

ارائه‌ی یک مدل ریاضی برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق در سیستم «کارتزین» و کاربرد آن در هندسه‌های پیچیده

امیررضا زراتی
دانشیار

مریم جهانفر
کارشناسی ارشد

دانشکده‌ی مهندسی عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله، یک مدل ریاضی صریح، برای حل معادلات دوبعدی متوسط‌گیری شده در عمق، ارائه شده که در شرایط هندسه‌ی پیچیده مرزها اجرا شده است. مدل، غیردائمی است و در آن از روش حجم کنترل و شبکه‌ی جابجاشده در سیستم دستگاه کارتزین و برای مدل‌سازی تنش‌های آشفتگی از لزجت گردابه‌ای ثابت استفاده شده است. مدل در شرایط مختلفی از جمله جریان در یک کانال با کف سینوسی، بررسی وضعیت یک موج سینوسی در یک مخزن با انتهای بسته، بازشدگی ناگهانی در یک کانال مستطیلی، برقراری جریان یکنواخت در یک کانال مستطیلی مایل در پلان و همچنین جریان در یک کانال با پیچ‌های متوالی اجرا شده و دقت نتایج با استفاده از روابط نظری و نتایج آزمایشگاهی موجود بررسی شده است. همچنین اثر معرفی مرزهای نامنظم به صورت پله پله و تأثیر آن در نتایج مدل در شرایط مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج حاصل، نشان داده است که پله پله کردن مرزها منجر به ایجاد مقاومت بیشتر در جریان می‌شود، اگر نسبت عرض کانال به عمق زیاد و سرعت جریان کم باشد، اثر این اصطکاک اضافی، قابل صرف‌نظر کردن است.

کلمات کلیدی

مدل ریاضی - آب‌های کم‌عمق - هندسه‌ی پیچیده - مختصات کارتزین - روش صریح - احجام محدود

Development of a Mathematical Model for Solving Shallow Water Equations in Cartesian Coordinates and its Application in Complex Geometries

M. Jahanfar
Graduated Student

A.R. Zarrati
Associate Professor

Dept. of Civil Engineering,
Amirkabir University of Technology

Abstract

In this paper an explicit mathematical model is developed to solve shallow water equations and it is applied to flows with complex geometry. Control volume method is used to solve unsteady equations with a staggered grid arrangement. Turbulent stresses are calculated based on a constant eddy viscosity. The model is verified in different flow conditions such as a flow in a canal with a wavy bed, propagation of wave in a reservoir, sudden expansion in a rectangular channel, uniform flow in a

rectangular channel, which is inclined with respect to the coordinates, and flow in a meandering channel. The results are compared with experimental and analytical data. Complex boundaries are introduced to the model by steps. The effect of steps on the accuracy of model is investigated. It is shown that steps introduce additional resistance to the flow. This additional resistance is however negligible if flow velocity is low and the width to depth ratio is large.

Keywords

Mathematical model, Shallow water equations, Complex geometry, Cartesian coordinates, Explicit scheme, Control Volume.

مقدمه

از مسائل مهم در علم هیدرولیک، تحلیل جریان در کانال‌های باز، برای برنامه‌ریزی در طراحی و بهره‌برداری از پروژه‌های منابع آب است. در این راستا استفاده از مدل‌های ریاضی، نسبت به روش‌های آزمایشگاهی پرهزینه، بخصوص برای تحلیل سیستم‌های مرکب و پیچیده بیشتر مورد توجه است. پیشرفت و توسعه‌ی چشمگیر سرعت رایانه‌ها در دهه‌های اخیر نیز سبب شده است، حل معادلات پیچیده و غیرخطی حاکم بر جریان، در شرایط گوناگون و با استفاده از تکنیک‌های عددی تا مراحل بسیار پیشرفته‌ای عملی شود.

بسیاری از جریان‌ها در طبیعت، ماهیت آشفته و سه‌بعدی دارند. حل معادلات حاکم بر حرکت (معادلات نویر استوکس) در این حالت بسیار پیچیده است. از سویی در رودخانه‌ها بعد قائم جریان نسبت به ابعاد افقی آن بسیار کوچک و شیب سطح آب نیز کم است و در نتیجه می‌توان از شتاب جریان در جهت قائم صرف‌نظر کرد و توزیع فشار در عمق را هیدرواستاتیک فرض کرد [1]. به این ترتیب، یک معادله از معادلات حاکم بر جریان کم می‌شود. حال اگر دو معادله‌ی باقی‌مانده را پس از جای‌گذاری برای ترم فشار از فرض فشار هیدرواستاتیک در عمق انتگرال‌گیری کنیم، معادلات متوسط‌گیری شده در عمق و یا معادلات آب‌های کم‌عمق حاصل می‌شود. امتیاز این معادلات، جز سادگی آن نسبت به حل سه‌بعدی معادلات، در این است که چون عمق، خود در معادلات ظاهر می‌شود، در محاسبات بدست می‌آید. با یادآوری پیچیدگی پیدا کردن محل سطح آزاد در مسائل آبراهه‌های باز، امتیاز این معادلات روشن می‌شود. البته مدل به دست‌آمده با فرض فشار هیدرواستاتیک، در صورت وجود جریان‌های قوی ثانویه در عمق، دارای خطاست. برای مثال، نتایج به دست‌آمده از کاربرد چنین مدلی در تحلیل میدان جریان نزدیک نوک آب‌شکن یا پایه‌ی پل و همچنین در پیچ‌های تند با خطا همراه است.

تاکنون محققین بسیاری به روش‌های متفاوت، به حل این‌دسته از معادلات پرداخته‌اند. یکی از اولین مدل‌های ریاضی، برای حل این معادلات، توسط کوئیپرز و رگدنهیل در سال ۱۹۷۳ ارائه شده است [2]. رگدنهیل و ویجننگا در سال ۱۹۸۲ یک مدل ریاضی محاسبه‌ی الگوی جریان در رودخانه‌ها تدوین کردند [3]. در این مدل از روش تفاضل محدود برای حل معادلات متوسط‌گیری شده در عمق، استفاده شده است. نتایج کار آنها، نشان‌دهنده‌ی تأثیر زیاد ترم‌های اصطکاک ناشی از تنش‌های جانبی بر روی الگوی جریان با توجه به مرکب‌بودن مقطع مورد مطالعه آنهاست. فالکونر در سال ۱۹۸۷ یک مدل عددی شبیه‌سازی خشک و ترشدن را با استفاده از معادلات متوسط‌گیری شده در عمق برای مدل‌سازی جریان‌های جزر و مدی در مصب هامبر به کار برده‌است [4]. در سال ۱۹۸۹ تینگ‌سانچالی و همکاران، بررسی جامعی بر روی پایداری یک مدل ریاضی، بر پایه‌ی معادلات متوسط‌گیری شده در عمق صورت داده‌اند و یک شرط پایداری تجربی، شبیه به شرط پایداری کورانت ارائه کردند [5]. در سال ۱۹۹۵ چودری و مولز یک مدل عددی بر پایه معادلات متوسط‌گیری شده در عمق، برای کانال‌های باز تدوین کردند [6]. این مدل غیردائمی بوده و در آن از سیستم مختصات منطبق بر مرزها بهره‌گیری شده است. این مدل در مواردی مانند پرش هیدرولیکی، انقباض تدریجی کانال، پیچ ۱۸۰ درجه و جریان در نزدیکی آب‌شکن‌ها و همچنین شبیه‌سازی شکست سد آزمایش شده و نتایج مناسبی ارائه کرده است. ژو در سال ۱۹۹۶ یک مدل دوبعدی برای جریان ارائه کرد. وی در ارائه‌ی این مدل، معادلات متوسط‌گیری شده در عمق را بر پایه‌ی روش حجم کنترل و با فرض فشار هیدرواستاتیک و جای‌گزینی عمق به جای فشار، استخراج کرد. [7]. وی



روشی را شبیه به روش سیمپل برای ارتباط عمق و سرعت به جای فشار و سرعت پیشنهاد کرد. در سال ۱۹۹۷ یه و مک کورکودیل، مدلی دوبعدی برپایه معادلات متوسط‌گیری شده در عمق برای جریان‌های آشفته تدوین کردند [8]. مدل ارائه شده بر پایه روش حجم کنترل و در یک سیستم مختصات منطبق بر مرزها و شبکه‌ی جابجا نشده، تدوین شد که روش حل آن روش ضمنی است. مدل در شرایط متفاوتی از جمله جریان‌های جانبی ورودی به یک کانال، جریان در یک کانال پیچدار، جریان فوق بحرانی در پارشال فلوم اجرا شده و نتایج مناسبی به دست آمده است. در سال ۱۹۹۹، لین و همکاران، جریان در پیچ را با یک مدل ریاضی بر پایه معادلات متوسط‌گیری شده در عمق، شبیه‌سازی کردند [9]. مدل آنها در سیستم منحنی‌الخط، با شبکه‌ی عمود بر هم و شبکه‌ی جا به جاشده تدوین شده است. ژو و گودویل نیز در همین سال با استفاده از یک مدل ریاضی بر پایه معادلات متوسط‌گیری شده در عمق، پروفیل سطح آب را در یک پیچ ۱۸۰ درجه محاسبه کردند. کلونیدیس و سولیس نیز با همین روش در سال ۲۰۰۱ و در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، بازشدگی و جمع شدگی کانال را مدل کردند [10].

هرچند در هندسه‌های پیچیده و مرزهای دارای انحنا استفاده از یک مدل ریاضی در سیستم منطبق بر مرزها قابلیت تطبیق مناسبی با مرزها دارد و از این رو وضعیت هندسی جریان را به خوبی مدل‌سازی می‌کند، ولی با این حال، نسبت به دستگاه کارترین بسیار پیچیده‌تر است. در صورت یافتن روشی برای معرفی مرزهای نامنظم در سیستم کارترین، می‌توان در این سیستم به صورت ساده‌تر به مدل‌سازی جریان در هندسه‌های نامنظم پرداخت. برای این منظور، در تحقیق حاضر، مرزهای منحنی با پله‌پله کردن به مدل معرفی شده‌اند؛ به گونه‌ای که نزدیکترین برازش را به مرزهای مایل کناری داشته باشند. در این صورت، شبیه‌سازی هندسه‌های پیچیده جریان با مدل ریاضی امکان‌پذیر خواهد بود. مدل توسعه داده شده در شرایط مختلف واسنجی شده و نتایج به دست آمده بررسی شده است.

معادلات حاکم بر حرکت

با فرض توزیع فشار هیدرواستاتیک و انتگرال‌گیری از معادلات نویر استوکس در عمق و با صرف‌نظر از ترم‌های تنش حاصل از اختلاف سرعت‌ها در عمق با مقادیر متوسط آنها، شکل نهایی معادلات آبهای کم عمق به صورت زیر به دست می‌آید [1]:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) - gh \frac{\partial Z_b}{\partial x} - \frac{g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2} + v_t \left(\frac{\partial^2(hu)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(hu)}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2h) = -g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^2}{2} \right) - gh \frac{\partial Z_b}{\partial y} - \frac{g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} + v_t \left(\frac{\partial^2(hv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(hv)}{\partial y^2} \right)$$

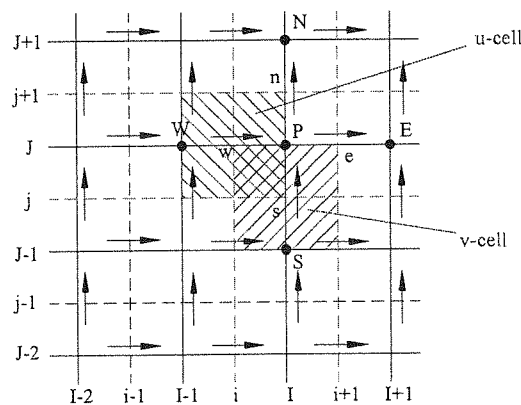
که در این معادلات:

u و v ، مؤلفه‌های سرعت متوسط در عمق در جهات x و y ، g شتاب ثقل برای واحد جرم، Z تراز سطح آب، Z_b ارتفاع کف کانال، C ضریب شزی، v_t لزجت گردابه‌ای و h عمق آب است.

دو ترم آخر معادلات اندازه‌ی حرکت از مدل‌سازی تنش‌های برشی کف و تنش‌های جانبی متوسط‌گیری شده در عمق حاصل می‌شوند. تنش‌های جانبی به صورت مماس بر وجوه قائم‌المان سیال وارد می‌شوند و با صرف‌نظر کردن از تنش‌های نیوتنی، این تنش‌ها نشان‌دهنده تنش آشفتگی هستند. در این معادلات تنش‌های آشفتگی براساس اصل لزجت گردابه‌ای بوزینسک مدل شده و تنش‌های برشی کف از رابطه‌ی شزی به دست آمده‌اند.

حل عددی معادلات جریان

برای حل عددی معادلات جریان، از روش حجم کنترل استفاده شده است. مزیت این روش نسبت به روش‌هایی نظیر بسط سری تیلور که معادلات حاکم بر جریان را با تقریبات ریاضی به عبارات جبری قابل حل تبدیل می‌کند، این است که در روش حجم کنترل با انتگرال‌گیری از این معادلات بر روی حجم کنترل‌های مفروض، بار دیگر از قوانین بقا استفاده و معادلات فوق به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. درحقیقت، عبارات معادله‌ی جبری حاصل از انتگرال‌گیری، بیانگر اصول بقا در هر حجم کنترل هستند. در الگوریتم حاضر، برای تبدیل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر جریان به معادلات جبری قابل حل به روش حجم کنترل، باید میدان جریان را شبکه‌بندی چهاروجهی و به تعدادی حجم کنترل تقسیم کرد و از این معادلات روی این حجم‌های کنترل انتگرال گرفت کرد. در این مدل، برای جلوگیری از بروز برخی مشکلات در روش‌های عددی، نظیر ایجاد میدان عمق‌های غیرواقعی از یک شبکه‌ی جابجاشده طبق شکل (۱)، استفاده شده است [11].



شکل (۱): شبکه‌ی جابجا شده مورد استفاده.

برای منفصل‌سازی معادلات جبری در این مدل، از یک روش صریح استفاده شده است. با استفاده از این روش، ضمن برخورداری از سادگی برنامه‌ریزی در حل معادلات و عدم نیاز به روش خاصی برای مرتبط‌کردن میدان سرعت و عمق، می‌توان عمق را مستقیماً از معادله پیوستگی و سرعت‌ها را از معادلات اندازه حرکت به دست آورد. همچنین در این مدل ریاضی از درون‌یابی خطی برای یافتن سرعت در وجوه حجم کنترل اندازه حرکت و از روش رانگ کوتای مرتبه‌ی دوم برای منفصل‌سازی مشتق‌های زمانی استفاده شده است. از آن جا که در روش صریح، تمام مقادیر متغیرها در گام زمانی قبل موجود است، می‌توان عمق آب را در گام زمانی بعد با معادله‌ی پیوستگی به شرح زیر به دست آورد [15]:

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n - \Delta t F_h^{n+\frac{1}{2}}(u, v, h) \quad (2)$$

همچنین از معادلات اندازه حرکت مقدار u و v در هر گام زمانی از مقادیر محاسبه‌شده پارامترها در گام زمانی قبل به دست می‌آیند:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{u_{i,j}^n \left[\frac{h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{2} \right] - \Delta t F_u^{n+\frac{1}{2}}(u, v, h, z)}{\left[\frac{h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right]} \quad (3)$$

$$V_{i,j}^{n+1} = \frac{v_{i,j}^n \left[\frac{h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{2} \right] - \Delta t F_v^{n+\frac{1}{2}}(u, v, h, z)}{\left[\frac{h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right]} \quad (4)$$

که در آن‌ها F_u ، F_v و F_h توابعی از u ، v ، h ، z هستند که از انتگرال‌گیری معادله‌ی پیوستگی و معادلات اندازه‌ی حرکت در جهت‌های x و y به دست می‌آیند.

شرایط مرزی

شرایط مرزی در ورودی و خروجی به حالت جریان بستگی دارد. در جریان زیر بحرانی، عمق در مرز خروجی به مدل داده می‌شود و عمق در مرز ورودی از داخل میدان حل برون‌یابی می‌شود. سرعت در جهت جریان در مرز ورودی با استفاده از عمق و هیدروگراف جریان ورودی در هر گام زمانی اعمال می‌شود. در مرز خروجی، سرعت با برنامه محاسبه می‌شود. مرزهای ورودی و خروجی باید در مکان‌هایی انتخاب شوند که سرعت در جهت عرضی صفر یا جهت جریان معلوم باشد. در جریان‌های فوق بحرانی، عمق و سرعت در مرز ورودی به برنامه داده می‌شود و گرادیان‌های عمق و سرعت در مرز خروجی صفر فرض می‌شود. در دیواره‌های دوطرف، شرایط لغزش آزاد در نظر گرفته شده و گرادیان عمق و سرعت عمود بر مرزها، صفر فرض شده است. این فرض تقریب زیادی ندارد؛ زیرا در مدل‌های متوسط‌گیری شده در عمق، اصطکاک دیواره‌ها در مقابل اصطکاک بستر آبراهه ناچیز است. بنابراین می‌توان تنش برشی روی مرز صلب را صفر در نظر گرفت.

شرط پایداری

در روش‌های صریح، پایداری حل با عدد کورانت مشخص می‌شود. عدد کورانت در یک جریان یک‌بعدی برابر است با حاصل تقسیم سرعت واقعی موج به سرعت عددی آن [1]:

$$C_n = \frac{(u+c)\Delta t}{\Delta x} \quad (5)$$

که در آن u سرعت جریان و c سرعت موج است. برای پایداری روش عددی باید C_n کوچکتر یا مساوی یک باشد. در حالت دوبعدی شرط فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت [12]:

$$C_n = \frac{\Delta t \left[|u\Delta y| + |v\Delta x| + c \right]}{\Delta x \Delta y}$$

با توجه به استفاده از روش درون‌یابی خطی برای یافتن سرعت در وجوه حجم کنترل، در صورتی که عدد رینولدز شبکه یا عدد پکلت بزرگتر از ۲ باشد، جواب‌ها با وجود پایداری، حول یک مقدار نوسان خواهد داشت. برای جلوگیری از چنین نوسانات غیرواقعی شرط زیر همواره باید برقرار باشد [11]:

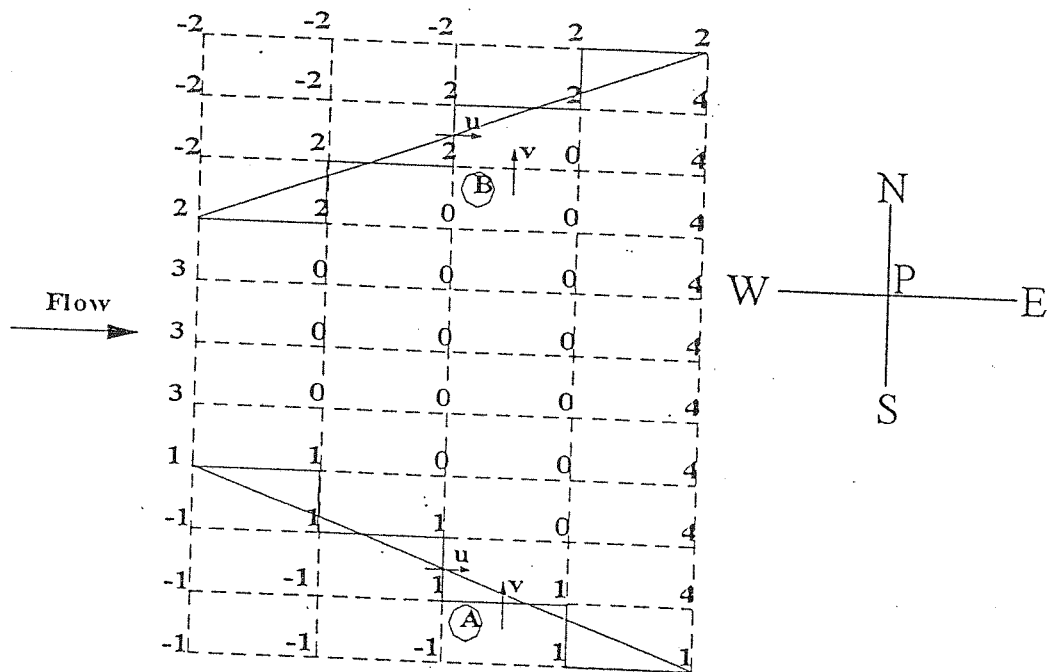
$$P_e = \frac{u\Delta x}{v_t} \leq 2$$

برای تأمین این شرط یا باید اندازه‌ی حجم‌های کنترل را کوچک در نظر گرفت، که با توجه به عدد کورانت و شرط پایداری گام زمانی نیز بسیار کوچک و بار محاسباتی سنگین می‌شود و یا v_t موجب را به گونه‌ای انتخاب کرد که شرط فوق برقرار شود. در مواردی که تغییرات سطح آب، بسیار تدریجی است، اعمال یک عدد بزرگتر از حد برای v_t موجب افزایش قابل ملاحظه‌ای در تنش‌های آشفتگی و نتایج حل نموده، لیکن در مواردی مانند تحلیل جریان دور پایه‌های پل و یا نوک آب‌شکن‌ها و یا جریان‌های چرخشی قوی، جواب‌ها با خطا همراه خواهد شد. در چنین شرایطی می‌توان با استفاده از روش‌های درون‌یابی دیگر مثل هیبرید، شرط کوچکتر از ۲ بودن عدد پکلت را حذف کرد.

معرفی مرزهای جریان

برای معرفی مرزهای پلکانی به مدل، به هر دسته از نقاط، شماره‌ی مشخصی داده می‌شود. شکل (۲) نحوه‌ی شماره‌گذاری نقاط شبکه حل را برای یک هندسه فرضی نشان می‌دهد.

همان گونه که در شکل دیده می‌شود، نقاط واقع بر روی مرز ساحل راست با شماره‌ی ۱، نقاط واقع بر روی مرز ساحل چپ با شماره‌ی ۲، مرز ورودی با شماره‌ی ۳ و مرز خروجی با شماره‌ی ۴ مشخص شده‌اند. نقاط واقع در داخل میدان حل دارای شماره‌ی صفر و نقاطی که در محدوده‌ی خارج از میدان حل قرار می‌گیرند، در صورتی که در مجاورت ساحل راست باشند، با شماره‌ی ۱ و در ساحل چپ با شماره ۲، مشخص می‌شوند.



شکل (۲): نحوه شماره‌گذاری نقاط شبکه حل.

مدل با استفاده از هندسه‌ی معرفی‌شده به روش فوق، به حل معادلات جریان در هریک از نقاط شبکه می‌پردازد. در صورتی که شماره‌ی نقطه، نشان‌دهنده‌ی قرارگرفتن آن نقطه بر روی یکی از مرزها باشد، شرایط مرزی ذکرشده در بخش قبل درباره‌ی آن اعمال خواهد شد. چنانچه نقطه‌ی P مثلاً بر روی مرز ساحل راست جریان به‌گونه‌ای قرار گرفته باشد که نقطه E، نقطه مرزی و نقطه W خارج از میدان حل و نقطه N نیز نقطه مرزی باشد (مانند نقطه A در شکل (۲))، پارامترهای مورد نیاز در طرف W نقطه‌ی A، با استفاده از شرایط دیواره‌های دارای لغزش آزاد، از داخل میدان حل به دست می‌آید. مقدار مؤلفه‌های سرعت در جهات افقی و قائم نیز در این نقطه صفر است. به همین ترتیب چنان چه نقطه P مثلاً بر روی مرز ساحل چپ جریان به‌گونه‌ای قرار گرفته باشد که نقطه‌ی W، نقطه‌ی مرزی و نقطه‌ی E داخل میدان حل و نقطه N نیز نقطه مرزی باشد (مانند نقطه B در شکل (۲))، پارامترهای مورد نیاز در طرف W نقطه B با استفاده از شرایط دیواره‌های با لغزش آزاد از داخل میدان حل به دست می‌آید. مقدار مؤلفه‌ی سرعت در جهت افقی در این نقطه برابر با صفر خواهد بود و مقدار مؤلفه‌ی سرعت در جهت قائم با استفاده از مقادیر معلوم در نقاط مجاور از حل معادلات محاسبه می‌شود.

نقاط خارج از میدان حل تنها برای معرفی یک شبکه‌ی منظم منطبق بر دستگاه کارترین در نظر گرفته شده‌اند و هیچ محاسبه‌ای برای آنها اجرا نمی‌شود.

برای شبکه‌بندی میدان حل، از نرم‌افزار Autocad14 استفاده شده است. با در نظر گرفتن Δx و Δy مورد نظر، میدان حل شبکه‌بندی می‌شود و مرزهای پلکانی با توجه به برازش بهترین نقاط برای شبیه‌سازی مشخص می‌شوند. سپس با توجه به قواعد شماره‌گذاری هر نقطه، کد مشخصه هر نقطه، تعیین و فایل ورودی برای معرفی میدان حل تشکیل می‌شود.

الگوریتم برنامه

از آن جا که مدل تهیه شده یک مدل صریح است، مقادیر متغیرها در هر مقطع زمانی با استفاده از مقادیر معلوم در مرحله‌ی زمانی پیش تعیین می‌شود. در شروع محاسبات، گام زمانی، لزجت گردابه‌ای، شیب کف، عمق آب در مرز خروجی (جریان زیر بحرانی)، عمق اولیه‌ی آب برای تمام نقاط و همچنین تغییرات دبی در زمان در مرز ورودی به مدل معرفی می‌شود. در جریان‌های دائمی، تغییرات دبی به صورت تدریجی از مقدار صفر در زمان شروع محاسبات به مقدار ثابت آن صورت می‌گیرد. شکل (۳) نمودار گردشی مدل ریاضی را نشان می‌دهد.

نتایج به دست آمده از مدل

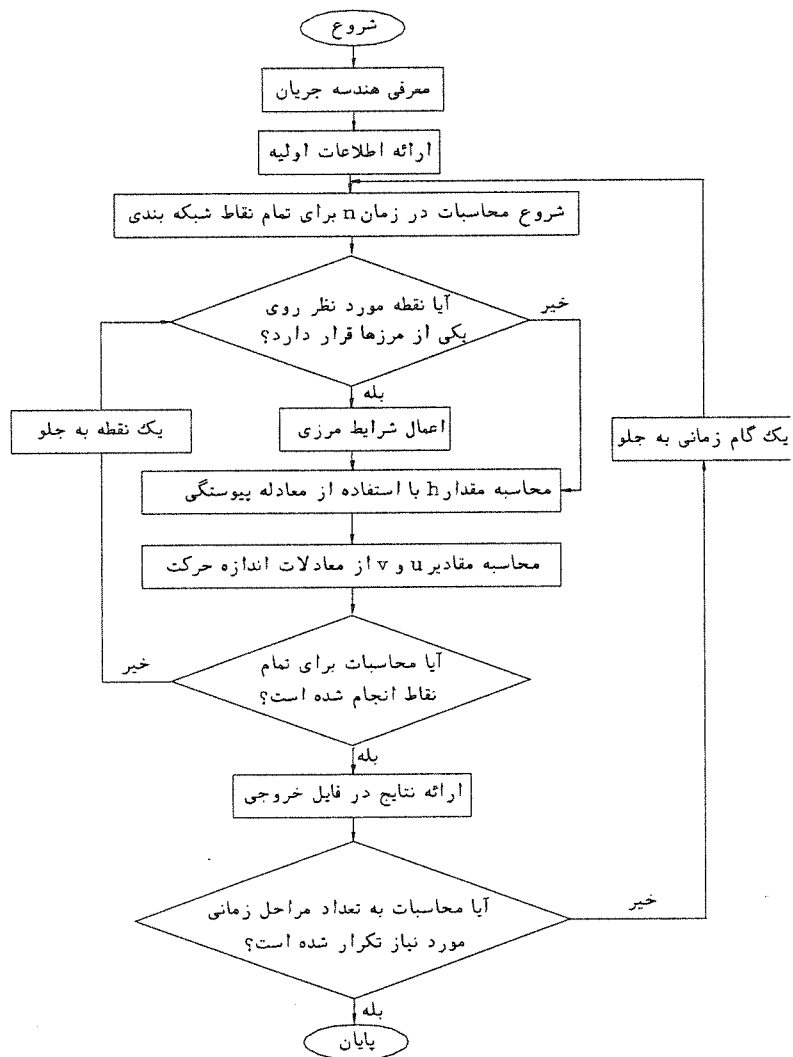
مواردی که با مدل ریاضی بررسی شده‌اند، عبارتند از: بررسی جریان در یک کانال مستقیم با کف سینوسی (تغییرات رقوم کف کانال)، تحلیل وضعیت جریان در یک مخزن با انتهای بسته در اثر ورود یک موج سینوسی (جریان غیردائمی)، جریان در یک بازشدگی ناگهانی (جریان دو بعدی)، بررسی جریان یکنواخت در یک کانال مستطیلی مایل در پلان (شرایط مرزی پلکانی) و جریان در یک کانال با پیچ‌های متوالی (شرایط مرزی دارای انحنا).

جریان زیر بحرانی در یک کانال مستطیلی با کف سینوسی

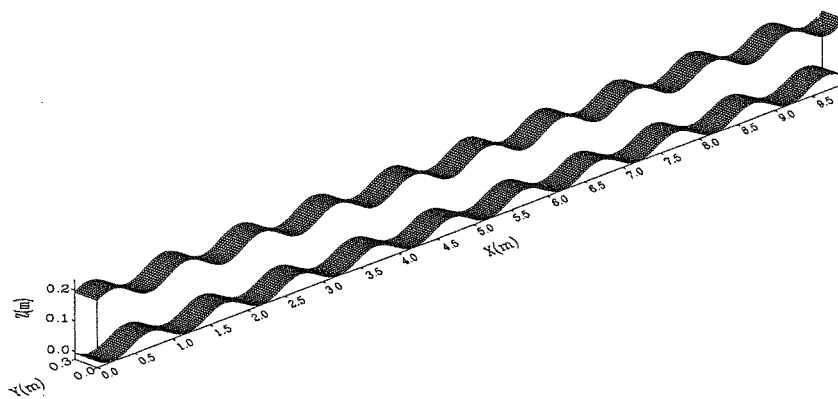
در این حالت، وضعیت جریان در یک کانال مستطیلی به عرض 0.3 متر و طول 10 متر که کف آن از یک معادله سینوسی به شرح زیر تبعیت می‌کند، بررسی شده است:

$$Z_b = 0.025 \sin 2 \pi x$$

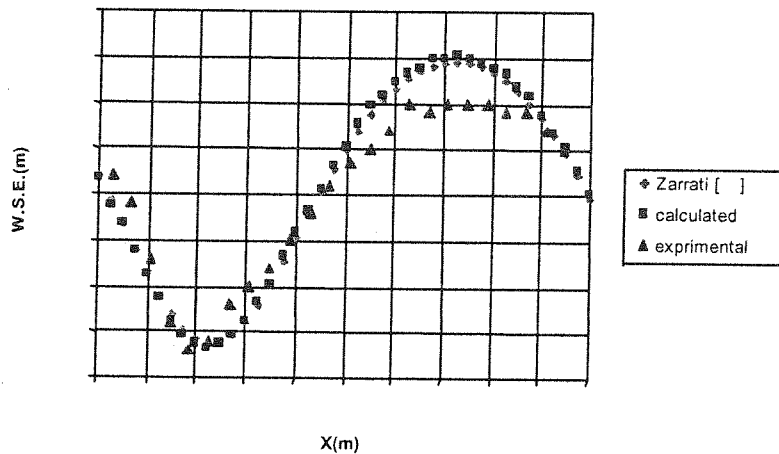
که در آن Z_b ارتفاع کف کانال نسبت به مبدأ و x فاصله‌ی افقی تا مبدأ است. دبی کانال $24/57$ لیتر بر ثانیه و ضریب زبری شزی $62/9$ در نظر گرفته شده است. شیب کلی کف کانال 0.003 و عمق آب در پایین دست $18/45$ سانتیمتر ثابت فرض شده است. شبکه‌بندی با فواصل Δx برابر با 0.25 متر و Δy برابر با 0.3 متر، گام زمانی Δt برابر با 0.1 ثانیه و لزجت گردابه‌ای 0.1 در نظر گرفته شده است. در این صورت، عدد کورانت و پکلت جریان به ترتیب 0.7 و $1/1$ محاسبه خواهد شد. با توجه به عدد فرود جریان برابر با 0.23 ، جریان در کانال، زیر بحرانی است و بر اساس منحنی انرژی مخصوص در جریان‌های زیر بحرانی، افزایش ارتفاع کف کانال، باعث کاهش سطح آب خواهد شد. پروفیل سطح آب به دست آمده در کانال نیز نشان‌دهنده‌ی برقراری چنین جریان‌هایی در کانال است؛ به گونه‌ای که منحنی تراز سطح آب در کانال نسبت به منحنی کف کانال تغییر فاز دارد. (شکل (۴)). شکل (۵) نتایج حاصل از اجرای مدل و مقایسه‌ی این نتایج را با دو مدل فیزیکی [13] و عددی [14] نشان می‌دهد. در این شکل تغییرات تراز سطح آب در یک بازه‌ی یک متری در طول کانال ارائه شده است. مقایسه‌ی نتایج مدل حاضر با نتایج مدل فیزیکی، خطای حداکثری به میزان 0.5% را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده‌ی صحت کار مدل عددی است.



شکل (۳): نمودار گردش ریاضی مدل ریاضی.



شکل (۴): وضعیت سه بعدی جریان در یک کانال مستطیلی با کف سینوسی.



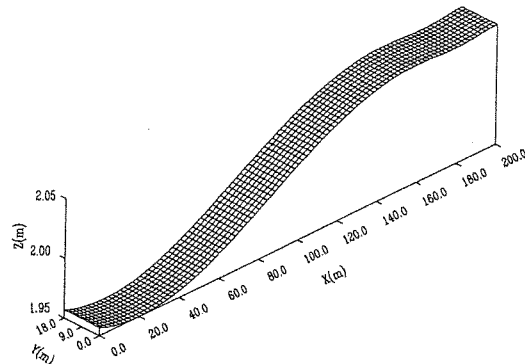
شکل (۵): مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از مدل با نتایج آزمایشگاهی و عددی مشابه.

موج سینوسی در یک مخزن با انتهای بسته

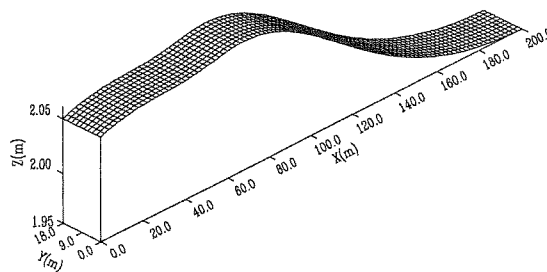
در این حالت، یک حوضچه به طول ۲۰۰ و عرض ۱۸ متر با انتهای بسته در نظر گرفته شده است، که یک موج سینوسی با دامنه‌ی موج ۰/۱ متر و دوره‌ی تناوب ۶۰ ثانیه وارد آن می‌شود. تراز سطح آب در بالادست طبق معادله‌ی زیر اعمال شده است:

$$\xi = 0.05 \sin \frac{2\pi t}{60}$$

که در آن ξ ارتفاع موج و t زمان است. مقادیر Δx و Δy برابر با ۲/۰ متر و Δt برابر با ۰/۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. عمق آب در مخزن، ۲ متر فرض شده که طبق روابط تئوری، سرعت موج برابر با $C = \sqrt{gh} = 4/429$ متر بر ثانیه را خواهد بود. طبق نتایج به دست آمده از مدل، اولین موج در ۴۵ ثانیه طول ۲۰۰ متری مخزن را طی می‌کند و به انتهای آن می‌رسد. بنابراین سرعت موج برابر است با $C = \frac{L}{t} = 4/44$ ، که خطای آن در حد ۰/۲٪ است. همچنین نتایج به دست آمده از مدل عددی، نشان‌دهنده‌ی تشکیل موج ساکنی با ارتفاعی دو برابر ارتفاع موج اصلی پس از برخورد موج به انتهای بسته مخزن است که تطابق کاملی با نظریه امواج دارد. در این آزمایش نیز تغییرات لزجت گردابه‌ای در محدوده‌ی پایداری روش عددی به علت ارتفاع کم موج و گرداب‌های کوچک سرعت تأثیر چندانی بر جواب‌ها نخواهد داشت. با در نظر گرفتن لزجت گردابه‌ای برابر با ۲، عدد کوران و پیکت جریان به ترتیب ۰/۲ و ۰ محاسبه می‌شوند. نتایج به دست آمده در اشکال (۶) و (۷) نشان داده شده‌اند.



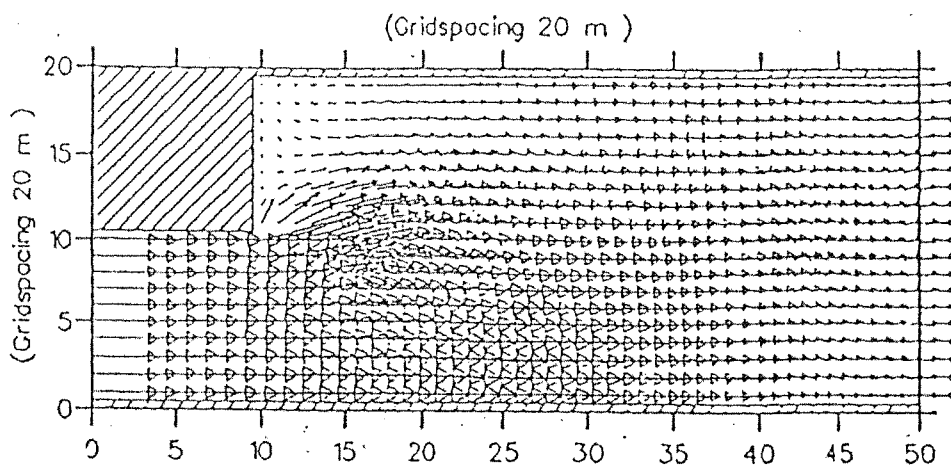
شکل (۶): وضعیت سه بعدی موج پس از ۴۵ ثانیه.



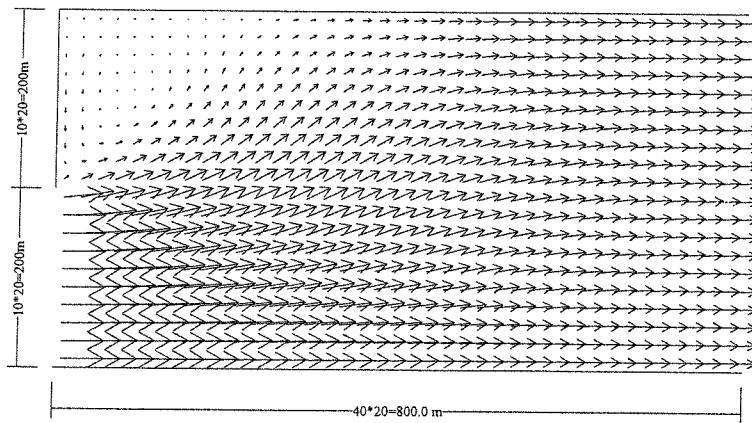
شکل (۷): وضعیت سه بعدی موج پس از برگشت.

بازشدگی ناگهانی

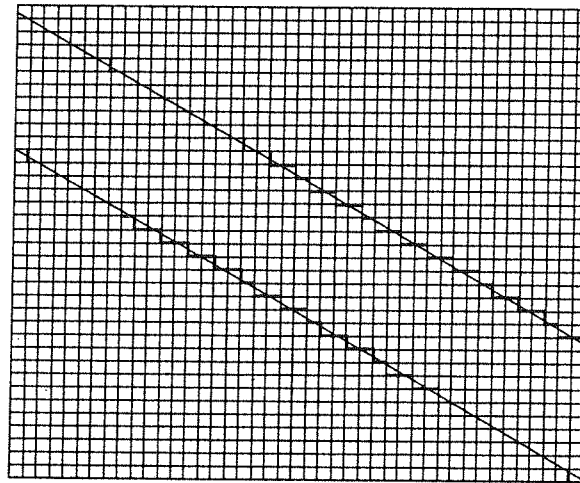
در این قسمت، وضعیت جریان در یک کانال مستطیلی که در طول آن به طور ناگهانی یکی از دیوارها عقب‌نشینی می‌کند و عرض کانال افزایش می‌یابد، بررسی شده است. ریاحی [16] یک کانال مستطیلی را به عرض ۲۰۰ متر و طول ۱۰۰۰ متر که عرض آن در محل بازشدگی به ۴۰۰ متر افزایش می‌یافت با مدل تجاری MIKE21، که در سطح بین‌المللی مدلی شناخته شده است، تحلیل کرد. دبی ورودی به کانال ۱۰۰۰ مترمکعب در ثانیه و عمق آب در پایین دست ۱۰ متر در نظر گرفته شده است. ضریب سزی در این کانال برابر با ۶۰ و لزجت گردابه‌ای برابر با ۵ متر مربع بر ثانیه فرض شد. نتایج به دست آمده از مدل MIKE21 توسط ریاحی در شکل (۸) نشان داده شده است. برای تحلیل این جریان یک شبکه‌ی مستطیلی منظم به ابعاد Δx و Δy برابر با ۲۰ متر، گام زمانی Δt برابر با ۰/۵ ثانیه در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از اجرای مدل عددی در شکل (۹) ملاحظه می‌شود. همان گونه که از مقایسه دو شکل (۸) و (۹) مشخص است، مدل عددی حاضر تطابق خوبی با مدل عددی MIKE21 از حیث به دست آوردن الگوی جریان دارد. مطابق این نتایج، یک منطقه‌ی چرخش پس از بازشدگی به وجود می‌آید؛ هر چند طول چرخش محاسبه شده، با مدل حاضر حدود ۱۰ درصد عرض کانال بیشتر از مقدار مشابه بدست آمده از مدل عددی MIKE21 است. باید توجه داشت که به علت سرعت‌های کم جریان در انتهای منطقه، چرخش خطاهای جزئی در روش‌های عددی می‌تواند به جابه‌جایی ناحیه‌ی چرخش بینجامد. با توجه به الگوی جریان به دست آمده با مدل حاضر و تطابق آن با مدل MIKE21 می‌توان صحت کار مدل را تایید کرد.



شکل (۸): نتایج حاصل از اجرای مدل MIKE21 [16].



شکل (۹): نمایش بردارهای سرعت در بازشدگی ناگهانی در یک طرف کانال.



شکل (۱۰): شبکه بندی یک کانال مستطیلی مایل در پلان.

برقراری جریان در یک کانال مستطیلی مایل در پلان

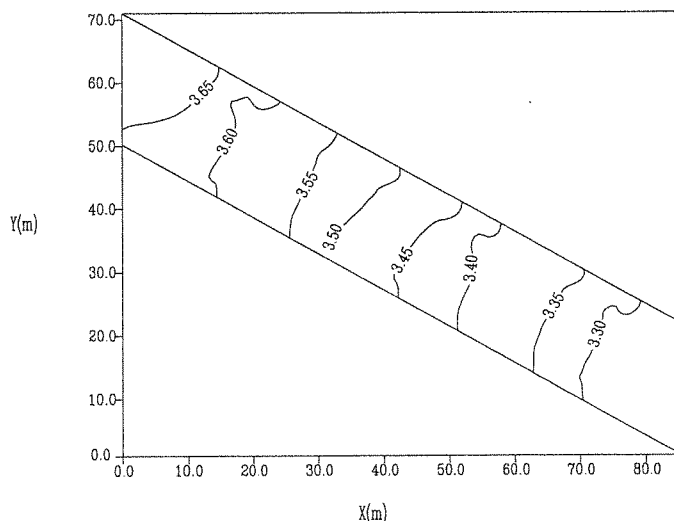
در این قسمت، یک کانال مستطیلی با دبی ۱۰۰ مترمکعب بر ثانیه، شیب ۰/۰۰۰۲، عرض ۱۸ متر و ضریب شزی ۸۱/۲۷ که به صورت مایل و با زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به محور x ها قرار داده شده است، بررسی شد. با توجه به معادله شزی، عمق نرمال آب در این کانال ۳/۲۸۲ متر است که این عمق به عنوان عمق پایاب به مدل معرفی شده است. بنابراین انتظار می رود که مدل همین عمق را در سراسر کانال پیش بینی کند. با توجه به مرز مایل کانال، هندسه‌ی مرزها با استفاده از پله‌های عمود برهم و به صورت یک شبکه بندی به شکل (۱۰) به مدل معرفی شده اند. شبکه بندی منظم با ابعاد Δx و Δy برابر با ۲ متر، گام زمانی Δt برابر با ۰/۰۱ و لزجت گردابه‌ای ثابت برابر با یک مترمربع بر ثانیه در نظر گرفته شده است. در این حالت، جریان از حالت ساده‌ی یک بعدی خارج و هر دو مؤلفه u و v سرعت در محاسبات وارد می شوند. همان گونه که شکل (۱۱) منحنی‌های هم عمق را در طول کانال نشان می دهد، پروفیل سطح آب در کانال به گونه‌ای تشکیل می شود که سطح آب در بالادست افزایش پیدا کند. عدم برقراری عمق نرمال در این حالت نشان دهنده‌ی اثر مرزهای پلکانی است.

وجود این پله‌ها در مقابل جریان، مثل یک مانع عمل می کند و باعث پس زدن آب می شود. با اجرای آزمایش حساسیت روی

جملات مختلف معادله‌ی اندازه حرکت مشخص شد که ترم $v_t \frac{\partial^2 hu}{\partial x^2}$ در وجه بالادست هر پله، عامل اعمال نیرو به جریان و

افزایش کاذب عمق به طرف بالادست است.

مسئله کاهش V_f تا حد ممکن می‌توانست به کاهش اثرات این ترم کمک کند؛ لیکن به علت رعایت شرایط پایداری در مدل، کاهش زیاد میزان V_f مقدور نیست. در ضمن، در شرایط جریان آشفته، مقدار V_f زیاد است و نمی‌توان آنرا به صورت دلخواه کاهش داد.



شکل (۱۱): منحنی‌های هم‌عمق در یک کانال مستطیلی مایل در پلان.

برای بررسی عوامل مؤثر بر نتایج، تأثیر نسبت عرض مجرا به عمق $(\frac{B}{y})$ ، مقدار سرعت جریان (V) ، عدد فرود (Fr) و اندازه‌ی ابعاد شبکه‌ی نقاط تولیدشده $(\Delta x$ و $\Delta y)$ بر پیش‌بینی سطح آب بررسی شده و نتایج در جدول (۱) ارائه شده است. در شرایط اولیّه، نسبت عرض مجرا به عمق جریان ۵/۵، سرعت جریان ۱/۷ متر بر ثانیه و عدد فرود ۰/۳ است.

در حالت "الف" با حفظ مقادیر سرعت و عمق، عرض مجرا از ۱۸ متر به ۹ متر کاهش و در حالت "ب" با ثابت نگه داشتن مقادیر سرعت جریان و عرض مجرا، عمق جریان از ۳/۲۸ متر به ۵ متر افزایش یافته است. در این شرایط، نسبت عرض مجرا به عمق جریان به ترتیب با ۵۰ و ۳۵ درصد کاهش نسبت به حالت اولیّه برابر با ۲/۲۴ و ۳/۶ و عدد فرود جریان ۱/۳ و ۰/۲۴ است. همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود، خطای محاسبه‌ی عمق نرمال افزایش می‌یابد. اجرای مدل در دو حالت "الف" و "ب" مؤید تأثیر نسبت عرض مجرا به عمق جریان در نتایج حاصله است؛ به گونه‌ای که با کاهش این نسبت خطا افزایش می‌یابد.

برای بررسی میزان تأثیر سرعت جریان با حفظ مقادیر عمق و عرض، سرعت جریان در حالت "ج" با فرض برقراری جریان یکنواخت ۳/۴ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. طبق جدول (۱)، نتایج، نشان‌دهنده‌ی افزایش شدید خطای محاسباتی نسبت به شرایط اولیّه هستند. سرعت جریان در این حالت، نسبت به حالت اولیّه دوبرابر می‌شود و عدد فرود جریان نیز به ۰/۶ می‌رسد. در نتیجه می‌توان گفت، افزایش سرعت، اثر مستقیمی بر افزایش خطا دارد.

برای بررسی تأثیر ابعاد شبکه‌بندی در جهت قائم، کانال با مشخصات هیدرولیکی و هندسه‌ی اولیّه در حالت "د" به گونه‌ای شبکه‌بندی شده است که مقدار Δx همانند قبل برابر با ۲ متر و مقدار Δy به ۳ متر افزایش پیدا کند. نتایج، نشان‌دهنده‌ی تغییرات اندک در محاسبات است. در نتیجه می‌توان گفت در حد تغییرات ایجادشده، اندازه‌ی شبکه در جهت قائم، اثر تعیین‌کننده‌ی بر خطا ندارد.

با توجه به وجود گرادیان u در جهت x در نزدیکی پله‌ها که نشان‌دهنده‌ی میزان کاهش مقدار عددی u در فاصله‌ای بین نقطه‌ای در میدان حل به صفر در روی وجه پله‌ها در جهت y است، این گرادیان، عامل ایجادکننده‌ی خطا تشخیص داده شده است.



برای بررسی میزان تأثیر طول این فاصله، در حالت "ه" با حفظ مشخصات اولیه‌ی هیدرولیکی کانال، مقدار Δx به ۳ متر افزایش داده شده است. همان گونه که دیده می‌شود، افزایش ابعاد شبکه‌بندی در جهت x ، خطای محاسباتی را نسبت به حالت اولیه اندکی کاهش می‌دهد. این نتیجه بیان‌گر آن است که ابعاد شبکه در جهت افقی، در حد تغییرات ایجاد شده، نیز تأثیر شدیدی بر نتایج نخواهد داشت.

مقایسه‌ی نتایج حاصل از اجرای مدل در شرایط "الف" و "ب" نشان می‌دهد که در صورت ثابت بودن سرعت جریان، کاهش نسبت $\frac{B}{y}$ (عرض به عمق) باعث افزایش خطا خواهد شد. از سویی با استناد به شرایط "ج" می‌توان مشاهده کرد که در نسبت‌های ثابت $\frac{B}{y}$ ، افزایش سرعت جریان نیز خطای محاسباتی را افزایش می‌دهد.

اگر برای بدون بعد کردن پارامتر سرعت از عدد فرود جریان استفاده کنیم، نتایج حاکی از آن است که افزایش سرعت، در صورت ثابت نگه داشتن عمق، باعث افزایش عدد فرود و افزایش خطا خواهد شد. برای بررسی تأثیر عدد فرود به عنوان یک عامل کنترل‌کننده، با فرض ثابت بودن فرود جریان به مقدار ۰/۶، نسبت عرض مجرا به عمق جریان از ۵/۵ در حالت "ج" به ۱۲ در حالت "و" افزایش داده شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود، میزان خطا نسبت به حالت "ج" کمتر است. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که عدد فرود، عامل کنترل‌کننده نیست، بلکه سرعت جریان، همراه با نسبت $\frac{B}{y}$ در میزان خطا مؤثر است.

برای یافتن یک رابطه‌ی بدون بعد برای سرعت، در حد قابل قبولی که نتایج مطلوب بدهد، با توجه به تأثیر پارامتر عرض جریان و همچنین رابطه‌ی مستقیم سرعت و عمق جریان، پارامتر بدون بعد $\frac{V}{\sqrt{gB}}$ تعریف شده است. با توجه به آنالیز حساسیت اجرا شده

مشاهده می‌شود که با کاهش این پارامتر بدون بعد، همراه با افزایش نسبت $\frac{B}{y}$ ، خطا تا حد زیادی کاهش می‌یابد و نتایج به سمت

جواب قابل قبول نزدیک می‌شود. بررسی روند تغییرات نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که در شرایط موجود برای نسبت‌های $\frac{B}{y}$

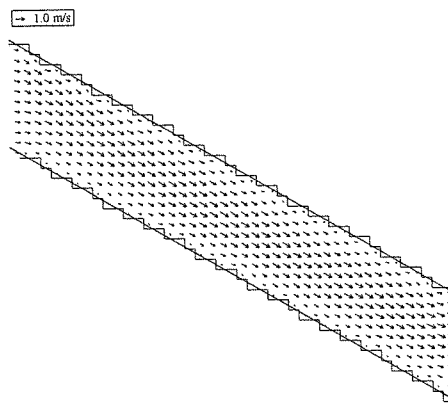
بزرگتر از ۱۰ و پارامتر بدون بعد $\frac{V}{\sqrt{gB}}$ کوچکتر از ۰/۱، نتایج از دقت مناسبی برخوردارند. البته باید توجه داشت مقدار خطا با V_f

و هندسه‌ی آبراهه تغییر می‌کند.

جدول (۱): بررسی عوامل مؤثر بر روی دقت نتایج حاصل از مدل.

خطا (%)	Δy	Δx	$\frac{V}{\sqrt{gB}}$	$\frac{B}{y}$	Fr	V (m/s)	y (m)	B (m)	حالت اجرای مدل
۹/۷	۲	۲	۰/۱۳	۵/۵	۰/۳	۱/۷	۳/۲۸۲	۱۸	شرایط اولیه
۴۰	۲	۲	۰/۱۸	۲/۷۴	۰/۳	۱/۷	۳/۲۸۲	۹	الف
۲۸	۲	۲	۰/۱۳	۳/۶	۰/۲۴	۱/۷	۵	۱۸	ب
۶۱	۲	۲	۰/۲۵	۵/۵	۰/۶	۳/۴	۳/۲۸۲	۱۸	ج
۹	۳	۲	۰/۱۳	۵/۵	۰/۳	۱/۷	۳/۲۸۲	۱۸	د
۶	۲	۳/۵	۰/۱۳	۵/۵	۰/۳	۱/۷	۳/۲۸۲	۱۸	ه
۳۳	۲	۲	۰/۱۷	۱۲	۰/۶	۲/۳	۱/۵	۱۸	و
۲۲/۵	۲	۲	۰/۱	۹	۰/۳	۱/۴	۲	۱۸	آنالیز حساسیت I
۱۹/۴	۲	۲	۰/۰۹	۱۰	۰/۳	۱/۲	۱/۸	۱۸	آنالیز حساسیت II
۴	۲	۲	۰/۰۸	۱۲	۰/۲۸	۱/۱	۱/۵	۱۸	آنالیز حساسیت III

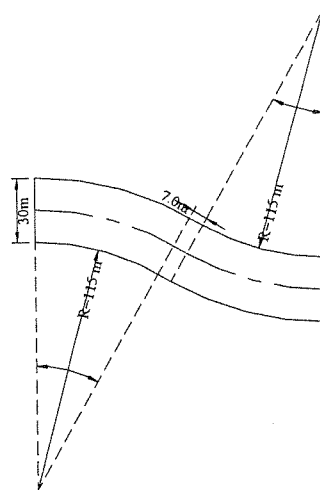
با توجه به نتایج حاصل، کانال مستطیلی مایل مفروض با رعایت حدود به دست آمده برای پارامترهای مؤثر، برای عرض ۱۸ متر، دبی جریان ۳۰ مترمکعب بر ثانیه و شیب کف کانال ۰/۰۰۰۲ تحلیل شده است. طبق رابطه‌ی شزی در این شرایط، عمق نرمال کانال برابر با ۱/۵ متر است. با توجه به شرایط در نظر گرفته شده، نسبت $\frac{B}{y}$ برابر با ۱۲ و با توجه به مقدار سرعت متوسط جریان در کانال برابر با ۱/۱ متر بر ثانیه، پارامتر $\frac{V}{\sqrt{gB}}$ برابر با ۰/۰۸ محاسبه می‌شود. پس از اجرای مدل، مشاهده شد که خطا در محاسبات بسیار کاهش می‌یابد و عمق نرمال آب با حداکثر اختلاف حدود ۰/۴٪ در طول کانال بدست می‌آید. دقت در محاسبه‌ی سرعت جریان نیز در همین حدود است. نتایج حاصل در شکل (۱۲) نشان داده شده است.



شکل (۱۲): نمایش برداری سرعت جریان در یک کانال مستطیلی مایل در پلان.

جریان در یک کانال با پیچ‌های متوالی

در این حالت، عملکرد مدل در شبیه‌سازی جریان، در یک کانال با پیچ‌های متوالی در نقشه بررسی شده است. شکل (۱۳) ابعاد هندسی کانال را نشان می‌دهد.



شکل (۱۳): ابعاد هندسی کانال با پیچ‌های متوالی.

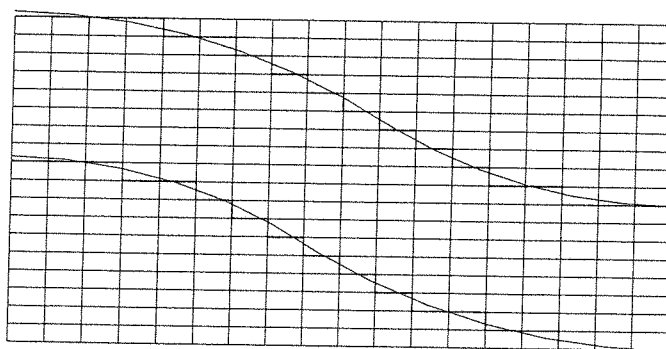
شیب کف کانال ۰/۰۰۰۱، ضریب شزی ۷۴/۵ و دبی جریان ۶۰ مترمکعب بر ثانیه است. عمق آب در پایین دست، ثابت و برابر با عمق نرمال کانال به مقدار ۲ متر است. شبکه‌بندی مستطیلی با ابعاد Δx برابر با ۷/۵۵ متر و Δy برابر با ۳/۷۵ متر، Δt برابر با ۰/۱

ثانیه و لزجت گردابه‌ای ثابت برابر ۴ مترمربع بر ثانیه در نظر گرفته شده است. در این شرایط، مقدار پارامتر $\frac{B}{y}$ برابر با ۱۵ و $\frac{V}{\sqrt{gB}}$

برابر با ۰/۰۶ محاسبه می‌شود. طبق نظریه جریان، عمق جریان باید در محور کانال ثابت و برابر با عمق نرمال باشد؛ همچنین عمق جریان در تحدب و تقعر پیچ به مقدار Δh به ترتیب نسبت به عمق نرمال افزایش و کاهش پیدا کند. مقدار Δh از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta h = \frac{v^2}{gr_c}$$

که در آن v ، سرعت متوسط جریان، g ، شتاب ثقل، r_c ، شعاع مرکزی پیچ و Δh مقدار کاهش یا افزایش عمق است. طبق این رابطه و شرایط هندسی و هیدرولیکی کانال مفروض، مقدار Δh برابر با ۰/۰۲ متر محاسبه می‌شود. شبکه بندی میدان حل در شکل (۱۴) نشان داده شده است. نتایج مدل عددی، مقدار عمق آب در تحدب پیچ را برابر با ۲/۰۱۴ متر به دست می‌دهد که نسبت به مقدار تئوری آن فقط ۱٪ خطا را نشان می‌دهد.



شکل (۱۴) شبکه بندی کانال با پیچ های متوالی.

خلاصه‌ی نتایج

در این مقاله، یک مدل ریاضی صریح برای حل معادلات دوبعدی متوسط‌گیری شده در عمق، در سیستم کارترین ارائه شده و در شرایط هندسه پیچیده مرزها آزمایش شده است. مدل، غیردائمی است و در آن از روش حجم کنترل و شبکه‌ی جابجاشده در سیستم دستگاه کارترین و برای مدل سازی تنش‌های آشفتگی از لزجت گردابه‌ای ثابت استفاده شده است.

اجرای مدل در بررسی وضعیت جریان در یک کانال با منحنی کف سینوسی و مقایسه‌ی آن با نتایج آزمایشگاهی و یک مدل عددی ضمنی، نشان‌دهنده‌ی عکس‌العمل صحیح مدل در مدل سازی توپوگرافی کف مجراست. بررسی درستی عملکرد مدل در شبیه‌سازی جریان غیردائمی، با تحلیل ورود یک موج به حوضچه‌ای مستطیلی با انتهای بسته، صورت‌گرفت و نشان داده شد که نتایج حاصل با نظریه امواج هم‌خوانی مناسبی دارند. مدل سازی جریان دوبعدی نیز در یک کانال مستطیلی با بازشدگی ناگهانی بررسی شد. در این خصوص با مقایسه‌ی نتایج حاصل از اجرای مدل با مدل تجاری MIKE21، مشخص شد که مدل، قابلیت پیش‌بینی وضعیت جریان را در چنین شرایطی دارد.

برای معرفی مرزهای مایل از روش پله‌پله کردن استفاده، برای مطالعه‌ی رفتار جریان در چنین شرایطی ابتدا مدل در شرایط ساده یک کانال مستطیلی مایل در پلان اجرا شد، که نتایج حاصل، نشان‌دهنده‌ی ایجاد خطا در محاسبات به سبب وجود مرزهای پلکانی بود. با تغییر پارامترهای متفاوت مؤثر در ارائه نتایج مشاهده شد که با لزجت گردابه‌ای ثابت، با افزایش سرعت جریان، همچنین کاهش نسبت عرض به عمق جریان، خطای محاسباتی در چنین شرایطی افزایش می‌یابد. همچنین کاهش مقدار لزجت گردابه‌ای در محدوده‌ی پایداری، روش عددی خطای محاسباتی را کاهش خواهد داد. در این راستا مشخص شد، در شرایط آزمایش شده، اگر پارامتر بدون بُعد $\frac{V}{\sqrt{gB}}$ از ۰/۱ کوچکتر و نسبت عرض مجرا به عمق جریان از ۱۰ بزرگتر باشد، نتایج به دست آمده از

دقت مناسبی برخوردار است. کاربرد مدل در کانال‌های دارای پیچ، مؤید کارایی چنین مدلی در پیش‌بینی تراز سطح آب در چنین شرایطی است.

مراجع

- [1] Vreugdenhil, C., "Numerical Methods for Shallow Water Flow", Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, 1994.
- [2] Kuipers, J., and Vreugdenhil, C.B., "Calculation of two dimensional horizontal flow", Report S163, part 1, Delft Hydraulic Lab., Delft, The Netherlands, 1973.
- [3] Vreugdenhil, C. and Wijnbenga, J., "Computation of Flow Patterns in Rivers", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 108, No.11, November 1982.
- [4] Flaconer, R. and Owens P., "Numerical Simulation of Flooding and Drying in a Depth - Averaged Tidal Flow Model", Proceedings - Institution-of-Civil-Engineers, part 2, Vol. 38, 1987.
- [5] Tingsanchali, T: et al, "Stability Analysis of Two- Dimensional Depth-Averaged Model", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 115, No.9, 1989.
- [6] Chaudhry, H. and Molls, T., "Depth-Averaged Open Channel Flow Model", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 121, No.6, June, 1995.
- [7] Zho, J.G., "Velocity-Depth Coupling in Shallow-Water Flows", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 121, No.10, October 1995.
- [8] Ye, J. and Mc Corquodale, J., "Depth-Averaged Hydrodynamic Model in Curvilinear Collocated Grid", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 123, No.5, May 1997.
- [9] Lien, H.C., et. al, "Bend-Flow Simulation Using 2D Depth-Averaged Model", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 125, No.10, October 1999.
- [10] Klonidis, A.J., and Soulis, J.V., "An Implicit Scheme for Steady Two-Dimensional Free Surface Flow Calculations", JHR, Vol. 39, No. 4, pp. 393-402, 2001.
- [11] Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., "An Introduction to Computational Fluid Dynamics", Longman, 1995.
- [12] Tseng, M.H. and Chu C.R., "Two- Dimensional Shallow Water Flows Simulation Using TVD-Mac Cormack Scheme", Journal of Hydraulic Research, Vol. 38, No.2, 2000.
- [13] Mizumura, K., "Free - Surface Profile of Open - Channel Flow with Wavy Boundary", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 121, No.7, July 1995.
- [14] Zarrati, A.R. Development of a Numerical Model for Prediction of Flow in Rivers with Complex Geometry. Independent Project, Chancellery for Research, Amirkabir University of Technology, 2000.

[15] جهانفر، م. توسعه یک مدل ریاضی دو بعدی برای جریان آبهای کم عمق، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۷۹.

[16] ریاحی، م. تحلیل دو بعدی معادلات آب کم عمق بر روی شبکه نامنظم مثلثی با استفاده از روش احجام محدود، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۷۷.

