه معادلات ۲۸، ضرایب C و D به دست آورده می‌شود. K_{II}, K_I نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷]:

$$K_I = \sqrt{2\pi}\,\frac{\mu}{1+\kappa}A \qquad (۲۹)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi}\,\frac{\mu}{1+\kappa}C \qquad (۳۰)$$

روش دوم: این روش مشابه روش اوّل است با این تفاوت که سه نقطه J ،I و K در امتداد پشت ترک مشخص می‌شود. برای غنی‌سازی ساده با استفاده از رابطه درون‌یابی خطّی، جابه‌جایی‌های نقاط، به دست آورده می شود و برای غنی‌سازی ترکیبی مستقیماً جابه‌جایی نقاط پشت ترک (گره‌های جدید تعریف شده) مشخص می‌شود. در این حالت رابطهٔ جابه‌جایی‌های افقی و عمودی بر حسب r از درجه ۲ در نظر گرفته می شود. با برقراری رابطه بین جابه‌جایی‌های عمودی هر یک از سه نقطه، یک دستگاه سه معادله و سه مجهول به صورت زیر حاصل می‌شود (۳۱) که پس از حل آن از قرار دادن ضریب A درون رابطه (۲۹) ضریب شدّت تنش K_I حاصل می شود. به همین ترتیب با برقراری رابطه بین جابه‌جایی‌های افقی هر یک از سه نقطه، یک دستگاه سه معادله و سه مجهول حاصل می‌شود (۳۲) که پس از حل آن از قرار دادن ضریب C درون (۳۰) ضریب شدّت تنش K_{II} حاصل می‌شود [۱۵]:

$$\begin{cases} \dfrac{|\Delta v_I|}{\sqrt{r_I}} = A + Br_I + Er_I^2 \\ \dfrac{|\Delta v_J|}{\sqrt{r_J}} = A + Br_J + Er_J^2 \\ \dfrac{|\Delta v_K|}{\sqrt{r_K}} = A + Br_K + Er_K^2 \end{cases} \qquad (۳۱)$$

$$\begin{cases} \dfrac{|\Delta u_I|}{\sqrt{r_I}} = C + Dr_I + Fr_I^2 \\ \dfrac{|\Delta u_J|}{\sqrt{r_J}} = C + Dr_J + Fr_J^2 \\ \dfrac{|\Delta u_K|}{\sqrt{r_K}} = C + Dr_K + Fr_K^2 \end{cases} \qquad (۳۲)$$

۶ ـ تحلیل عددی چند سازهٔ ترکدار دو بعدی

ضرایب شدّت تنش در نوک ترک در تحلیل سازه‌های ترک‌دار از اهمّیّت زیادی برخوردارند. از این رو در این قسمت حالت‌های مختلف ترک با ابعاد مختلف در صفحه‌ای با ابعاد، بارگذاری و شرایط مرزی مشخّص به روش المان محدود توسعه می‌یابد و توسط نرم افزار تخصّصی نوشته و تحلیل می‌شود و نتایج تحلیل با نتایج حاصل از روابط حلّ دقیق که از کتاب‌های مرجع استخراج شده مقایسه می شود و در مورد دقّت جواب‌ها در شرایط مختلف بحث می گردد. روابط از مراجع شماره [۱۶ و ۱۸] استخراج شده است.

در تمام حالت‌ها صفحه‌ای به طول 160^{mm} ، عرض 70^{mm} و ضخامت 2^{mm} تحت بارگذاری یک جهته در راستای طولی برابر 100^{MPa} قرار گرفته است. مدول الاستیسته جنس ورق $E = 200 \quad GPa$ و ضریب پوآسون $\nu = 0.3$ انتخاب شده است. برای بررسی تأثیر ابعاد المان‌ها و چگونگی مش‌بندی دو نوع مدل با مشهای درشت و ریز ایجاد شده است تا تأثیر ابعاد المان در نتایج روش المان محدود توسعه یافته بررسی شود. مدل با المان‌های درشت ۴۲۰ گره و ۷۵۴ المان و مدل با المان‌های ریز ۱۲۴۸ گره و ۲۳۴۶ المان دارد که البته درجات آزادی کل مدل بسته به وضعیت ترک متفاوت خواهد بود. المان‌ها از نوع مثلثی خطی به صورت منظم مشابه شکل ۵ هستند.

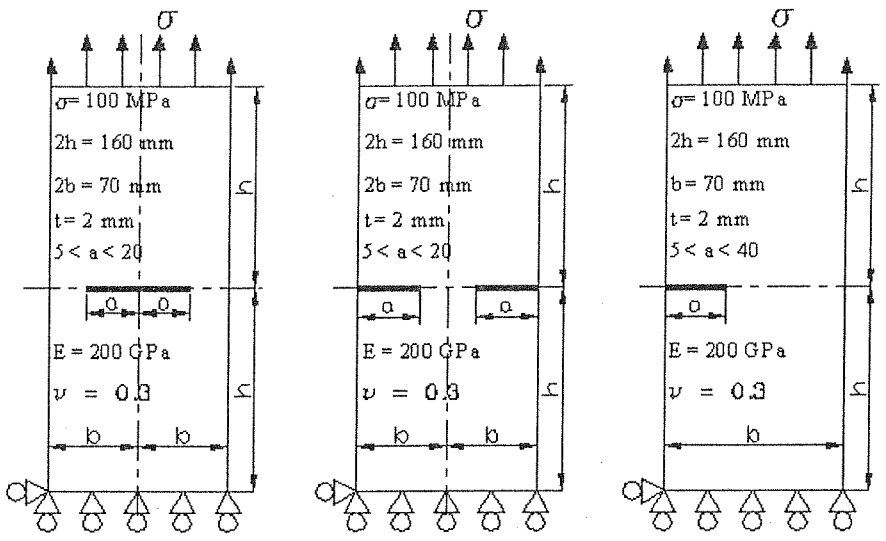
ترک‌های مختلفی در مدل‌ها در نظر گرفته شده است که مشخّصات آنها به صورت زیر است:

الف ـ نمونهٔ دارای ترک مرزی یک طرفه[۲۲]

ب ـ نمونهٔ دارای ترک مرزی دو طرفه[۲۳]

ج ـ نمونهٔ دارای ترک مرکزی افقی[۲۴]

در تمام نمونه‌ها ابعاد، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی ثابت در نظر گرفته می‌شود و فقط با تغییر در ابعاد طولی ترک، تغییرات ضریب شدّت تنش و میزان باز شدن ترک بررسی می‌شود. از بررسی این تغییرات در مدل‌های مختلف و مقایسهٔ آن با نتایج حاصل از روابط حل دقیق موجود در کتابهای مرجع [۱۶ و ۱۸] نتیجه‌گیری به عمل خواهد آمد. شکل ۷ مشخّصات هندسی، بارگذاری، تکیه‌گاهی و جنس مدل‌های مختلف را نشان می‌دهد. نوع تحلیل در همه موارد از نوع تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.



الف ـ ترک مرزی یک طرفه ب ـ ترک مرزی دوطرفه ج ـ ترک مرکزی افقی

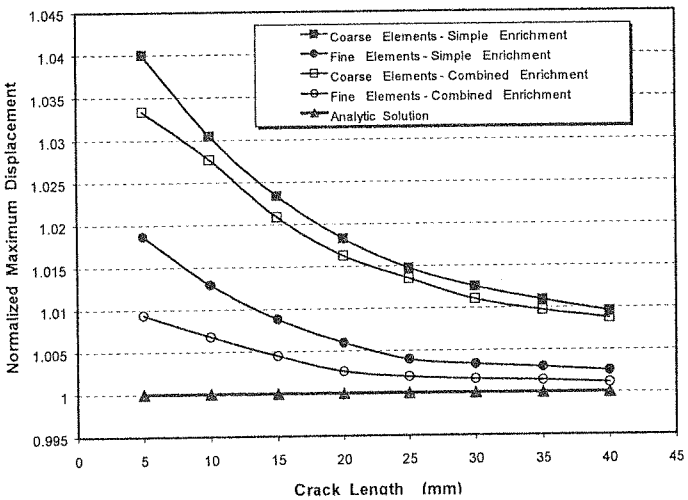
شکل (۷): مشخّصات هندسی، بارگذاری، تکیه‌گاهی و جنس مدل‌ها با انواع ترک.

۷ ـ بحث درباره نمودارهای حاصل از تحلیل

سه نوع کلی ترک مطابق شکل ۷ در مدلهایی با المان‌های درشت و ریز توسط نرم‌افزار المان محدود توسعه یافتهٔ نوشته

شده توسط مؤلفین به زبان Visual-Fortron 6.5 به نام MEXFEM2D تحلیل شدند. در همهٔ موارد، مدل کردن ترک با ورود مشخّصات هندسی ترک به سادگی انجام شده است و زمان تحلیل نیز با کامپیوترهای خانگی معمولی کوتاه بوده است (برای مدل با المان‌های ریز که ابعاد المانی حدود ۳ میلی متر می‌باشد تقریباً ۵ دقیقه). منحنی‌های موجود در نمودارهای زیر براساس نتایج حاصل از تحلیل نرم‌افزار MEXFEM2D و روابط موجود در کتاب‌های مرجع [۱۶ و ۱۸] رسم شده است که مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. نمودارهای ۱ و ۲ مربوط به مدل‌های دارای ترک مرزی یک طرفه، نمودارهای ۳ و ۴ برای مدل‌های با ترک مرزی دو طرفه، نمودارهای ۵ و ۶ مربوط به مدل‌های با ترک مرکزی افقی و نمودار ۷ برای هر سه نوع مدل است.

نمودار ۱ تغییرات بیشترین اندازهٔ باز شدن ترک در لبهٔ آزاد ورق را بر حسب طول ترک نشان می‌دهد که برای مدل با المان‌های درشت و ریز به صورت نرمال شده بر مبنای نتایج حاصل از روابط تحلیلی موجود در کتابهای مرجع [۱۶ و ۱۸] ترسیم شده است. بر اساس روش غنی‌سازی خارجی (ساده) و غنی‌سازی ترکیبی (داخلی و خارجی توأم) نتایج به دست آمده و در منحنی‌هایی به صورت جداگانه ترسیم شده است. در هر روش با ریز شدن المان‌ها دقّت افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش طول ترک و زیاد شدن درجات آزادی مدل نتایج دقیق‌تر می‌شود. روش غنی‌سازی ترکیبی در مقایسه با غنی‌سازی ساده دقّت بیشتری دارد. در مدل با المان درشت غنی‌سازی ترکیبی نسبت به ساده حدود ۰/۶ در صد دقیق‌تر و برای مدل با المان ریز حدود ۱ در صد دقّت افزایش می‌یابد. قابل تشخیص است که اثر ریز کردن المان‌ها در افزایش دقّت مؤثّرتر است و در روش غنی‌سازی ساده با ریز کردن المان، حدود ۲/۱ در صد و در روش غنی‌سازی ترکیبی حدود ۲/۴ در صد افزایش دقّت مشاهده می‌شود. البته بیشترین تأثیر مربوط به ریز کردن المان‌ها و روش غنی‌سازی ترکیبی در ترک با طول کوتاه بوده است که این موضوع باعث یکنواختی بیشتر در نتایج و کاهش محدودهٔ خطایی در طول ترک می‌شود.



نمودار (۱): بیشترین اندازهٔ باز شدن نرمال شده برای ترک مرزی یک طرفه بر حسب طول ترک.

با توجه به اینکه در روش غنی‌سازی ترکیبی جابه‌جایی‌های گره‌ای دقیقتر محاسبه می‌شود برای این با استفاده از آن می‌توان K_I را با دقّت بیشتری به دست آورد. در نمودار ۲ منحنی K_I به صورت نرمال شده بر مبنای روش تحلیلی برحسب تغییرات طول ترک، با اعمال غنی‌سازی ترکیبی جهت افزایش درجات آزادی گره‌ها، رسم شده است.

در نمودار ۲ برای مدل‌های با المان درشت و ریز به دو روش ۲ نقطه در پشت ترک و ۳ نقطه در پشت ترک K_I محاسبه شده است. ریز کردن المان‌ها باعث دقیقتر شدن نتایج می‌شود و روش ۳ نقطه نیز به علت اینکه برون‌یابی جهت یافتن جابه‌جایی نوک ترک را بر حسب تابع غیر خطی (درجهٔ ۲) انجام می‌دهد دقیق‌تر است. اما قابل مشاهده است که اثر ریز کردن المان‌ها نسبت به روش محاسبهٔ K_I (۲ نقطه و ۳ نقطه) مؤثّرتر بوده است. با ریز کردن المان‌ها بیشترین افزایش دقّت حدود ۵/۳ درصد است حال آنکه روش ۳ نقطه در شرایط مشابه حدود ۲ در صد افزایش دقّت ایجاد می‌کند. همچنین می‌توان نتیجه

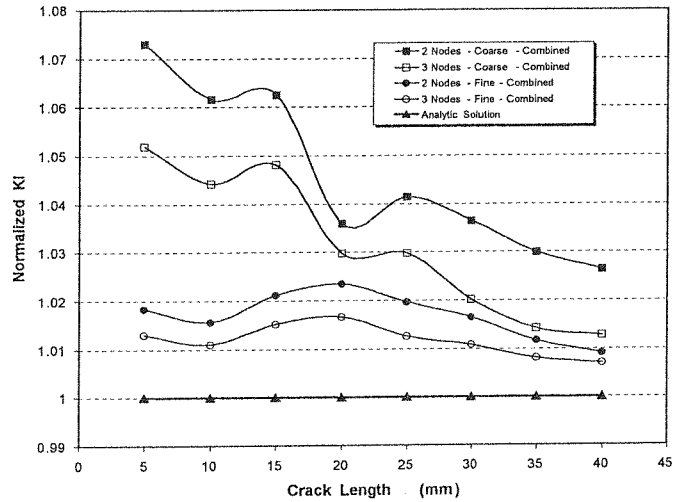
گرفت که ریز کردن المان‌ها و روش ۳ نقطه، بیشترین تأثیر را بر ترک با طول کوتاه ایجاد می‌کند بنابراین در چنین شرایطی نتایج K_I بر حسب طول ترک یکنواخت تر و با پراکندگی کمتر حاصل می‌شود.

بیشترین اندازهٔ باز شدن ترک در لبهٔ آزاد برای مدل با ترک مرزی دو طرفه در نمودار ۳ به صورت نرمال شده نمایش داده شده است. مدل‌های با المان ریز دقّت بیشتری دارند و با افزایش درجات آزادی، نتایج دقیقتر و پراکندگی کمتر می‌شود. به کار گرفتن روش غنی‌سازی ترکیبی دقّت را افزایش می‌دهد هر چند که اثر آن نسبت به ریز کردن المان‌ها کمتر است.

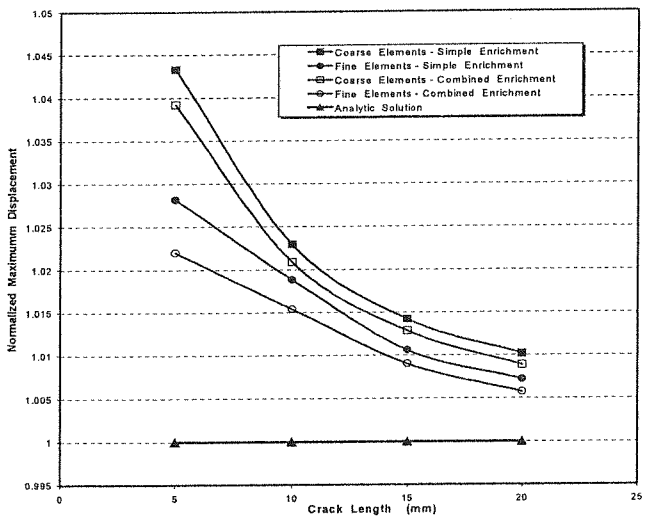
نمودار ۴ تغییرات K_I نرمال شده را برای مدل‌های با المان درشت و ریز بر اساس غنی‌سازی ترکیبی به روشهای ۲ نقطه و ۳ نقطه نشان می‌دهد، که نتایج آن مشابه نمودار ۲ است و با ریز شدن المان‌ها و انتخاب روش ۳ نقطه دقّت جوابها افزایش می‌یابد. در این حالت نیز تأثیر اندازهٔ المان بیش از انتخاب روش ۳ نقطه است.

نمودار ۵ اندازهٔ بیشترین جابه‌جایی را، در وسط ترک مرکزی افقی بر حسب طول ترک به صورت نرمال شده نشان می‌دهد که با ریز شدن المان‌ها، افزایش طول ترک و نیز اعمال غنی‌سازی ترکیبی دقّت نتایج بیشتر وپراکندگی کمتر می‌شود.

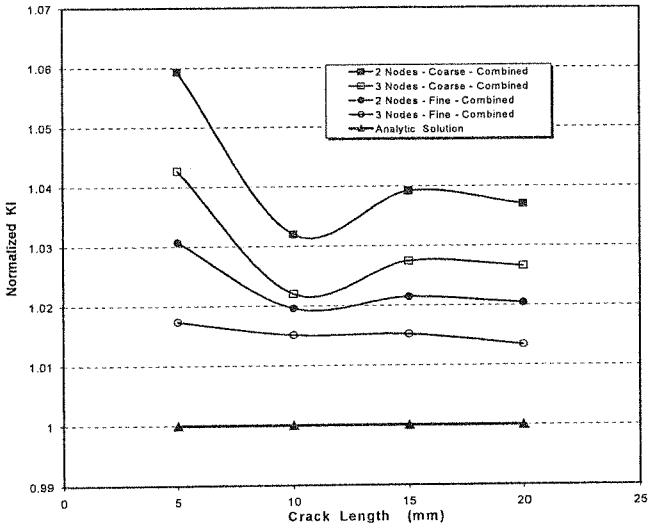
نمودار ۶ نیز مبین این است که با ریز شدن المان‌ها و انتخاب روش ۳ نقطه و اعمال غنی‌سازی ترکیبی در نمونهٔ با ترک مرکزی افقی دقّت افزایش می‌یابد هرچند که تأثیر ریز شدن المان‌ها در دقّت جوابها بیشتر است.



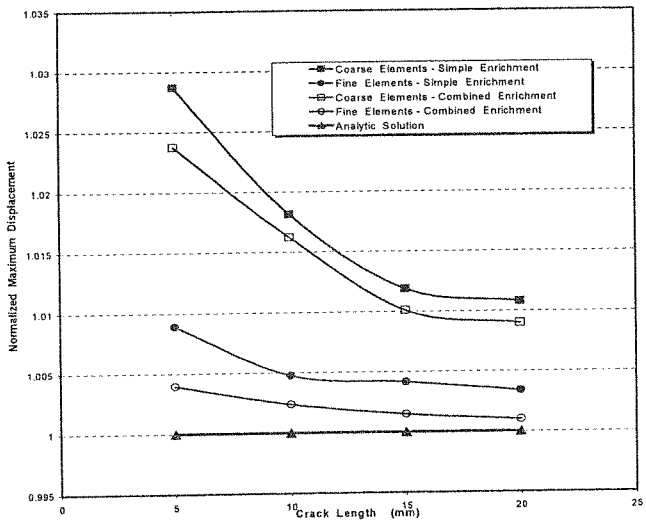
نمودار (۲): منحنی‌های تغییرات K_I نرمال شده برای ترک مرزی یک طرفه بر حسب طول ترک.



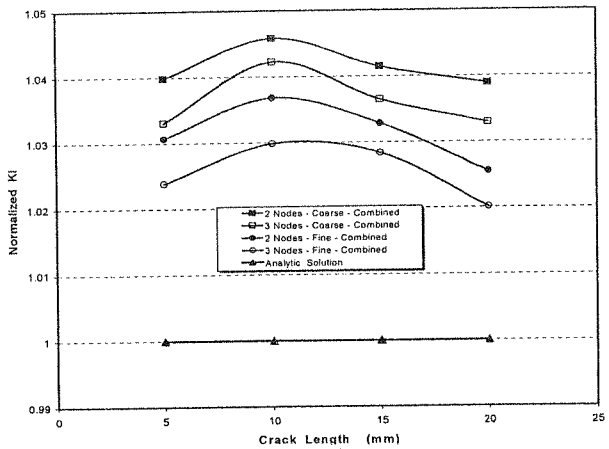
نمودار (۳): بیشترین اندازهٔ باز شدن نرمال شده برای ترک مرزی دو طرفه بر حسب طول ترک.



نمودار (٤): منحنیهای تغییرات K_I نرمال شده برای ترک مرزی یک طرفه بر حسب طول ترک.

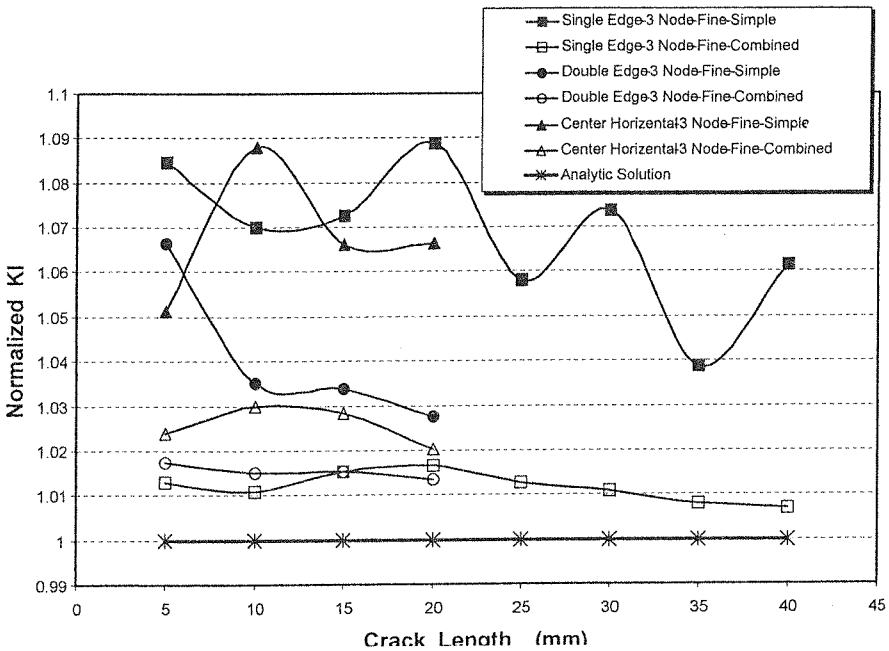


نمودار (٥): بیشترین اندازهٔ باز شدن نرمال شده برای ترک مرکزی افقی بر حسب طول ترک.



نمودار (٦): منحنیهای تغییرات K_I نرمال شده برای ترک مرکزی افقی بر حسب طول ترک.

در نمودار ۷ برای هر سه نوع نمونهٔ دارای ترک منحنی‌هایی بر اساس اعمال معیار غنی‌سازی ساده و ترکیبی و نیز روش ۳ نقطه در پشت ترک برای مقایسه ارائه شده است. دلیل انتخاب مدل‌های با المان ریز و روش ۳ نقطه این است که با توجه به نتایج نمودارهای قبل، در این شرایط دقیقترین جوابها با کمترین پراکندگی حاصل می‌شود و از طریق این نمودار می‌توان دقّت روش‌های غنی‌سازی ساده و ترکیبی را با هم مقایسه کرد. با دقّت در نمودار ۷ قابل تشخیص است که در صد خطا در روش غنی‌سازی ساده برای انواع نمونه‌های ترکدار بین ۲/۸ تا ۸/۹ در صد است ولی در روش غنی‌سازی ترکیبی بین ۰/۸ تا ۳ در صد خطا وجود دارد که به طور متوسط در این روش خطا یک سوم شده است.



نمودار (۷): منحنیهای تغییرات K_I نرمال شده برای انواع ترک بر حسب طول ترک.

۸ ـ نتیجه گیری

المان محدود توسعه یافته روشی مناسب و کارآمد برای مدل کردن ناپیوستگی‌های هندسی از جمله ترک است. از ویژگی‌های این روش امکان مدل کردن ترک به سادگی و سرعت تحلیل بالا می‌باشد. بی‌نیازی از به کارگیری المان‌های تکین در اطراف نوک ترک و نیز امکان استفاده از المان‌های درشت در اطراف ترک از دیگر ویژگی‌های این روش است. استفاده از روش جدید دستگاه مختصات متعامد محلی در نوک ترک جهت تشخیص گره‌های نیازمند غنی‌سازی و تعیین پارامترهای مورد نیاز برای آن مناسب بوده است و اگر اندازهٔ المان‌ها مناسب انتخاب شود با اعمال توابع غنی‌ساز مناسب و افزایش درجات آزادی گره‌ها، جابه‌جایی‌های مربوط به آنها با دقّت خوبی محاسبه می‌شوند که اگر در این شرایط روش خوبی برای محاسبهٔ K_I در نظر گرفته شود امکان دسترسی به نتایج با دقّت خوب فراهم می‌شود. با ریز شدن المان‌ها دقّت افزایش می‌یابد البته این موضوع همیشه در تحلیل المان محدود درست است هر چند که المان مثلثی به طور ذاتی نسبت به ابعاد المان حساسیت بیشتری دارد. با افزایش طول ترک و در نتیجه زیاد شدن درجات آزادی مدل‌ها، جابه‌جایی‌های گره‌ای دقیقتر محاسبه می‌شوند. روش جدید غنی‌سازی ترکیبی با استفاده از روش جدید تقسیم‌بندی المان‌های ترک خورده نسبت به روش غنی‌سازی ساده دقّت بیشتری دارد و جابه‌جایی‌های گره‌ای دقیقتری از آن حاصل می‌شود. همچنین در این روش جابه‌جایی نقاطی در راستای طول ترک به دست می‌آید که چون به طور مستقیم در محاسبهٔ K_I از آنها استفاده می‌شود برای این دقّت جوابها افزایش می‌یابد. از میان روش‌های محاسبهٔ K_I روش ۳ نقطه در پشت ترک به دلیل استفاده از برونیابی غیر خطی برای

یافتن جابه‌جایی نوک ترک، نسبت به روش ۲ نقطه که به صورت خطی این کار را می‌کند دقیقتر است. ریز کردن المان‌ها نسبت به تغییر روش از ۲ نقطه به ۳ نقطه، در دقّت نتایج مؤثّرتر است. با ریز شدن المان‌ها و استفاده از روش ۳ نقطه و نیز اعمال معیار جدید غنی‌سازی ترکیبی علاوه بر اینکه K_I در تمام طول ترک دقیقتر می‌شود، افزایش دقّت بیشتری در دقّت نتایج با طول ترک کوتاه مشاهده می‌شود در نتیجه با توجه به اینکه در ترک با طول کم به طور نسبی دقّت جابه‌جایی‌های گره‌ای کم بود بنابراین اثر این سه عامل باعث ایجاد یکنواختی بیشتر وپراکندگی کمتر در نتایج K_I می‌شود. در همهٔ نمودارها مقادیر باز شدن ترک و نیز K_I به دست آمده از طریق نرم‌افزار نوشته شده(MEXFEM2D), از میزان واقعی آن که از طریق روابط تحلیلی محاسبه می‌شود بیشتر است.

فهرست علائم

سطح کلّ مجموعه المانی	A	نیروهای حجمی	f, f^e	ضخامت المان	t, t_e
مجموع سطوح المانی بالای ترک	A_{ab}	تابع پله‌ای واحد دو مقداره (غنی ساز کلی) (۱+ یا ۱-)	H	ماتریس مجهولات گره‌ای	U
مجموع سطوح‌المانی‌پایین ترک	A_{be}	طول صفحه در تمام مدلها	2h	انرژی کرنشی المان	U^e
سطح المان	A_e	ماتریس ژاکوبین انتقال	J	جابه‌جایی گره در جهت x	u
طول ترک در مدل‌های مختلف	a و 2a	ماتریس سفتی المان وکل مدل	K_e, K	جابه‌جایی گره در جهت y	v
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی)در تابع غنی ساز کلّی	a_J	ضریب شدّت تنش ترک در حالت I	K_I	زاویهٔ‌گره تا امتداد ترک درجهت عکس عقربه ها (رادیان)	θ
ماتریس کرنش-جابه‌جایی	B	ضریب شدّت تنش ترک در حالت II	K_{II}	تابع ۴ جمله‌ای برای غنی سازی نوک ترک	ϕ_α
عرض صفحه‌در مدل‌های مختلف	b و 2b	تابع شکل	N_I	توابع غنی ساز	ψ_J
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی)درتابع‌غنی‌سازنوک ترک	$b_{\alpha l}$	نیروهای متمرکز	P, P_i	انرژی پتانسیل کل	π
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی)در تابع غنی ساز کلی	c_J	فاصله گره تا نوک ترک(mm)	r	تنش	σ
ماتریس تنش-کرنش ماده	D	نسبت سطح المانی بالای ترک	r_{ab}	کرنش	ε
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی)درتابع‌غنی‌سازنوک ترک	$d_{\alpha l}$	نسبت سطح المانی پایین ترک	r_{be}	مدول برشی	μ
مدول الاستیسیته	E	نیروهای سطحی	T, T^e	ضریب پوآسون	ν

زیرنویس‌ها

1 - Extended Finite Element Method (X-FEM)
2 - Singularity
3 - Element Partitioning
41 - Finite Element
5 - Boundary Element
6 - Element Free- Mesh Free
7 - Partition of Unity
8 - Node Enrichment
9 - Shape Function
10 - Stress Intensity Factors
11 - Total Potential Energy
12 - Total Strain Energy
13 - Work Potential
14 - Plane Stress
15 - Plane Strain
16 - Element Strain-displacement matrix
17 - Pre-Processing
18 - Processing
19 - Post-Processin
20 - Penalty Approach
21 - Gaussian Elimination Method
22 - The Single Edge Notch Test Specimen
23 - The Double Edge Notch Test Specimen
24 - The Center Horizental Cracked Test Specimen

مراجع

[1] Belytshko T., Lu YY, Gu L., "Element-Free Galerkin Methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.37, pp. 229-256, 1994.

[2] Fleming M., Chu YA, Moran B., Belytshko T., "Enriched Element–Free Galerkin Method for Three-Dimensional", Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.40, pp.1483-1504, 1997.

[3] Melenk J.M. and Babuska I., "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications", Computer Methods in Applied Mechanic and Engineering, Vol.139, pp.289 -314, 1996.

[4] Duarte C.A. and Oden J.T., "An H-p Adaptive Method Using Clouds", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.139, pp.237-262, 1996.

[5] Moes N., Dolbow J., and Belytschko T., "A Fnite Element Method for Crack Growth Without Remeshing", International Journal for Numerical Methods in engineering Vol.46, No.1, pp.131-150, 1999.

[6] Daux C., Moes N., Dolbow J., Sukumar N. and Belytschko T., "Arbitrary Cracks and Holes with the Extended Finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.48, No.12, pp.1741-1760, 2000.

[7] Dolbow J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", Ph.D. Thesis , Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, U.S.A, 1999.

[8] Dolbow J., Moes N., and Belytschko T., "Discontinuous Enrichment in Finite Elements With a Partition of Unity Method" , Finite Elements in Analysis and Design, Vol.36, pp.235-260, 2000a.

[9] Sukumar N., Moes N., Moran B. and Belytschko T., "Extended Finite element Method for Three-Dimensional Crack Modeling ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.48, No.11, pp.1549-1570, 2000.

[10] Stolarska M. ,Chopp D. L. ,Moes N. and Belytschko T., "Modeling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.51, No.8, pp.943-960, 2001.

[11] Sukumar N., Chopp D. L., Moes N. and Belytschko T., "Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,Vol.190,No.46,pp.6183-6200, 2001.

[12] Sukumar N., Chopp D. L. and Moran B. , "Extended Finite Element Method and Fast Marching Method for Three Dimensional Fatigue Crack Propagation", Engineering Fracture Mechanics, Vol,70, No.1, pp.29-48, 2003.

[13] Belytschko T. and Black T., "Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.45, No.5, pp.601-620, 1999.

[14] Chandrupatla T. R. and Belegundu A. D. , "Introduction to Finite Elements in Engineering ", Second Edition , Prentice Hall Press , New Jersey , pp. 1-174, 1997.

[15] Pourkamali Anaraki A. , "Ph. D. Thesis Report", November 2003.

[16] Anderson T. L., " Fracture Mechanics Fundamentals and Applications ", Second Edition , CRC Press USA , 1995.

[17] Ansys 5.4 Manual, "POST1 -Crack Analysis (KCALC. Command)", Manual in Help of Ansys Softwere, Part 19.8, pp. (19-43)-(19-46), 2000.

[18] Tada H., Paris P. C. and Irwin G. R., "The Stress Analysis of Cracks Handbook",Third Edition, ASME Press , Professional Engineering Publishing London UK , pp. 39-54 , May 2000.