حل مسأله پوشش مجموعه با استفاده از الگوریتم
Simulated Annealing

رضا توکلی مقدم
استادیار
گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

مسعود ربانی
استادیار
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

نیما صفایی
دانشجوی دکترای
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

چکیده

در این مقاله، حل مساله پوشش مجموعه[1] (SCP)، با هدف کمینه‌سازی هزینه مکان‌یابی-تخصیص[2] تسهیلات توسط الگوریتم فراابتکاری تابکاری شبیه سازی شده[3] (SA) مورد بررسی قرار می‌گیرد. این مساله بدلیل پیچیدگی محاسباتی در گروه مسایل NP-Hard بوده، که حل آن از روش‌های سنتی و متداول با توجه به ابعاد بالای مساله، بسیار زمان‌بر و ناکارآمد است. الگوریتم SA جزء رویکردهای مبتنی بر جستجوی همسایگی در فضای جواب محسوب می‌شود؛ بطوریکه احتمال پذیرش جواب‌های نامرغوب جهت فرار از دام بهینه‌های موضعی جزء نقاط قوت آن است. در این مقاله، با مقایسه نتایج بدست آمده از حل مدل SCP استاندارد توسط SA با حل بهینه و برخی رویکردهای دیگر مانند روش ابتکاری هیراگو[4] و الگوریتم ژنتیک، صحت و کارایی الگوریتم SA ارایه شده بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی

مساله پوشش مجموعه، بهینه‌سازی ترکیبی، الگوریتم تابکاری شبیه سازی شده (SA)

Solving the Set Covering Problem by Using Simulated Annealing (SA)

R. Tavakkoli-Moghaddam
Assistant Professor
Department of I.E., Faculty of Engineering,
University of Tehran

M. Rabbani
Assistant Professor
Department of I.E., Faculty of Engineering,
University of Tehran

N. Safaei
Ph.D Student
Department of I.E.,
Iran University of Science and Technology

Abstract

The set covering problem (SCP) is one of the location - allocation models. It's objective is to minimize the cost of facilities location-allocation in an optimal structure in such a way that each customer or zone has been covered by at least one facility. The above problem is a class of NP-Hard problems that cannot be solved by exact algorithms in a reasonable amount of computational time. Thus in this paper, a simulated annealing (SA) algorithm is proposed to solve the SCP. This algorithm is one of the efficient metaheuristics based on a neighbourhood search within solution *space, acceptance of probability, and inferior solutions to scape from trap (i.e., local optimal solution). Ten test problems are solved in which associated results show the efficiency and validity of the SA algorithm for solving the SCP. The validity comparisions of the results obtained the proposed algorithm are compared with the results reported by three methods named as Lingo 8 Software, Heragu's heuristic, and Genetic Algorithms (GAs).*

Keywords

Simulated Annealing (SA), Set Covering Problem, Combinatorial Optimization

مقدمه

مساله پوشش مجموعه (SCP)، جزء مسایل مکانیابی-تخصیص است که هدف آن کمینه‌سازی هزینه مکان‌یابی ـ تخصیص (استقرار) تسهیلات در مکان‌های بالقوه برای تقاضا می‌باشد؛ بطوریکه هر مشتری با نقطه تقاضا حداقل، تحت پوششِ یک تسهیل قرار گیرد. این تخصیص با توجه به تعداد فعلی تسهیلات موجود و معیار تصمیم مورد نظر، تعیین می‌گردد؛ بطوریکه، حداقل هزینه‌ی مسافت یا زمان، و یا حداکثر سود عاید بنگاه اقتصادی شود. منظور ازتحت پوشش قرار گرفتن، همانا قرار گرفتن مشتری تحت خدمت تسهیل بوده که ممکن است محدودیتی جهت معیار پوشش مد نظر قرار گیرد. از جمله آنکه مشتری در فاصله معین از خدمت قرار گیرد، یا بیش از زمان معیّنی نیاز به طی شدن فاصله بین مشتری تا خدمت دهنده نباشد که در این صورت مشتری توسط تسهیل تحت پوشش قرار دارد.

از آنجا مساله پوشش مجموعه بدلیل پیچیدگی‌های محاسباتی در زمره خانواده مسایل NP-Hard قرار دارد [۱]، حل آن در ابعاد بزرگ توسط روشهای متداول بهینه‌سازی مستلزم صرف زمان زیادی خواهد بود. از جمله مسایل پوشش مجموعه می‌توان به تعیین تعداد و مکان بهینه استقرار بیمارستانها، پمپ بنزین‌ها، مخازن نفتی، دستگاههای صنعتی در سطح کارخانه، دکل‌های مخابراتی، ایستگاههای آتش نشانی، کتابخانه‌ها، داروخانه‌ها در سطح شهر و غیره اشاره کرد. مساله مکان‌یابی ـ تخصیص عموماً، درصدد پاسخگویی به پنج موضوع اساسی هیراکو است [۲]:

الف ـ چند تسهیل جدید در یک شبکه توزیع که در آن مشتریان و تسهیلات از قبل وجود دارند، افزوده شوند؟

ب ـ تسهیلات جدید در کجا باید مستقر شوند؟

ج ـ هر تسهیل جدید، چقدر باید ظرفیت داشته باشد؟

د ـ هرمشتری چگونه باید به تسهیل جدید و یا موجود تخصیص داده شود؟ بعبارت دیگر، کدام تسهیل باید کدام مشتری را تحت پوشش سرویس و خدمات خود قرار دهد؟

ه ـ آیا هر مشتری می‌تواند تحت پوشش بیش از یک تسهیل قراربگیرد؟

لازم به ذکر است که هرگاه بتوان ترکیبی از مسایل مربوط به مکان‌یابی و تخصیص را طوری با هم ارتباط داد که ضمن تعیین مکان مورد نظر تسهیلات، تخصیص هر مشتری از مجموعه نیز فراهم شود. مساله عبارت خواهد بود از تعیین تعداد و مکان بهینه تسهیلات جهت پوشش مشتری هایی که درصدد دریافت خدمت هستند. البته در این میان می‌توان شرایطی فراهم نمود که مسأله سهل‌تر یا سخت‌تر شود. مثلاً شرط پوشش مشتری توسط حداقل یک تسهیل یا پوشش مشتری توسط حداقل دو تسهیل می‌تواند بر پیچیدگی‌های این مسأله دامن زند. در این بین، معیاری که بهینگی تخصیص هر مشتری را به تسهیل مورد نظر تضمین نماید، مساله‌ای اساسی است؛ چرا که هدف اصلی تحت پوشش قرار گرفتن چندین مشتری یا نقطه تقاضا توسط تسهیلات موجود یا بوده که استقرار آن تسهیل در هر مکان مستلزم صرف هزینه و وقت خواهد بود. در نتیجه، برآورد سوالات پنجگانه فوق با توجه به ماهیت و پیش شرطهای مدل مکان‌یابی ـ تخصیص، سبب افزایش پیچیدگی و دشواری‌هایی، لااقل در رابطه با مفهوم زمان حل مدل، خواهد شد. معمولاً با صرفنظر کردن از تعدادی از این سوالات، درجهت کاهش پیچیدگی مدل و حل آن گام برداشته می‌شود. البته قبل از هر چیز باید دقت شود که ترکیبهای مختلف از هر کدام از سوالات پنجگانه هیراگو در ارتباط با طراحی تسهیلات در یک سیستم پشتیبانی مدیریت، سبب بروز ساختارهای متفاوتی از مدل‌های گوناگون از جمله SCP شود [۲]. این موضوع، در زمینه مساله پوشش مجموعه بررسی شده است که در کتب مختلف حالتهای توسعه یافته آن ارایه شده است [۵-۳].

۱ـ مروری بر ادبیات موضوع

مساله پوشش مجموعه توسط پژوهشگران بسیاری چون : هیراگو ،کارلا هافمن[5]، مانفرد پدبرگ[6]، السلطان[7]، لن لورنا[8]، ال ـ درزی[9]، میترا، اچـه‌بری[10]، واسکو[11] و ولف[12] با روشهای ابتکاری و بعضاً فوق ابتکاری حل شده و تلاش ما عمدتاً در جهت دستیابی سریعتر و غیر زمانبر به هدف است. با توجه اینکه مسأله SCP دارای ساختار یک مسأله برنامه‌ریزی صحیح صفر و یک است، روشهای حل دقیق و ابتکاری بسیاری ارایه شده که در زیر به آنها اشاره می‌شود: بالاس و هو [۶] با بکارگیری روش حل دقیق صفحه برشی و الگوریتم ابتکاری تحت کواریانس، در صدد حل مدل استاندارد SCP برآمدند. ارلونکوتر [۷] با طراحی یک روش دومرحله ای برای مکانیابی با ظرفیت نامحدود تسهیلات، پایه گذار بکارگیری روشهای ابتکاری شد. شواتال [۸] روش ابتکاری آزمندانه[13] (GH) را برای حل مسأله‌ی پوشش مجموعه بکار گرفت. واسکو و ویلسن [۹ و ۱۰] طی دو مقاله مشترک و مجزا یک الگوریتم ابتکاری کارا ابتکاری و یک الگوریتم کاربردی مکان‌یابی تسهیل برای حل مسایل پوشش مجموعه بزرگ ارائه دادند. واسکو و ولف [۱۱] مسأله پوشش مجموعه را در ابعاد بزرگ برروی کامپیوتر شخصی حل کردند.

بیزلی و همکاران [۱۶-۱۲] طی چند مقاله به توسعه الگوریتم های حل پوشش مجموعه با الگوریتم‌های جدید پرداختند که معروفترین آن بکارگیری الگوریتم ژنتیک در حل مدل SCP است. لورنا و لوپز [۱۷]، یک روش ابتکاری جانشین[14] برای حل مسأله SCP ارایه کردند. یاکوب و بروسکو [۱۸] یک روش ابتکاری جستجوی محلی برای حل مسایل بزرگ پوشش مجموعه ارایه نمودند. السلطان و همکاران [۱۹] از الگوریتم ژنتیک برای حل SCP استفاده کردند که در این الگوریتم جمعیت محور[15]، به جواب‌های غیر قابل قبول جریمه تعلق می‌گیرد. بالاس و کارِرا [۲۰] از رویه شاخه و کران تحت گرادیان پویا، برای حل مسأله پوشش مجموعه استفاده کردند. توکلی مقدم و همکاران [۲۱] نشان داده‌اند که الگوریتم ژنتیک می‌تواند بعنوان یکی از روش‌های کارامد برای حل مسایل پوشش مجموعه مورد استفاده قرار گیرد. حدادی [۲۲] برای حل مساله پوشش مجموعه از یک روش ابتکاری لاگرانژی محور ساده استفاده کرد. از بین تحقیقات فوق، تنها یاکوب و بروسکو با مفهومی نزدیک به روش فوق ابتکاری SA به منظور حل مسأله اقدام نموده‌اند. ال ـ درزی و میترا [۲۳] تعدادی روش حلSCP با زیربنای شبکه ارایه کرد؛ اما اخیراً پاسینگهام، بال و آندلمان، مفهومی از SCP را که "Uni-Cost SCP" نام دارد با رویکردی مشابه حل SA ، بیان نهاده‌اند [۶].

۲ـ مدل ریاضی مساله پوشش مجموعه

۲-۱ـ مفروضات مسأله

ـ در این مقاله، مساله SCP گسسته مدنظر است؛ بدین معنی که نقاط تقاضا بصورت نقطه‌ای و غیرپیوسته در نظر گرفته می‌شوند. در مدل گسسته‌ی SCP، مساله در قالب شبکه‌ای از مشتریان بعنوان گره که همزمان امکان استقرار تسهیل بر روی هر یک وجود دارد، تعریف شود و همه‌ی تسهیلات یکسان هستند.

ـ محدودیت در ارایه خدمات از سوی تسهیلات به مشتریان وجود ندارد.

ـ هر مشتری می‌تواند همزمان تحت پوشش چندین تسهیل قرار گیرد.

۲-۲ـ زیرنویس، پارامتر و متغیرهای مدل

ـ زیر نویس‌ها:

i = شمارنده تعداد مشتریان ؛ $i = 1, \dots, n$

j= شمارنده تعداد مکان‌ها ؛ $j = 1, \dots, m$

ـ ورودی‌ها:

C_j = هزینه استقرار تسهیل در مکان j.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر تسهیل استقرار یافته در مرکز } j \text{ام بتواند مشتری } i \text{ ام را تحت پوشش خود قرار دهد.} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

ـ متغیر تصمیم:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر تسهیل در مرکز } j \text{ام قرار بگیرد.} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

۲-۳ـ مدل ریاضی

مدل ریاضی یک مسأله SCP استاندارد بصورت زیر است:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} C_j X_j \tag{۱}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq 1 \; ; \; \forall i \tag{۲}$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad ; \; \forall j \tag{۳}$$

معادلـه (۱) مبـیّن تابـع هـدف مسـأله است که سعی در کمینه‌سازی هزینه استقرار تسهیلات دارد؛ با این فرض که هزینه اسـتقرار در مراکـز مخـتلف یکسـان نیسـت. اولـین محدودیت در معادله (۲) تضمین می‌کند که هر مشتری توسط حداقل یک تسـهیل تحـت پوشـش قـرار گیـرد همچنین دومین محدودیت در معادله (۳) تضمین می‌کند که متغیرها از نوع صفر و یک به معنای تخصیص و یا عدم تخصیص باشند.

۳ـ تابکاری شبیه‌سازی شده (SA)

تابکـاری شبیه سازی شده (SA) [۲۴] رویکردی است بر مبنای مدل مونت‌کارلو[۱۶] که برای مطالعه رابطه بین ساختار اتمی، آنتروپـی و دمـا درطـول تابکـاری یک ماده استفاده می‌شود. فرآیند فیزیکی تابکاری که هدف از آن کاهش دمای ماده به پایین تـرین سـطح انـرژی اسـت، تعـادل گرمایـی[۱۷] نامـیده می‌شود. فرآیند تابکاری با ماده‌ای در وضعیت گداخته آغاز شده و سپس بـتدریج دمـای آن کـاهش مـی یابـد. درهر دما جسم مجاز به رسیدن به تعادل گرمایی است. دما نباید خیلی به سرعت کاهش یابـد، بویـژه درمـراحل اولیه، در غیر اینصورت برخی کاستی‌ها در ماده پیدا شده و ماده به وضعیت انرژی کمینه نخواهد رسید. کاهش دما شبیه به کاهش مقدار هدف در مسایل کمینه‌سازی است، که توسط یک سری تغییرات بهبود دهنده انجام می‌گیرد. برای اینکه اجازه دهیم دما به آهستگی کاهش یابد، باید تغییرات غیر بهبود دهنده‌ی تابع هدف با احتمال معیّنی انتخاب شوند؛ بطـوریکه وقتی مقدار هدف کاهش می‌یابد، این احتمال نیز تقلیل یابد. این مورد یکی از نقاط قوت رویکرد SA است. در مسایل بهینه‌سازی، دما به عنوان یک پارامتر کنترلی عمل می‌کند.

بـا افـزایش ابعـاد در مسـایل خانـواده NP -Hard، ریسـک پذیـرش جواب‌های غیر بهینه و نزدیک به بهینه‌ی کلی افزایش مـی‌یابـد. بنابـراین اسـتفاده از رویکردهای فراابتکاری امری اجتناب ناپذیر است. کارایی رویکرد انتخابی به وسعت فضای شدنی مسأله، حل اولیه و نحوه انتخاب جوابِ همسایه وابستگی دارد. علاوه بر موارد مذکور در SA، مکانیزم کاهش دما یا سرمایش نیز حایز اهمیت است. در جدول (۱)، پارامترهای SA در دنیای فیزیک وSCP مورد مطابقت قرار گرفته است.

جدول (۱): تطابق پارامترهای Annealing در دنیای فیزیکی و ساختار SCP

Physical Word Annealing	SCP Simulated Annealing
چیدمان اتم درفلز	ساختار استقرار و تخصیص در SCP
حرکت تصادفی اتم	انتخاب تصادفی (اضافه / حذف) استقرار تسهیل در مکان مورد نظر
سطح انرژی (E)	هزینه استقرار تسهیل درساختار SCP (Z)
اختلاف انرژی (ΔE)	تغییرات هزینه‌ای استقرار/ عدم استقرارتسهیلات درساختار SCP (ΔZ)
توزیع احتمالی حالت انرژی	تغییر مطابق معیار متروپولیس و پیاده‌سازی توزیع احتمالی بولتزمن با ثابت $K_B=1$ $Exp(-\Delta Z / t) > Random(0, 1)$
دما	متغیر کنترل فرآیند سرمایش در سطوح مختلف دمایی طبق تابع توزیع بولتزمن (t)

٤ـ اجزاء و پارامترهای الگوریتم SA برای SCP

٤-١ـ نمایش ساختار جواب

ساختار جواب، مبیّن یک نقطه از فضای شدنی مسأله است؛ بطوریکه نحوه نمایش آن در هر رویکرد فراابتکاری حایز اهمیت است. در SCP، یک جواب شدنی باید نشان دهد که در هر مکان، تسهیل مستقر شده است یا خیر. بنابراین ساختار جواب را می‌توان بصورت یک بردار صفر و یک در نظر گرفت، بطوریکه وجود عنصر یک در خانه i ام مبیّن استقرار تسهیل در مکان i باشد. ساختار فوق در شکل (۱) نشان داده شده است.

1	0	0	....	1
1	2	3		N

شکل (۱): نمایش ساختار جواب.

٤-٢ـ انتخاب جواب اولیه

برای تعیین جواب اولیه، در ابتدا فرض می‌شود برای هر منطقه یک تسهیل وجود دارد که در این صورت شرطِ حداقلِ پوشش، رعایت شده است. لذا مطابق شکل (۱)، جواب اولیه بصورت بردار تماماً یک (۱، ....، ۱، ۱) در نظر گرفته می‌شود.

٤-٣ـ مکانیزم ایجاد جواب همسایه

برای پیمایش در فضای شدنی، نیاز به تولید جوابِ شدنیِ دیگری با تغییر جواب فعلی وجود دارد، که به آن جواب همسایه اطلاق می‌شود. برای تولید چنین جوابی، از مکانیزم ساده و تصادفی تبدیل یک به صفر و یا بر عکس، در جواب فعلی استفاده می‌شود. بدین ترتیب که، ابتدا یک عدد صحیح بصورت تصادفی در بازه یکنواخت [1,N] انتخاب شده، سپس مکان متناظر با عدد تصادفی تولید شده در جواب فعلی، را در صورت وجود یک به صفر یا برعکس تبدیل می‌شود. بدین معنی که اگر در مکان کاندید، تسهیل مستقر باشد آن را حذف کرده و بر عکس، اگر تسهیل مستقر نباشد، بدان تخصیص داده می‌شود. بعد از آن باید شدنی بودن جواب، برای اطمینان از تحت پوشش قرار گرفتن کلیه نقاط تقاضا مورد بررسی قرار گیرد. اگر جواب بدست آمده شدنی نباشد، آن را حذف کرده و جواب دیگری تولید می‌شود.

٤-٤ـ انتخاب دمای اولیه

تعیین مقدار اولیه دمای سیستم (T_0) تاثیری صریح و مستقیم در رد یا قبول جواب‌ها دارد؛ چرا که در این وضعیت، انرژی سیستم در ابتدا بسیار بالا است و این، برای یافتن بهترین مسیرکاهش دما در دستیابی به حالت پایدار سیستم (پایین ترین سطح انرژی) یک وضعیت مطلوب به شمار می‌رود. وایت [۲۵] ایده معادل بودن T_0 با انحراف معیار هزینه‌های سیستم از میانگین هزینه را مطرح نمود. بدین ترتیب که دمای اولیه، معادل انحراف معیار مقادیر هدف SCP به ازای تعداد دفعات جرای برنامه در حالت ناپایدار (NSAMP) قرار داده می‌شود. معادله (۵) بیانگر میانگین مقادیر فوق و معادله (۶) نیز مبین انحراف معیار آنها می‌باشد.

$$\text{Mean} = \frac{\sum_{j=1}^{NSAMP} OBJ(j)}{NSAMP - 1} \qquad (۵)$$

$$T_0 = \text{Dev} = \left(\frac{\sum_{j=1}^{NSAMP} (OBJ(j) - \text{Mean})^2}{NSAMP - 1} \right)^{1/2} \qquad (۶)$$

٤-۵ـ مکانیزم کاهش دما

ضابطه‌ی کاهش دما و حرکت به سمت سرد شدن سیستم، بصورت تابعی مانند معادله (۷) نشان داده می‌شود.

$$T_i = \alpha T_{i-1} \; ; \; \forall\, i = 1, \ldots, n \qquad (۷)$$

کـه در آن α بیانگرضـریب کـاهش دمـا و ثابتـی کمتـر از یک است. معمولا مقدار آن بین ۰/۵تا ۰/۹۹ در نظر گرفته می‌شود. پارامتـر n تعـداد دفعـات کـاهش سـطح دمای سیستم را نمایندگی می‌کند. همچنین این پارامتر به عنوان معیاری جهت توقف الگوریتم SA نیز بکار می‌رود.

٤-۶ـ طول زنجیره مارکوف

یکی دیگر ازپارامترهای مهم در تعیین کیفیت جواب‌های حاصل از SA، تعداد نقاط جستجو شده در فضای جواب مسأله در هـر دمـا است. به تعداد این جواب‌ها اصطلاحاً طول زنجیره مارکف گفته می‌شود. تعیین این پارامتر برای اطمینان از جستجوی نزدیک به تمام جواب های محتمل لازم است. ساده ترین پیشنهاد برای تعیین مقدار طول زنجیره مارکوف در SA، انتخاب یک مقـدار ثابت و مسـتقل از دمـای اولـیه اسـت کـه بـنا بـه توصیه وایت [۲۵] باید در حدّ امکان به اندازه مسأله (در اینجا تعداد مکان‌های بالقوه استقرار) نزدیک باشد [۲۳ و ۲۷].

٤-۷ـ مکانیزم پذیرش جواب های نامزد شده

یکـی دیگر از مولفه‌های تعیین کننده کیفیت و سرعت رسیدن به جوابِ تقریباً بهینه، نحوه پذیرش یا ردّ جواب های جدید اسـت. همانطـور که بحث شد، الگوریتم SA با یک جواب شدنی اولیه آغاز شد و طی مکانیزم معیّنی، یک حل همسایه از فضای جـواب انـتخاب شـده و هزینه این جوابِ همسایگی با هزینه‌ی جواب قبلی مقایسه می‌شود. هرگاه تابع هدف بهبود یافته باشد، حـل جدید نگه داشته شده و به عنوان حل جاری منظور می‌شود؛ درغیر این صورت، این همسایگی علی رغم عدم بهبود هدف، بـا احـتمال مشخصـی پذیـرفته می‌شود. این تابع احتمال، حالت خاصی از توزیع احتمالی بولتزمن در علم ترمودینامیک آماری است که در معادله (۸) تعریف شده است.

$$y = e^{\frac{-\Delta Z}{T}} \qquad (۸)$$

کـه در آن ΔZ برابـر اخـتلاف بین هزینهٔ حل جاری از حل همسایگی و T بیانگر دمای جاری سیستم است. فرض کنید که حـل جـاری x منجـر به مقدار هدفی معادل z و جواب نامزدx' که از مکانیزم تولید جواب همسایه بدست آمده، منجر به مقدار هدفـی معـادل z' گردد. در نتیجه اگر $\Delta z = z' - z \leq 0$ باشد، حل جدید پذیرفته شده، و اگر $\Delta z = z' - z > 0$ باشد، حل پیشنهادی مطابقِ معادله (۸) با احتمال y پذیرفته می‌شود.

٤-۸ـ معیارهای توقف الگوریتم SA

بـا توجه به اینکه الگوریتم‌های فوقِ ابتکاری هیچگونه شناختی نسبت به نقطه‌ی بهینه سراسری و بطور کلی درجه‌ی بهینه

بودن جواب‌ها ندارند، معیاری برای توقف آنها مورد نیاز است. در الگوریتم SA برخی از این معیارها عبارتند از:

ـ تعداد دفعات کاهش سطح دما.

ـ تعداد دفعات متوالی در فرآیند سرمایش که منجر به بهبودی در تابع هدف نشده باشند.

الگوریتم بگونه‌ای طراحی شده است که هرگاه یکی از معیارهای فوق ارضا گردد، الگوریتم نیز خاتمه یافته و آخرین جواب بهبود دهنده هدف بعنوان بهترین جواب در خروجی ظاهر می‌شود.

٤-٩ـ گام‌های الگوریتم SA

گام صفر: اطلاعات زیر را وارد کنید:

- L_n: طول زنجیره مارکوف. α : مقدار ضریب سردی. M : تعداد سطر
- ماتریس پوشش صفر و یک. e : میزان خطای نسبی. N : تعداد ستون
- MAXTEMPDECS : حداکثر تعداد دفعات تغییر سطح دما.
- MAXSAMEMARKOV : حداکثر تعداد دفعات متوالی عدم حصول بهبودی (تعداد حالات تعادل سیستم).
- NSAMP : تعداد نمونه تصادفی در شرایط ناپایدار سیستم.

گام اول: جواب اولیه و دمای اولیه سیستم را بصورت زیر تعیین کنید:

$X_0 = (1,1,\ldots,1)$; $T_0 = Dev$ (طبق معادله (۶))

جواب اولیه X_0 را به عنوان جواب جاری سیستم تلقی کنید.

گام دوم: بر مبنای مکانیزم تولید جواب همسایه در قسمت (۴-۳)، جواب جدید X' را از جواب جاری تولید کنید.

گام سوم: طبق مکانیزم پذیرش جواب در قسمت (۴-۷) جواب جدید را بررسی کنید. هرگاه جواب جدید پذیرفته شد:

سوم/ یک: جواب جدید را جایگزین جواب فعلی کنید.

سوم/ دو:کنترل کنید آیا این جواب بهترین جواب یافته شده در این دما می باشد یا نه؟

سوم/ سه: کنترل کنید آیا این جواب، بهترین جواب در کل می‌باشد یا نه؟ اگر پاسخ مثبت است، X را با جایگزین کردن، به هنگام کنید.

گام پنجم: گام‌های سوم تا چهارم را تازمانی که طول زنجیره مارکوف (L_n) اجازه می‌دهد تکرار نمایید.

گام ششم: طبق معادله (۷) دما را کاهش دهید.

گام هفتم:گام‌های سوم تا ششم را تا زمانیکه هیچ پیشرفتی در جواب حاصل نشود برای یافتن پاسخ گام "سوم/ دو" ادامه دهید.

گام هشتم: هرگاه یکی از دو معیار توقفMAXTECPDECS یا MAXSAMEMARKOV نقض شد، الگوریتم را پایان داده و بهترین جوابی را که تاکنون بدست آمده در خروجی نشان دهید.

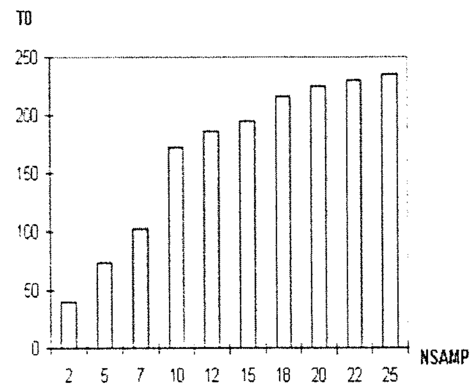
۵ ـ نتایج محاسباتی

در این قسمت با حل تعدادی مسأله نمونه توسط الگوریتم پیشنهادی و مقایسه آن با حل بهینه و برخی حل‌های دیگر، کارایی SA حل SCP مورد بررسی قرار گیرد. بررسی صلاحیت آماری ماتریس پوشش درکلیه مسایل نمونه با توجه به فرضیات آماری برازش، جداول توافقی و استقلال ، تحت آمارهٔ مربع کای انجام شده است [۲۶].

۵-۱ـ بررسی تاثیرات پارامترهای الگوریتم SA

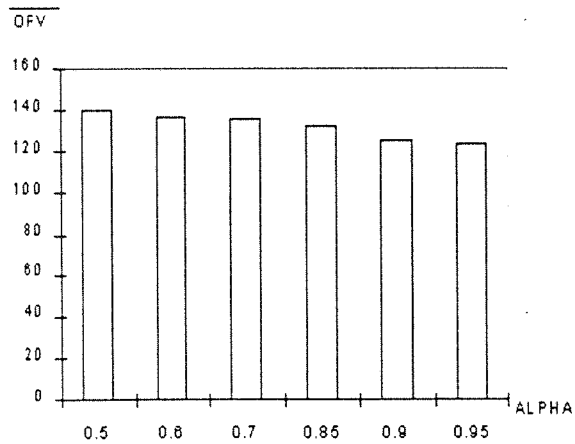
به منظور بررسی تأثیرات و چگونگی عملکرد هر پارامتر، یک مساله مربع از SCP با ابعاد ۳۰ × ۳۰ با چگالی ۵۰ ٪ (یعنی تعداد یک‌های موجود در ماتریس پوشش برابراست با ۴۵۰) بطور تصادفی ایجاد شده است. جواب بهینه این مسأله با بکارگیری نرم افزار Lingo برابر ۱۲۳ بدست آمده است. در شکل (۲) ارتباط بین پارامترهای NSAMP و T_0 بر طبق الگوی وایت

(معـادلات (۶) و (۷)) نشـان داده شـده اسـت. مشاهده می‌شود هر چه مقدار NASMP افزایش یابد، دمای سیستم نیز بصورت صـعودی و بـا شـیب کاهشـی بـالا می‌رود. این وضعیت امکان پذیرش گسترده‌تر، بیشتر و راحت ترجواب‌های همسایه را میسر می‌سازد.

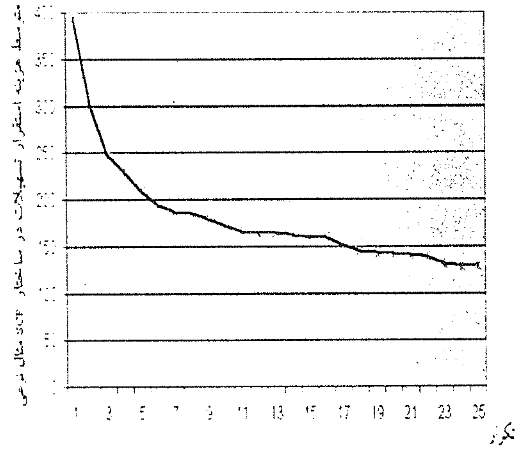


شکل (۲): تاثیر تعداد همسایگی‌های اولیه بر روی دمای اولیه سیستم به روش وایت [۲۵].

پارامتر دیگری که می‌تواند نقش مؤثری در کارایی الگوریتم ایفا کند، ضریب کاهش دما (α) می‌باشد. بدیهی است هرچقدر مقـدار α بیشـتر باشـد، سیستم دیرتر سرد شده و نقاط بیشتری از فضای جواب جستجو می‌شود؛ اما زمان حل افزایش می‌یابد. در شـکل (۳)، ارتـباط بین پارامتر فوق و هزینه استقرار تسهیلات با فرض ثابت بودن سایر پارامترها برای ده بار اجرا نشان داده شـده اسـت. همانطـور کـه در ایـن شـکل دیده می‌شود، با افزایش مقدار α، مقدار هدف نیز کاهش یافته است. در نتیجه هرگاه ضریب سرمایش برابر ۰/۹۵ فرض شود کارایی بالایی در انتظار خواهد بود که با توصیه وایت در انتخاب α با توجه به نوع مسأله انطـباق دارد. البـته بـا تـوجه به سطح دمای سیستم، برای پارامتر NSAMP نیز باید مقدار مناسبی تعیین گردد. به عنوان یک تجـربه بدسـت آمده از ادبیات موضوع، برای $\alpha = 0.95$ مقدار $NSAMP = 10$ مناسب به نظر می‌رسد. در شکل (۴)، نرخ کاهش هدف در حالت $\alpha = 0.95$ و $NSAMP = 10$ بر حسب تعداد تکرار الگوریتم برای یک مسأله نمونه SCP نشان داده شده است.



شکل (۳): تاثیر ضریب سردی بر کارایی الگوریتم SA طراحی شده درحل SCP.



شکل (٤): بررسی صحت و اعتبار الگوریتم SA طراحی شده درحل یک مسأله نمونه

در جـدول (۲)، نتایج مقایسه حل بدست آمده از SA با حل بهینه، الگوریتم ژنتیک (GA) پیشنهادی [۲۸] و روش ابتکاری هیـراگو [۲] برای ده مسأله نمونه استاندارد نشان داده شده است. در هر مقایسه، میزان انحراف جواب های بدست آمده و تعداد جـواب‌هـای منطـبق نیز نشان داده شده است. به عنوان یک نتیجه مطلوب، مسأله E2 تنها مسأله نامنطبق بر حل دقیق است. مقدار چگالی ماتریس پوشش در مسایل نمونه تأثیر زیادی در زمان حل بهینه خواهد داشت. به همین دلیل، برای اثبات کارایی SA از مسایل نمونه باچگالی نسبتاً بالا استفاده شده است. همچنین درصد انحرافِ ازمجموع بهینه، در رویکرد SA از دو رویکرد GA و روش ابتکاری هیراگو کمتر بدست آمده است.

جدول (۲): مقایسه الگوریتم SA طراحی شده برای حل SCP با الگوریتم‌های ابتکاری و روش دقیق.

Data Set [۱۴ و ۲۸]	#Row	# Column	٪Density	Optimal	Heragu [۲]	GA [۲۸]	SA
A1	۱۰	۳۵	۵۲	۳۲	۳۴	۳۲	۳۲
A2	۲۵	۳۵	۵۲	۲۴	۲۴	۲۴	۲۴
B1	۱۵	۵۰	۴۷	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳
B2	۳۰	۵۰	۴۸	۱۷	۱۷	۱۷	۱۷
C1	۲۰	۶۵	۵۲	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
C2	۳۵	۶۵	۵۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲
D1	۲۵	۸۰	۴۹	۶	۹	۶	۶
D2	۴۰	۸۰	۵۱	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵
E1	۳۰	۹۵	۴۸	۱۴	۱۷	۱۷	۱۴
E2	۴۵	۹۵	۵۰	۱۳	۱۳	۱۳	۱۵
جمع توابع هدف				۱۸۰	۱۹۰	۱۸۳	۱۸۲
درصد انحراف از مجموع بهینه					٪ ۵/۵۶	٪ ۱/۶۷	٪ ۱/۱۱
تعداد جواب‌های منطبق بر حل دقیق					۷	۹	۹

۶ـ نتیجه گیری

با توجه به نتایج بدست آمده، اکثر جواب های حاصل از رویکرد SA منطبق بر حل بهینه بوده و کارایی بالاتر آن نسبت به سایر روش‌های ابتکاری مشهود است. حال آنکه، حصول حل بهینه برای مسایل با ابعاد بالا بدلیل زمان‌بر بودن آن، عملاً توسط PC امکان پذیر نیست. همانطور که انتظار می‌رفت، نتایج نشان می‌دهد مقدار چگالی با سرعت حل الگوریتم نسبت معکوس دارد. به عبارت دیگر، سرعت حل یک مسأله کوچک با چگالی بالا تقریباً معادل سرعت حل یک مسأله بزرگ با چگالی پایین است. مطابق جداول و نمودارهای مقایسه‌ای مشاهده می‌شود که الگوریتم SA با اطمینان بالایی، برای حل SCP در ابعاد بزرگ مناسب است. می‌توان مسایل کاملتری را با فرضیات و محدودیت‌های جدید، مانند: صحیح بودن متغیرهای تصمیم، فرض پوشش بیشتر از یکبار توسط هر تسهیل، پیوسته بودن مسأله پوشش مجموعه به جای گسسته بودن و امثال آنها، حل کرد و برای مدلسازی دقیق‌تر مفاهیم دنیای واقعی بکارگرفت. البته بدیهی ترین وضعیت برای ارایه انعطاف‌پذیری مدل عبارت است ازآنکه: هرگاه در محدویت‌های مدل SCP نامساوی " ≥ " با مساوی " = " جایگرین گردد، مساله جزء بندی مجموعه حاصل می شود که الگوریتم SA ارایه شده قادرخواهد بود بدون تغییر در فرضیات، آن را با دقت لازم حل کند.

مراجع

[1] M.R. Garey and D.S. Johnson, Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness, Freeman, San Francisco, (1979).

[2] S.S. Heragu, Facilities design, PWS publishing company, Boston, MA, (1997).

[3] M.S .Daskin, Network and discrete location: Models and algorithms and applications, John Wiley & Sons, (1995).

[4] P.B. Mirchandani and R.L. Francis, Discrete location theory, John Wiley & Sons, (1990).

[5] D.R. Sule, Manufacturing facilities: location, planning, and design, 2nd Edition, PWS publishing Company, Boston, MA, (1994).

[6] E. Balas and A. Ho, Set covering algorithms using cutting planes, heuristics, and sub gradient optimization: A computational study, Mathematical Programming, Vol. 12, pp. 37- 60, (1980).

[7] D. Erlenkotter, A dual-based procedure for uncapacitated facility location, Operations Research, Vol. 26, No. 6, pp. 992 –1009, (1978).

[8] V. Chvatal, A greedy heuristic for the set-covering problem, Mathematics of Operations Research, Vol. 4, No. 3, pp. 233 –235, (1979).

[9] F.J. Vasko, G. R. Wilson, An efficient heuristic for large set covering problems, Naval Research Logistics Quarterly, 31 (1984) 163 -171 .

[10] F. J. Vasko, G. R. Wilson, Using a facility location algorithm to solve large set covering problems, Operations Research Letters, Vol. 3, No. 2, pp. 85-90, (1984).

[11] F.J. Vasko and F.E. Wolf, Solving large set covering problems on a personal computer, Computers & Operations Research, Vol. 15, No. 2, pp. 115 –121, (1988).
[12] J.E. Beasley, An algorithm for set covering problems, European Journal of Operational Research, Vol. 31, pp. 85-93, (1987).
[13] J.E. Beasley, A Lagrangean heuristic for the set covering problem, Naval Research Logistics, Vol. 37, pp. 151-164, (1990)
[14] J.E. Beasley, OR-Library: Distributing test problems by electronic mail, Journal of the Operational Research Society, Vol. 41, pp. 1069-1072, (1999). http:// www.OR-Library.com
[15] J.E. Beasley and K. Jornsten, Enhancing an algorithm for set covering problems, European Journal of Operational Research, Vol. 58, No. 2, pp. 293-300, (1992).
[16] J.E. Beasley and P.C. Chu, A genetic algorithm for the set covering problem, European Journal of Operational Research, Vol. 94, No. 2, pp. 392-404, (1996).
[17] L.A.N. Lorena and F.B. Lopes, A surrogate heuristic for set covering problems, European Journal of Operational Research, Vol. 79, No. 1, pp. 138-150, (1994).
[18] L.W. Jacobs and M.J. Brusco, A local-search heuristic for large set-covering problems, Naval Research Logistics, Vol. 42, pp. 1129-1140, (1995).
[19] K.S. Al -Sultan, M.F. Hussain and J.S. Nizami, A genetic algorithm for the set covering problem, Journal of the Operational Research Society, Vol. 47, pp. 702-709, (1996).
[20] E. Balas and M.C. Carrera, A dynamic sub gradient-based branch-and-bound procedure for set covering, Operations Research, Vol. 44, No. 6, pp. 875-890, (1996).
[21] R. Tavakkoli-Moghaddam, M. Rabbani and A.R. Ali-Hosseini, An efficient heuristic algorithm for solving set covering problems, Int. J. of Engineering Science, Vol. 14, No. 4, pp. 95-106, (2003) (in Farsi).
[22] S. Haddadi, Simple Lagrangian heuristic for the set covering problem, European Journal of Operational Research, Vol. 97, pp. 200-204, (1997).
[23] E. El-Darzi and G. Mitra, Set covering and set partitioning problems using assignment relaxation, Journal of Operational Research Society, Vol. 43, pp. 483-493, (1994).
[24] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt and M.P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, Science, Vol. 220, No. 4598, pp. 671-680, (1983).
[25] S.R. White, Concept of scale in simulated annealing, Proceeding IEEE International Conference on Computer Design, Portchester, pp. 646 – 651, (1983).
[26] A.H. Bowker and G.J. Lieberman, Engineering statistics, 2nd Edition, Prentice Hall, N.J., (1989).
[27] D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch and C. Schevon, Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation, Operations Research, Vol. 37, pp. 865-892, 1987.
[28] A.R. Ali-Hosseini, The use of genetic algorithms for solving set covering problems, Master Thesis, Department of Industrial Engineering, University of Tehran, 1999 (in Farsi).

زیر نویس‌ها

1-Set covering Problem
2- Location-Allocation
3- Simulated Annealing
4- Heragu
5- Karla Hoffman
6- Manfred Padberg
7- Al-Sultan
8- Lan Lorena
9- El-Darzi
10- Etcheberry
11- Vasko
12- Wolf
13- Greedy Heuristic
14- Surrogate Heuristic
15- Population-Based
16- Monte Carlo