

کاربرد درونیابی اسپلاین درجه سه در روش مشخصه‌ها برای حل مسائل ضربه قوچ

علیرضا رستمی^۱، محمدرضا چمنی^۲، کیوان اصغری^۳
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

از دهه هفتاد تا امروز، روش مشخصه‌ها با شبکه ثابت بطور موفقیت‌آمیزی برای تحلیل شرایط میرائی جریان در شبکه‌ها و خطوط انتقال آب بکار رفته است. هنگام تحلیل میرائی جریان در شبکه‌ها و خطوط انتقال آب به علت عدم ارضاء کامل شرط کورانت، استفاده از روشهای درونیابی اجتناب‌ناپذیر است. بنابراین، روشهای درونیابی خطی و غیرخطی مختلفی توسط محققین ارائه شده که اکثر آنها ضمن آنکه در معادلات کلاسیک ضربه قوچ بکار رفته‌اند، بیشتر از دیدگاه نظری بررسی شده‌اند. در این تحقیق، روش درونیابی غیرخطی اسپلاین درجه سه روی خط مکانی، بعلاوه دو روش پیشنهادی درونیابی اسپلاین درجه سه روی خط زمانی، و نیز روش ترکیبی در معادلات کامل و تقریبی ضربه قوچ توسعه داده شده است. تمام روشهای درونیابی فوق در یک خط انتقال آب با سه لوله سری و با شرایط مرزی مخزن و شیر واقعی بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که تمام روشهای درونیابی در گامهای زمانی بسیار کوچک به یک جواب واحد می‌رسند. همچنین، در شرایطی که از گام زمانی بزرگ در تحلیل استفاده می‌شود، درونیابی‌های غیر خطی جوابهای بسیار بهتری نسبت به درونیابی خطی ارائه می‌کنند. در مجموع، بهترین روش درونیابی، از لحاظ دقت پردازش، درونیابی ترکیبی با استفاده از معادلات تقریبی، و از لحاظ دقت و زمان پردازش، درونیابی درجه سه روی خط زمانی بدون توجه به نوع معادلات (کامل یا تقریبی) ارزیابی شده است.

کلمات کلیدی

ضربه قوچ، جریان ناماندگار، جریان میرا، روش مشخصه‌ها، درونیابی اسپلاین درجه سه.

Application of Cubic-Spline Interpolation

Schemes in Method of Characteristics for

Water Hammer Analysis

K. Asghari
Assistant Professor
Department of Civil Engineering,
Isfahanan University of Technology

A. Rostami
Former Graduate Student
M. R. Chamani
Assistant Professor

ABSTRACT

Since 70's, the fixed-grid method of characteristics has been used successfully to analyze transient conditions in networks and pipeline systems. In analyzing transient flow, the use of an interpolation scheme is unavoidable, as the Courant number should be satisfied. Several interpolation schemes are introduced and used in solving water hammer classical equations. In this investigation, cubic-spline spatial-line interpolation scheme plus two new cubic-spline, time-line and combined interpolation schemes, are used to solve the approximate and complete water hammer equations. All interpolation schemes are used to analyze transient flow in a pipeline containing three series pipes with a reservoir and a valve. It is shown that for small time-steps, all interpolation schemes produce same results. For a large time-step, non-linear interpolation schemes perform better than the linear ones. The combined

^۱ کارشناس ارشد

^۲ استادیار

^۳ استادیار

interpolation scheme used to solve the approximate equations has the best accuracy. In terms of accuracy and computational time, the cubic-spline time-line interpolation performs the best for both approximate and complete water hammer equations.

KEYWORDS

Water hammer, unsteady flow, transient flow, method of characteristics, cubic-spline interpolation.

۱- مقدمه

ضربه قوچ^۱ پدیده‌ای است که در خطوط انتقال سیالات، در اثر تغییرات ناگهانی اندازه حرکت جریان در مجاری باز و بسته روی می‌دهد. این تغییرات اندازه حرکت به تغییرات فشاری تبدیل شده و به صورت موج‌های فشاری با سرعت زیاد در سیستم انتقال انعکاس می‌یابد، تا زمانی که موج‌های فشاری مستهلک گشته و از بین بروند. بنابراین، می‌توان آنرا یک جریان ناماندگار میرا که بین دو جریان ماندگار روی می‌دهد، نامگذاری کرد.

معمولاً مسائل ضربه قوچ با استفاده از نظریه الاستیک^۲ در حالت یک بعدی جریان حل می‌شوند [۱]. به کمک این نظریه، معادلات دیفرانسیل جزئی اندازه حرکت و پیوستگی در یک لوله نوشته شده و با بکارگیری روش مشخصه‌ها^۳، این دو معادله به دو معادله دیفرانسیل کامل زیر تبدیل می‌شوند [۱]:

$$C^+ : \frac{dV}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} - \frac{g}{a} V \sin \alpha + \frac{f}{2D} V|V| = 0 ; \quad \frac{ds}{dt} = V + a \quad (1)$$

$$C^- : \frac{dV}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{g}{a} V \sin \alpha + \frac{f}{2D} V|V| = 0 ; \quad \frac{ds}{dt} = V - a \quad (2)$$

که در آن V سرعت جریان، g شتاب ثقل، a سرعت انتشار موج، H هد فشار (پیزومتریک) جریان، α زاویه خط لوله با تراز افق، f ضریب دارسی - ویسباخ، D قطر لوله و t و s مؤلفه‌های زمانی و مکانی پارامترهای سرعت و هد فشار هستند. معادلات (۱) و (۲) بنام مشخصه‌های C^+ و C^- نامیده می‌شوند. اگر از جمله سوم و چهارم معادلات فوق صرف‌نظر شود، به ترتیب معادلات تقریبی و کلاسیک ضربه قوچ به دست می‌آید که روی مشخصه‌های $ds/dt = +a$ و $ds/dt = -a$ حل می‌شوند. معادلات بالا را می‌توان با تشکیل شبکه منظم (شبکه ثابت) یا نامنظم (منحنی‌های مشخصه) حل کرد. در بیشتر مسائل مربوط به سیستم‌های انتقال آب، از روش شبکه مختصات ثابت استفاده می‌شود. هنگامی که از برای تحلیل میرائی جریان در یک سیستم انتقال آب استفاده می‌شود، باید دو شرط اساسی ارضا شود:

۱- رعایت شرط پایداری در محاسبات: برای حصول این شرط باید عدد کورانت، $[C_r = (a+V)\Delta t/\Delta s]$ ، کمتر یا مساوی عدد یک گردد که در آن Δt گام زمانی و Δs گام مکانی است.

۲- شرط به‌کارگیری گام زمانی حداقل (گام زمانی در کوتاهترین لوله) در محاسبه عدد کورانت لوله‌ها، برای تبادل صحیح اطلاعات در مرزها (محل اتصال لوله‌ها به مخزن، شیر و بالعکس).

چون سرعت موج و طول لوله در هر یک از لوله‌ها متفاوت است، با اعمال دو شرط فوق عدد کورانت متفاوتی برای هر لوله بدست آمده و در نتیجه پای خطوط مشخصه‌ها در نقاط گرهی شبکه فرود نخواهد آمد. در چنین حالتی، فرم تفاضل محدود معادلات کامل ضربه قوچ برای بازه نشان داده شده در شکل (۱) به صورت زیر درمی‌آید [۱، ۲]:

$$C^+ : \frac{V_P - V_L}{\Delta t} + \frac{g}{a} \frac{H_P - H_L}{\Delta t} - \frac{g}{a} V_L \sin \alpha + \frac{f}{2D} V_L |V_L| = 0 ; \quad \frac{ds}{dt} = a + V_L \quad (3)$$

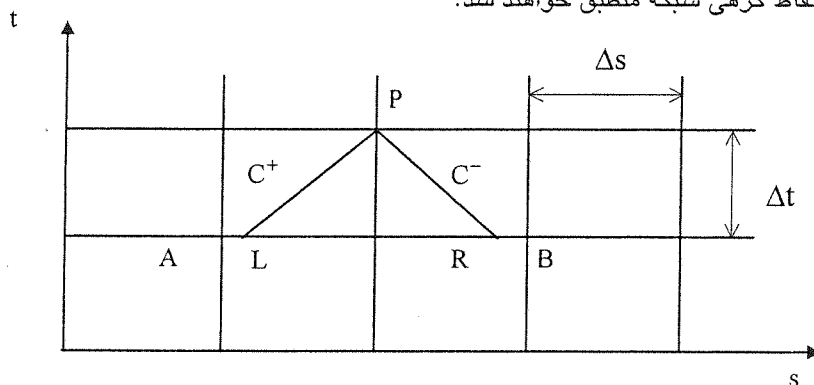
$$C^- : \frac{V_P - V_R}{\Delta t} - \frac{g}{a} \frac{H_P - H_R}{\Delta t} + \frac{g}{a} V_R \sin \alpha + \frac{f}{2D} V_R |V_R| = 0 ; \quad \frac{ds}{dt} = a - V_R \quad (4)$$

و یا:

$$V_P = \frac{1}{2} \left[(V_L + V_R) + \frac{g}{a} (H_L - H_R) + \frac{g}{a} \Delta t (V_L - V_R) \sin \alpha - \frac{f \Delta t}{2D} (V_L |V_L| + V_R |V_R|) \right] \quad (5)$$

$$H_P = \frac{1}{2} \left[(H_L + H_R) + \frac{a}{g} (V_L - V_R) + \Delta t (V_L + V_R) \sin \alpha - \frac{a f \Delta t}{g 2D} (V_L |V_L| - V_R |V_R|) \right] \quad (6)$$

معادلات (5) و (6) نشان می‌دهد که برای بدست آوردن مقادیر V_P و H_P باید با تمهیداتی مقادیر V_L ، V_R ، H_L و H_R را از طریق درونیابی (با دانستن مقادیر سرعت و هد فشار در C و B) بدست آورد. البته اگر از معادلات تقریبی ضربه قوچ در سیستم تک لوله‌ای استفاده شود، نیازی به درونیابی نخواهد بود؛ زیرا شیب خطوط مشخصه در این حال با هم برابر شده و در نتیجه L و R بر نقاط گرهی شبکه منطبق خواهند شد.



شکل (1): شبکه منظم s-t در روش کامل مشخصه‌ها.

1- تاریخچه کاربرد روش‌های درونیابی در تحلیل ضربه قوچ

اولین روش‌های درونیابی بر روی خط مکانی صورت پذیرفت. هرتری در سال ۱۹۵۸، درونیابی خطی مکانی را برای معادلات کلاسیک ضربه قوچ ارائه کرد و این روش درونیابی به نام وی معروف شد [۳]. در سال ۱۹۶۲، استریتر و لای از درونیابی هرتری در معادلات کامل ضربه قوچ، برای مقایسه نتایج آزمایشگاهی با روش مشخصه‌ها استفاده کردند. استریتر و لای آزمایش‌ها را در لوله‌های سری و منفرد از جنس مس با شرایط مرزی شیر و مخزن انجام داده و به این نتیجه رسیدند که نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها با مقادیر واقعی مطابقت دارد [۴]. اندازه‌گیریهای دیگری نیز توسط کاپلان و همکارانش در سال ۱۹۶۷ بر روی خطوط انتقال نفت و توسط واترز و همکارانش در سال ۱۹۷۷ بر روی لوله‌های PVC و پلاستیک مسلح شده در شرایط آزاد و مدفون صورت گرفت که روش محاسباتی مشخصه‌ها را تأیید می‌کردند [۵، ۶]. پرایس در سال ۱۹۷۴ و واردی در سال ۱۹۷۶ پیشنهاد دادند که روش هرتری ممکن است با دسترسی به نقاط مجاور اصلاح شود. این روش به نام درونیابی خطی مکانی واردی معروف شد [۳، ۷]. ویگرت و ساندکوئست در سال ۱۹۷۷ روش واردی را با استفاده از معادلات کلاسیک ضربه قوچ در یک لوله با شرایط مرزی شیر و مخزن به کار بردند و خطاهای هدردهی^۵ و پراکندگی^۶ را بررسی کرده و نتیجه گرفتند که روش واردی از روش هرتری مناسبتر است [۸]. در روش واردی برخلاف روش هرتری، اندازه تقسیمات هر جزء از سیستم (Δs) مانند گام زمانی بطور مستقل انتخاب می‌شود. بنابراین، تعداد گام دسترسی به نقاط مجاور نیز دلخواه است.

در سال ۱۹۶۴، استریتر مفهوم دسترسی به خط زمانی را برای اولین بار ارائه کرد که به روش درونیابی خطی زمانی ریچبک^۶ معروف شد [۹]. سپس، تریکا در سال ۱۹۷۷ این روش را برای حل مسائل سیستم‌های چند لوله‌ای بکار برد [۳]. روش دیگر، درونیابی خطی زمانی ضمنی^۷ است که توسط اسپنسر و ناکامورا در سال ۱۹۷۳، ناکامورا و همکارانش در سال ۱۹۷۵ و ادنهوفر و اشمیتز در سال ۱۹۸۰ توسعه یافته و برای حل مسائل مختلف استفاده شد. روش ضمنی بدون قید و شرط پایدار است؛ بنابراین، می‌توان از این روش در تحلیل میراثی‌های آرام که به گام زمانی حساسیت ندارند، استفاده کرد [۳]. در سال ۱۹۸۳، گلدبرگ و وایلی به کمک تبدیلات فوریه در روش‌های درونیابی خطی زمانی ریچبک و ضمنی خطاهای

هدردهی و پراکندگی را محاسبه و مقایسه کردند [۳]. آنها به این نتیجه رسیدند که روش درونیایی ریچک در مقایسه با روش درونیایی مکانی هرتزی خطای هدردهی کمتری دارد. کارنی و گیدوئی در سال ۱۹۹۷ چندین روش درونیایی، بعلاوه ترکیب این روش‌ها را با تکنیک تعدیل سرعت موج تحت یک الگوریتم قابل انعطاف ارائه کردند. آنها الگوریتم خود را، در یک سیستم انتقال با لوله‌های سری و شرایط مرزی مخزن و بستن خطی شیر بکار بردند [۱۰]. آنها در بررسی‌های خود به این نتیجه رسیدند که روش درونیایی زمانی خطای هدردهی کمتری دارد و تعدیل سرعت موج حتی اگر بطور ترکیبی با یک درونیایی ضعیف بکار رود، مفید است.

هالی و پریسمن در سال ۱۹۷۷ روش درونیایی غیرخطی را براساس چند جمله‌ای‌های هرمیت^۸ مرتبه چهار ابداع، و برای تصحیح محاسبات مربوط به مسئله جابجایی دوبعدی ارائه کردند [۱۱]. برانسکی و هالی در سال ۱۹۸۶ و شول و هالی در سال ۱۹۹۱ روش مشخصه‌ها را با درونیایی اسپلاین^۱ برای مسأله حرکت افقی آلاینده بکار بردند، با این تفاوت که برانسکی و هالی درونیایی را در سطح زمانی $t+\Delta t$ و شول و هالی درونیایی را در سطح زمان t انجام دادند [۱۲]. کارهای انجام شده در این زمینه ایده‌های شد تا سایبروس و همکارانش در سال ۱۹۹۱ سه روش مختلف درونیایی اسپلاین درجه سه^۱ و یک روش درونیایی هرمیت درجه چهار را برای حل معادلات کلاسیک ضربه قوچ، در یک لوله با شرایط مرزی مخزن و بستن لحظه‌ای شیر بکار بگیرند [۱۲]. آنها به این نتیجه رسیدند که روش اسپلاین در مقایسه با روش‌های درونیایی خطی از دقت بهتری برخوردار است؛ اما با شرایط اولیه یکسان، روش اسپلاین زمان محاسبات بیشتری را به خود اختصاص می‌دهد. همچنین، در روش اسپلاین می‌توان بدون آنکه از دقت مسئله کم شود، از گام زمانی بزرگتری استفاده کرد. روش اسپلاین در مقایسه دو روش اسپلاین و هرمیت، هر دو از دقت یکسان برخوردارند، اما اولی این برتری را دارد که بدون قید و شرط پایدار است.

۲- روش تحقیق

با توجه به آنچه که در بخش قبل آمد، رئوس کلی تحقیق انجام شده در این مقاله بصورت زیر فهرست می‌شود:

۱- روش درونیایی اسپلاین درجه سه روی خط مکانی که سایبروس و همکارانش در معادلات کلاسیک ضربه قوچ بدون توجه به ارضاء شرط پایداری بکار برده بودند، به معادلات کامل و تقریبی با ارضاء شرط پایداری توسعه داده شده است.

۲- برای اولین بار، روش درونیایی اسپلاین درجه سه روی خط زمانی و نیز بصورت ترکیبی (تلفیق درونیایی‌های اسپلاین روی خط مکانی و زمانی با استفاده از یک تابع شکل^{۱۱} درجه سه) به معادلات کامل و تقریبی بسط داده شده است.

۳- هر سه روش فوق با روش درونیایی خطی روی خط مکانی (روشی که بطور سنتی در کتب درسی و نرم‌افزارهای مربوط استفاده می‌شود) مقایسه و بررسی شده است.

برای نیل به اهداف فوق، ابتدا یک برنامه‌ی رایانه‌ای پایه (متشکل از چندین زیربرنامه) براساس روش‌های ذکرشده در معادلات کلاسیک توسعه داده شد. سپس، صحت برنامه فوق برای یک مسأله که حل دقیق آن موجود بود، بررسی شد و بعد جمله‌های مربوط به معادلات کلاسیک در هسته اصلی برنامه رایانه‌ای افزوده گردید تا برنامه فوق برای معادلات کامل و تقریبی نیز استفاده شود. در نهایت، تمام روش‌های درونیایی ذکر شده با طرح یک مسأله کاربردی مقایسه و نقد گردید.

۳- درونیایی اسپلاین درجه سه روی خط مکانی

فرض می‌شود که مقادیر سرعت و هد فشار در نقاط A ، B و C معلوم باشد (شکل (۲)) و مقادیر آنها در نقاطی که مشخصه‌ها روی خطوط شبکه فرود می‌آیند (نقاط R_s و L_s) مطلوب است. به کمک زیربرنامه درونیایی اسپلاین درجه سه می‌توان برای مشخصه C^+ ، توابع درونیایی بین دو گره A و C را به صورت زیر به دست آورد [۱۳]:

$$V_{L_s} = V_A + b_{L_s}^V X_L + c_{L_s}^V X_L^2 + d_{L_s}^V X_L^3 \quad \text{with in} \quad \left(0 \leq X_L = \frac{X_L}{\Delta s} \leq 1, V_A \leq V_{L_s} \leq V_C \right) \quad (7)$$

$$H_{L_s} = H_A + b_{L_s}^H X_L + c_{L_s}^H X_L^2 + d_{L_s}^H X_L^3 \quad \text{with in} \quad \left(0 \leq X_L = \frac{X_L}{\Delta s} \leq 1, H_A \leq H_{L_s} \leq H_C \right) \quad (8)$$

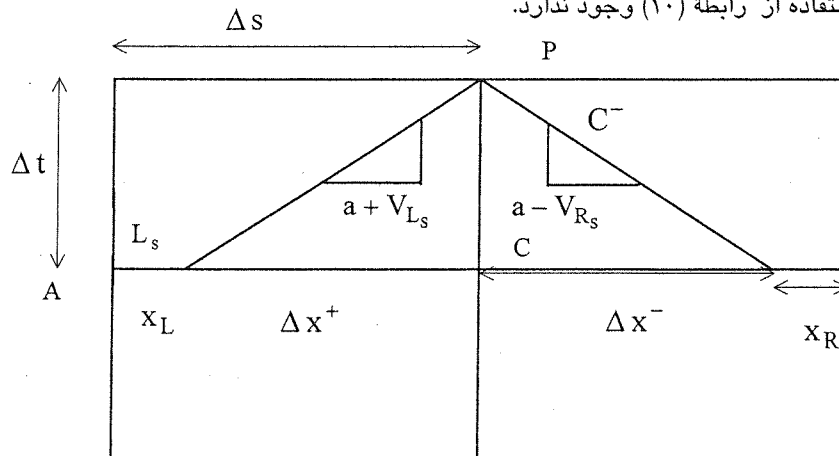
که در آن V و H متغیرهای سرعت و هد فشار، زیرنویسهای A و L_s معرف نقاط متناظر بوده و بالانویسها و پایین‌نویس‌ها در ضرایب b ، c و d به ترتیب معرف تعلق ضریب فوق برای تابع سرعت یا هد فشار، روی مشخصه C^+ یا C^- و در امتداد خط مکانی (s) یا زمانی (t) هستند. برای یافتن توابع درونیاب اسپلین بین گره‌ها در روی خط مکانی، باید حداقل با سه گره، از زیربرنامه درونیابی اسپلین درجه سه استفاده کرد که در اینجا از تمام نقاط روی خط مکانی (روی خط انتقال آب) استفاده شده است. از مشخصه C^+ می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta x^+}{\Delta t} = \frac{\Delta s(1 - X_L)}{\Delta t} = a + V_{L_s} \quad (9)$$

از حذف V_{L_s} بین دو معادله (۷) و (۹)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d_{L_s}^V X_L^3 + c_{L_s}^V X_L^2 + (b_{L_s}^V + \frac{\Delta s}{\Delta t}) X_L - \frac{\Delta s}{\Delta t} + a - V_A = 0 \quad (10)$$

از حل رابطه فوق به کمک زیربرنامه حل معادلات چند جمله‌ای، مقدار X_L محاسبه شده و با جایگذاری آن در (۷) و (۸)، مقادیر V_{L_s} و H_{L_s} به دست می‌آید. همچنین، به روشی مشابه برای مشخصه C^- می‌توان مقادیر V_{R_s} و H_{R_s} را به دست آورد. با داشتن مقادیر فوق و جایگذاری آنها در (۵) و (۶)، می‌توان مقادیر V_P و H_P را به دست آورد. شایان ذکر است، هنگامی که حل معادلات تقریبی و یا کلاسیک مورد نظر است، به علت نبود V_{L_s} در (۹)، مقدار X_L مستقیماً قابل محاسبه بوده و دیگر نیازی به استفاده از رابطه (۱۰) وجود ندارد.



شکل (۲): تعریف نمادها برای درونیابی اسپلین روی خط مکانی.

۳- درونیابی اسپلین درجه سه روی خط زمانی

در این روش که برای اولین بار پیشنهاد می‌شود، از توابع اسپلین برای درونیابی بر روی خط زمانی استفاده شده است [۱۳]. با توجه به شکل (۳)، توابع درونیاب اسپلین برای پارامترهای سرعت و هد فشار برای فواصل زمانی مختلف، بین دو گره A و D برای مشخصه C^+ ، و بین دو گره E و B برای مشخصه C^- به قرار زیر به دست می‌آید:

$$V_{L_t} = V_D + b_{L_t}^V (1 - Y_L) + c_{L_t}^V (1 - Y_L)^2 + d_{L_t}^V (1 - Y_L)^3 \quad , \quad \left(0 \leq Y_L = \frac{Y_L}{\Delta t} \leq 1, V_D \leq V_{L_t} \leq V_A \right) \quad (11)$$

$$H_{L_t} = H_D + b_{L_t}^H (1 - Y_L) + c_{L_t}^H (1 - Y_L)^2 + d_{L_t}^H (1 - Y_L)^3 \quad , \quad \left(0 \leq Y_L \leq 1, H_D \leq H_{L_t} \leq H_A \right) \quad (12)$$

$$V_{R_t} = V_E + b_{R_t}^V (1 - Y_R) + c_{R_t}^V (1 - Y_R)^2 + d_{R_t}^V (1 - Y_R)^3 \quad , \quad \left(0 \leq Y_R = \frac{Y_R}{\Delta t} \leq 1, V_E \leq V_{R_t} \leq V_B \right) \quad (13)$$

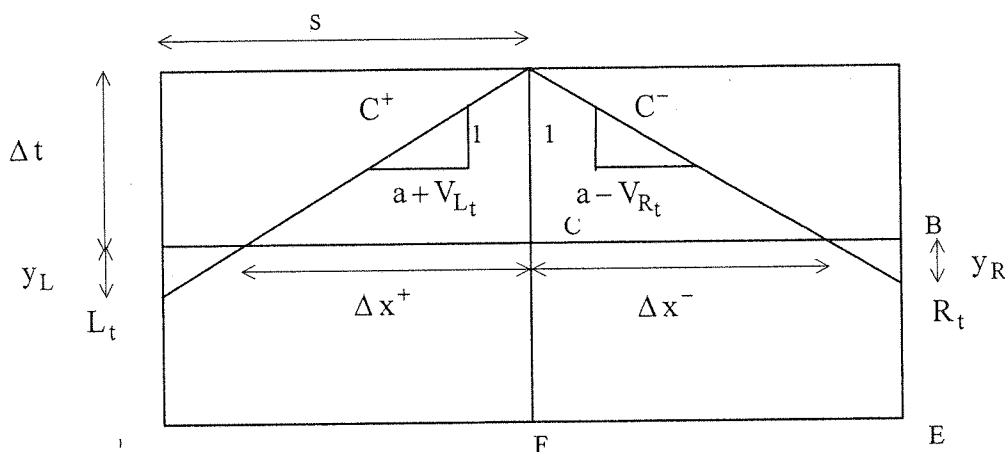
$$H_{R_t} = H_E + b_{R_t}^H (1 - Y_R) + c_{R_t}^H (1 - Y_R)^2 + d_{R_t}^H (1 - Y_R)^3, \quad (0 \leq Y_R \leq 1, H_E \leq H_{R_t} \leq H_B) \quad (14)$$

قابل اشاره شد که برای یافتن توابع درونیاب بین گروهها روی خط زمانی، باید حداقل از سه گره در زیربرنامه درونیابی اسپلاین درجه سه استفاده کرد. در اینجا از سه نقطه روی خط زمانی استفاده شده است. با روشی مشابه با آنچه که در بخش ۳ گذشت، برای مشخصه‌های C^+ و C^- می‌توان روابط زیر را به دست آورد:

$$d_{L_t}^V Y_L^4 - (2d_{L_t}^V + c_{L_t}^V) Y_L^3 + (c_{L_t}^V + b_{L_t}^V) Y_L^2 + (2d_{L_t}^V + c_{L_t}^V - a - V_D) Y_L - \left(d_{L_t}^V + c_{L_t}^V + b_{L_t}^V - \frac{\Delta s}{\Delta t} + a + V_D \right) = 0 \quad (15)$$

$$d_{R_t}^V Y_R^4 - (2d_{R_t}^V + c_{R_t}^V) Y_R^3 + (c_{R_t}^V + b_{R_t}^V) Y_R^2 + (2d_{R_t}^V + c_{R_t}^V + a - V_E) Y_R - \left(d_{R_t}^V + c_{R_t}^V + b_{R_t}^V + \frac{\Delta s}{\Delta t} - a + V_E \right) = 0 \quad (16)$$

از حل روابط فوق به کمک زیربرنامه حل معادلات چندجمله‌ای، مقادیر Y_L و Y_R محاسبه شده و با جایگذاری آن در (۱۱) تا (۱۴) مقادیر H_{R_t} ، V_{R_t} ، H_{L_t} ، V_{L_t} به دست می‌آید. با داشتن مقادیر فوق و جایگذاری آنها در معادلات (۵) و (۶)، می‌توان مقادیر H_p و V_p را به دست آورد.



شکل (۳): تعریف نمادها برای درونیابی اسپلاین روی خط زمانی.

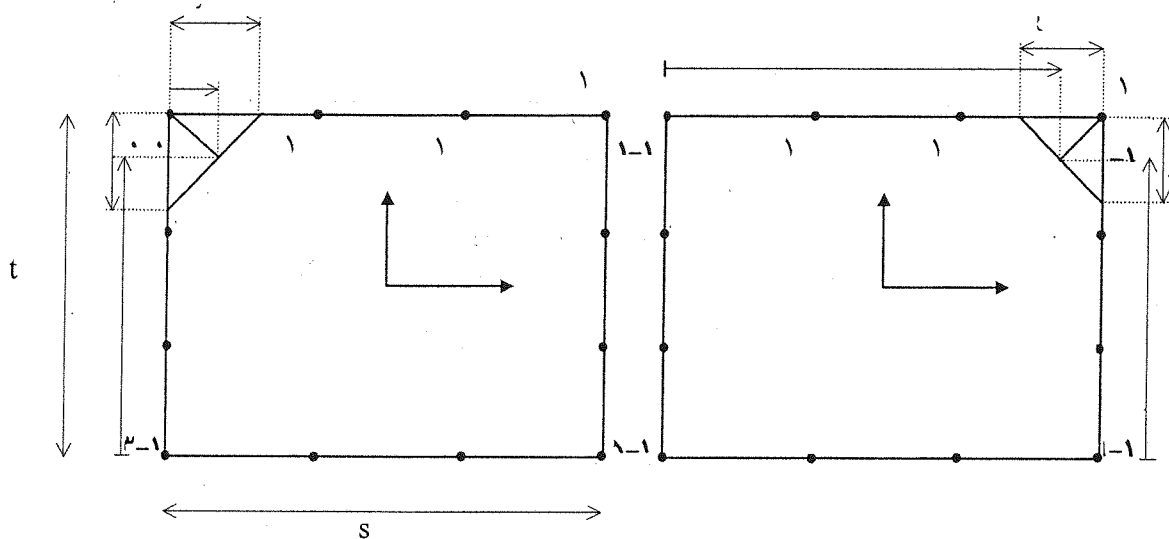
۵- درونیابی ترکیبی با استفاده از تابع شکل درجه سه

در این روش نیز که برای اولین بار پیشنهاد می‌گردد، فرض می‌شود که به کمک روش درونیابی‌های اسپلاین در بخش‌های قبل، مقادیر X_L ، X_R ، Y_L و Y_R بدست آمده است و باید مقادیر سرعت و هد فشار در نقاط L_n و R_n (نقاطی روی امتداد مشخصه‌ها که نزدیکترین فاصله را با نقاط گرهی دارند) به کمک وزن دادن به نقاط معلوم اطراف محاسبه شود. بدین منظور از تابع شکل درجه سه نوع سرنیدییتی^{۱۲} استفاده شده است. اساس این روش، استفاده از دوازده نقطه (نقاط ۱ تا ۱۲ در شکل (۴)) از دو گام زمانی قبل، اطراف نقطه‌ای است که مقادیر سرعت و یا هد فشار مورد نظر است. بدین ترتیب می‌توان یک تابع درونیاب به قرار زیر ساخت:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{12} \psi_i \Phi_i \quad (17)$$

که در آن Φ_i متغیر درونیابی شده (سرعت و یا هد فشار) در نقطه i و ψ_i وزن متغیر در نقطه i است. با استفاده از توابع درونیاب اسپلاین درجه سه روی اضلاع مستطیل که قبلاً از طریق درونیابی مکانی و زمانی به دست آمده است، مقادیر Φ_i در نقاط $1/3$ و $2/3$ اضلاع قابل محاسبه است. توابع وزنی Φ_i در این نوع تابع شکل به صورت زیر

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\zeta)[-10+9(\xi^2+\zeta^2)] & \psi_2 &= \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\zeta)(1-3\xi) \\
 \psi_3 &= \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\zeta)(1+3\xi) & \psi_4 &= \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\zeta)[-10+9(\xi^2+\zeta^2)] \\
 \psi_5 &= \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\zeta^2)(1-3\zeta) & \psi_6 &= \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\zeta^2)(1-3\zeta) \\
 \psi_7 &= \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\zeta^2)(1+3\zeta) & \psi_8 &= \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\zeta^2)(1+3\zeta) \\
 \psi_9 &= \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\zeta)[-10+9(\xi^2+\zeta^2)] & \psi_{10} &= \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\zeta)(1-3\xi) \\
 \psi_{11} &= \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\zeta)(1+3\xi) & \psi_{12} &= \frac{1}{32}(1+\xi)(1+\zeta)[-10+9(\xi^2+\zeta^2)]
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$



شکل (۴): تابع شکل سرندیبیتی برای درونیایی اسپلاین ترکیبی.

که در آن ξ و ζ بترتیب وزن‌های داده شده به خطوط مکانی (s) و زمانی (t) است. برای تعیین وزن‌های مکانی و زمانی، با توجه به آنچه که در شکل (۴) نشان داده شده است، فرض می‌شود مقادیر X_L و Y_L از طریق درونیایی اسپلاین (مکانی و زمانی) برای مشخصه C^+ به دست آمده‌اند [۱۳]. از نقطه A، عمودی بر خط L_1L_2 فرود آورده می‌شود تا آن را در نقطه L_3 قطع نماید. توجه شود که امتداد خط L_1L_2 لزوماً امتداد مشخصه C^+ نیست، چرا که مقادیر X_L و Y_L مستقل از هم به دست آمده‌اند. با توجه به روابط هندسی، برای نقطه L_3 می‌توان نوشت [۱۳]:

$$\begin{cases}
 \xi = \frac{2c_1}{\Delta s} - 1 = \frac{-(X_L^2 - 2X_L Y_L + Y_L^2)}{X_L^2 + Y_L^2} \\
 \zeta = \frac{2c_2}{\Delta t} - 1 = \frac{X_L^2 - 2X_L Y_L + Y_L^2}{X_L^2 + Y_L^2}
 \end{cases} \tag{۱۹}$$

به روشی مشابه، وزن‌های مکانی و زمانی C^- به قرار زیر به دست می‌آیند:

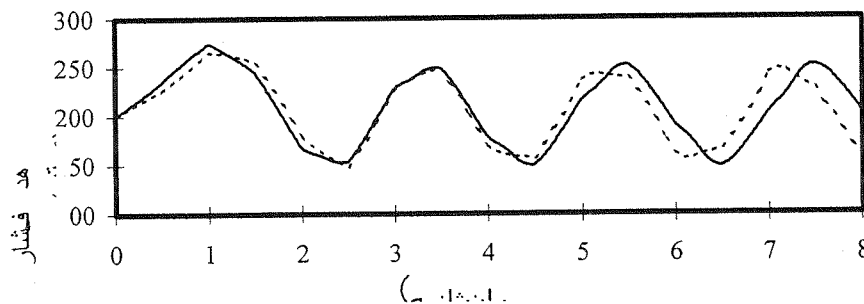
$$\begin{cases} \xi = \frac{2c_1}{\Delta s} - 1 = \frac{X_R^2 - 2X_R Y_R^2 + Y_R^2}{X_L^2 + Y_L^2} \\ \zeta = \frac{2c_2}{\Delta t} - 1 = \frac{X_R^2 - 2X_R^2 Y_R + Y_R^2}{X_R^2 + Y_R^2} \end{cases} \quad (20)$$

۶- ارزیابی روش‌های درونیابی

برای ارزیابی کارایی هر یک از روش‌های درونیابی، باید ابتدا صحت برنامه رایانه‌ای تأیید شود و پس از آن، تمام روش‌های درونیابی در یک مسئله کاربردی مقایسه شوند. برای هر روش درونیابی یک علامت اختصاری بکار رفته است. برای روش درونیابی خطی روی خط مکانی، که یک روش سنتی^{۱۲} است و در اینجا به عنوان روش مبنا آمده است، از علامت Tr و برای بقیه روش‌ها، از علائمی دو حرفی استفاده شده است. حرف اول، معرف نوع معادلات کامل^{۱۴} (E) یا تقریبی^{۱۵} (A) و حرف دوم، معرف محور یا ناحیه مکانی^{۱۶} (S)، زمانی^{۱۷} (T) و یا ترکیبی^{۱۸} (C) است.

۶-۱- بررسی صحت برنامه رایانه‌ای

برای اثبات صحت برنامه رایانه‌ای، از یک مسأله که حل دقیق آن موجود است، استفاده می‌شود [۱۰]. شرح مسأله این است که: آب با دبی ۱ متر مکعب در ثانیه در سه لوله سری و بدون شیب، با سطح مقطع ۱ متر مربع و ضریب اصطکاک ۰/۰۱۵، که به یک مخزن با هد ثابت ۲۰۰ متر متصل هستند، جریان دارد. لوله‌ها (به ترتیب از مخزن به بعد) دارای طولهای ۱۱۰، ۲۷۰ و ۱۷۵ متر و سرعت موج‌های ۱۱۰۰، ۱۲۰۰ و ۱۰۰۰ متر بر ثانیه بوده و در انتهای لوله آخر، یک شیر بدون افت وجود دارد. شیر بطور خطی و در مدت ۱/۵ ثانیه بسته می‌شود، محاسبه تغییرات هد در محل شیر مورد نظر است. اگر تعداد تقسیمات در کوتاهترین لوله برابر هشت انتخاب شود، عدد کورانت در تمام لوله‌ها برابر یک شده و در نتیجه تمام روش‌های درونیابی به یک جواب واحد می‌رسند. حل عددی و دقیق این مسأله در شکل (۵) نشان داده شده است که صحت برنامه رایانه‌ای پایه را تأیید می‌کند.

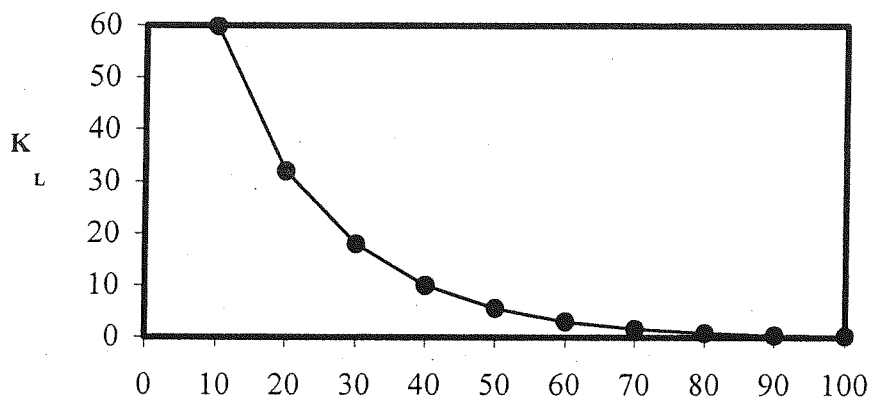


۶-۲- طرح مسأله کاربردی

برای بررسی کارایی روش‌های درونیابی، یک مسأله به صورت زیر طرح می‌شود: آب با دبی ۲۱۰ لیتر در ثانیه در سه لوله سری با ضریب اصطکاک ۰/۰۲۱ که به یک مخزن با هد ثابت ۱۰۰ متر متصل هستند، جریان دارد. در انتهای لوله آخر، یک شیر با منحنی مشخصه افت نشان داده شده در شکل (۶) وجود دارد. شیر در دو مرحله بطور خطی بسته می‌شود. در مرحله اول، ۹۰ درصد شیر در مدت ۵ ثانیه و در مرحله دوم ۱۰ درصد باقیمانده در مدت ۱۰ ثانیه بسته می‌شود. اطلاعات مربوط به پروفیل خط لوله در جدول (۱) آمده است.

جدول (۱) اطلاعات مربوط به پروفیل خط لوله مسأله کاربردی.

شماره لوله	قطر لوله (m)	طول لوله (m)	سرعت موج (m/s)	تراز ابتدای لوله (m)	تراز انتهای لوله (m)
۱	۰/۷۶	۲۶۰	۸۵۰	۴۱۰	۳۶۸
۲	۰/۶۱	۳۴۰	۹۶۰	۳۶۸	۲۸۷
۳	۰/۵۱	۴۰۰	۱۰۰۰	۲۸۷	۳۳۰

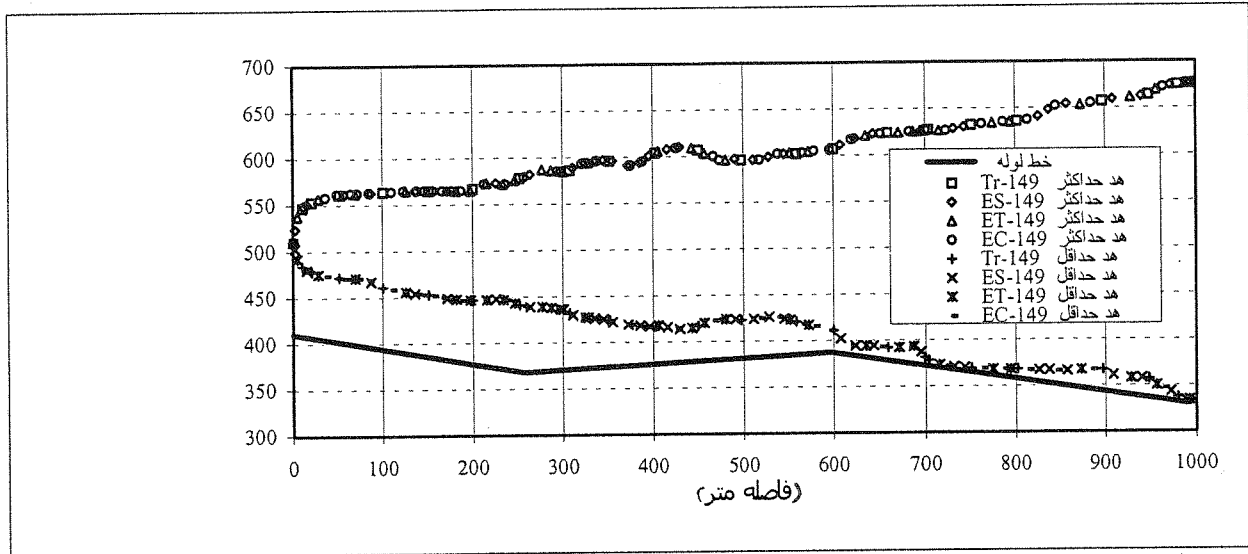


بازشدگی شیپ
شکل (۶): منحنی مشخصه افت شیپ.

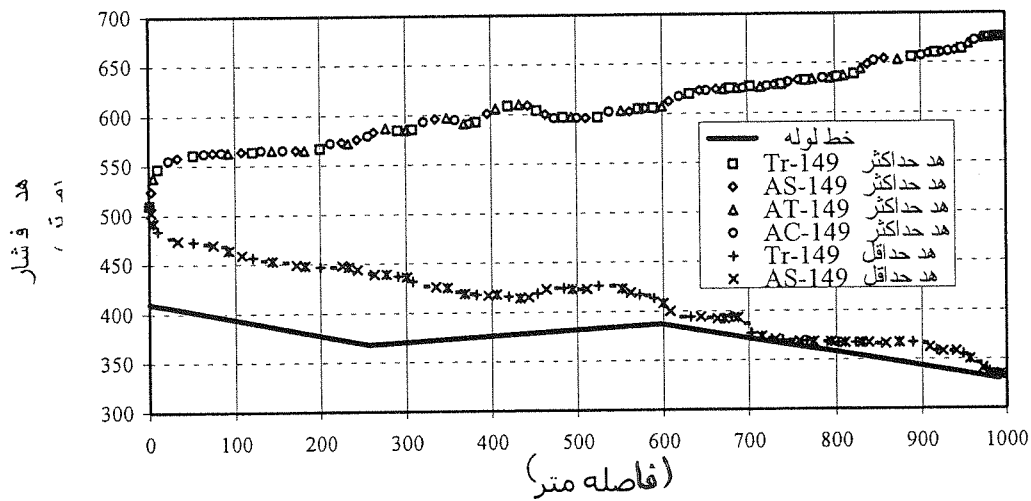
۳-۶- مقایسه روش‌های درونیابی

با ساختن فایل ورودی برنامه رایانه‌ای براساس مسأله کاربردی و اجرای برنامه برای گامهای زمانی مختلف (تعداد تقسیمات در کوتاهترین لوله N)، می‌توان هدهای فشاری حداکثر و حداقل را برای هر گام زمانی بدست آورد و در کنار پروفیل خط لوله رسم کرد. با توجه به شکل‌های (۷) و (۸) مشاهده می‌شود که تمام روش‌های درونیابی در $N = ۱۴۹$ یک جواب واحد حاصل می‌کنند. دلیل این امر آن است که در $N = ۱۴۹$ ، عدد کورانت در هر سه لوله به عدد یک بسیار نزدیک شده و فاصله‌ی پای مشخصه‌ها تا نقاط گره‌ای بسیار کم می‌شود. در نتیجه خطاهای ناشی از درونیابی به صفر میل می‌کند. همچنین، واضح است که حتی اگر عدد کورانت در تمام تقسیمات کاملاً برابر یک شود، باز هم با کاهش گامهای زمانی، جوابهای محاسبه شده اصلاح می‌شوند که این اصلاح تا حد معینی از کاهش گام زمانی صورت پذیرفته و بعد از آن جوابها ثابت خواهند ماند.

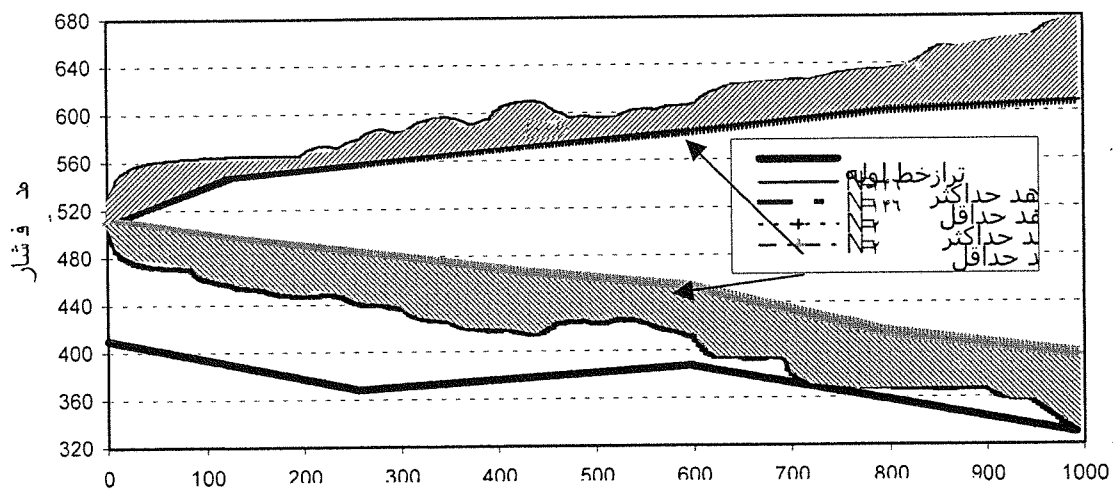
در $N = ۱۴۹$ ، هدهای فشاری حداکثر و حداقل در تمام روش‌های درونیابی یکسان بدست می‌آیند و مساحت‌های محصور میان هدهای فشاری نظیر، ناشی از $N = ۱$ و $N = ۱۴۹$ ، بر روی پروفیل خط لوله بیشترین مقدار ممکن است. (شکل ۹) پس، می‌توان برای هر $N \geq ۲$ ، یک عدد بدون بُعد کوچکتر از یک بدست آورد. که بیانگر نسبت مساحت‌های مابین هدهای فشاری نظیر ناشی از هر N و $N = ۱۴۹$ نسبت به مساحت‌های محصور میان هدهای فشاری نظیر، ناشی از $N = ۱$ و $N = ۱۴۹$ است. حال می‌توان برای هر یک از روش‌های درونیابی، تغییرات این عدد بدون بُعد را که معیاری از دقت یا خطای محاسبات است، در برابر تغییرات N بررسی کرد.



شکل (۷): مقایسه هدهای اکسترمم در روش‌های درونیابی با استفاده از معادلات کامل.



شکل (۸): مقایسه هدهای اکسترمم در روش‌های درونیابی با استفاده از معادلات تقریبی.



شکل (۹): نمایشی از مساحت‌های محصور میان هدهای اکسترمم.

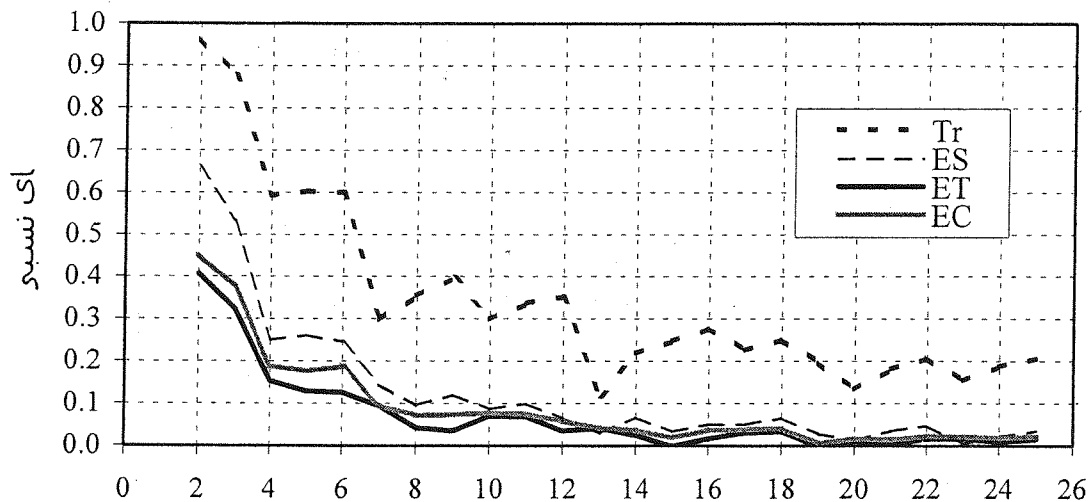
۶-۳-۱- مقایسه روش‌های درونیابی با استفاده از معادلات کامل

با توجه به شکل (۱۰) مشاهده می‌شود که روش‌های درونیابی درجه سه نسبت به روش درونیابی خطی (Tr) سه برتری مهم زیر را دارد:

دقت بالاتر، نوسان کمتر و همگرایی سریعتر به جواب نهایی در این میان درونیابی روی خط زمانی (ET) بهترین جوابها را ارائه می‌کند. همچنین، مشاهده می‌گردد که درونیابی ترکیبی (EC)، میانگینی از جوابهای درونیابی روی خط مکانی (ES) و زمانی (ET) و با حداقل نوسان را نتیجه می‌دهد. از دیدگاه زمان پردازش، درونیابی زمانی سریعترین (در $N = 25$ ، حدود $1/8$ برابر روش سنتی) و درونیابی ترکیبی (در $N = 25$ ، حدود $6/4$ برابر روش سنتی) کندترین روش بوده‌اند.

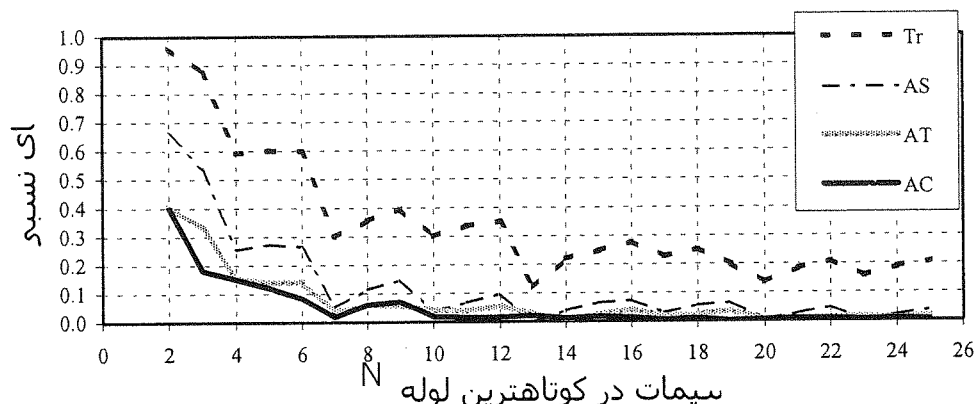
۶-۳-۲- مقایسه روش‌های درونیابی با استفاده از معادلات تقریبی

با بررسی شکل (۱۱) ملاحظه می‌شود که در این حالت نیز روش‌های درونیابی درجه سه نسبت به روش درونیابی خطی (Tr)، همان سه مزیت دقت بالاتر، نوسان کمتر و همگرایی سریعتر در جوابها را دارند؛ اگرچه درونیابی روی خط مکانی (AS) نوساناتی مشابه روش سنتی (Tr) اما با دامنه کمتر را نشان می‌دهد. در میان روش‌های فوق، درونیابی ترکیبی (AC) علاوه بر دقت نسبی بالاتر، بویژه در مقایسه با درونیابی روی خط مکانی، نوسانات بسیار کمتری دارد. از دیدگاه زمان پردازش نیز درونیابی‌های مکانی (AS) و زمانی (AT) سریعترین (در $N = 25$ ، حدود $1/8$ برابر روش سنتی) و درونیابی ترکیبی (AC) (در $N = 25$ ، حدود $5/4$ برابر روش سنتی) کندترین روش هستند.



شکل (۱۰) خطای نسبی محاسبات مربوط به روش‌های درونیابی کامل برای مسأله کاربردی. سیمات در کوتاهترین لوله

شکل (۱۰): خطای نسبی محاسبات مربوط به روش‌های درونیابی کامل برای مسأله کاربردی.



شکل (۱۱): خطای نسبی محاسبات مربوط به روش‌های درونیابی تقریبی برای مسأله کاربردی.

۳-۳-۶- مقایسه روش‌های درونیابی نظیر در معادلات کامل و تقریبی

با بررسی شکل‌های (۱۲) تا (۱۴) می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

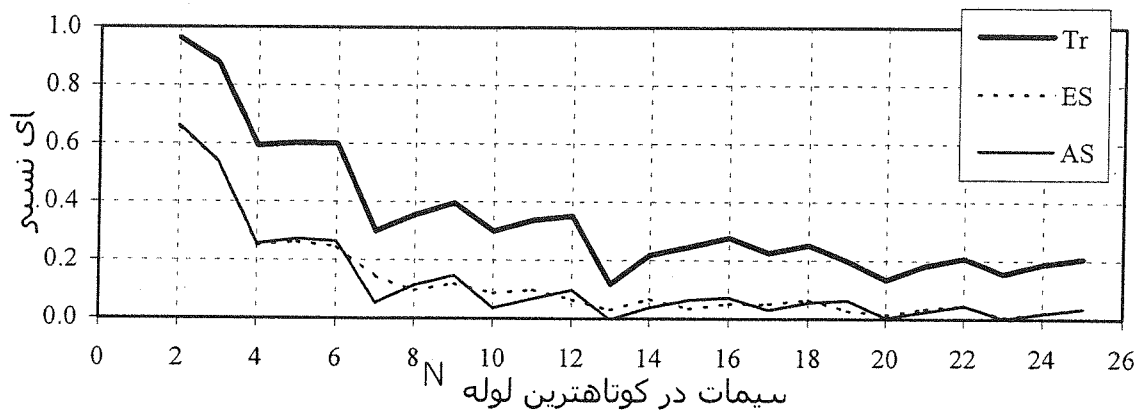
الف - درونیابی روی خط مکانی با استفاده از معادلات کامل (ES) اگرچه نسبت به روش نظیر خود در معادلات تقریبی (AS) به جواب‌های نسبتاً ضعیفتری منجر می‌شود، اما دارای رفتار نوسانی بهتر و قابل اطمینان‌تری است؛ دیگر آنکه در برابر روش (AS) از زمان پردازش بالاتری (در $N = 25$ ، حدود $1/6$ برابر) برخوردار است.

ب - درونیابی روی خط زمانی با استفاده از هر دو نوع معادلات، نتایج تقریباً یکسان و با نوسانات کم از خود نشان می‌دهد، به نحوی که تمایزی میان آنها نمی‌توان قائل شد. زمان پردازش نیز در هر دو حالت یکسان است. در $N = 25$ ، محاسبات حدود $1/8$ برابر روش سنتی است.

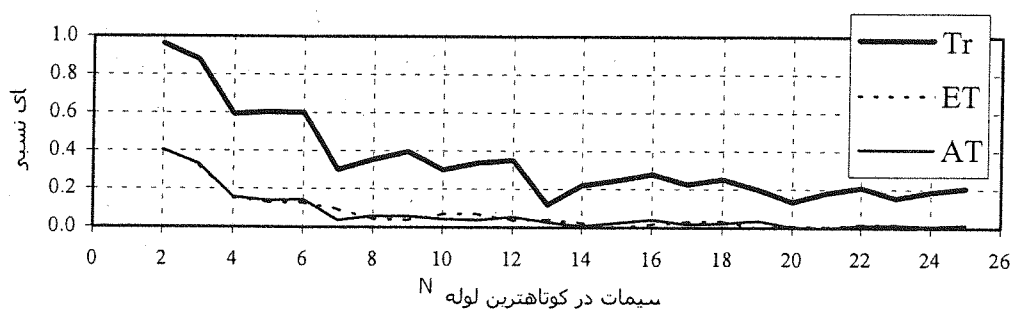
ج - کاربرد روش ترکیبی در معادلات تقریبی (AC) نه تنها نتایج بهتری نسبت به کاربرد آن در معادلات کامل (EC) ارائه می‌کند، بلکه از زمان پردازش بهتری نیز برخوردار است. بطور کلی، روش ترکیبی در معادلات تقریبی (AC) در میان تمام روش‌ها دارای بالاترین دقت، سریعترین همگرایی و نیز حداقل نوسان را دارا بوده و تنها ضعف عمده آن طولانی‌تر بودن زمان پردازش آن است: (در $N = 25$ ، حدود $5/5$ برابر روش سنتی).

۳-۳-۶-۴- مقایسه روش‌های درونیابی از دیدگاه زمان پردازش

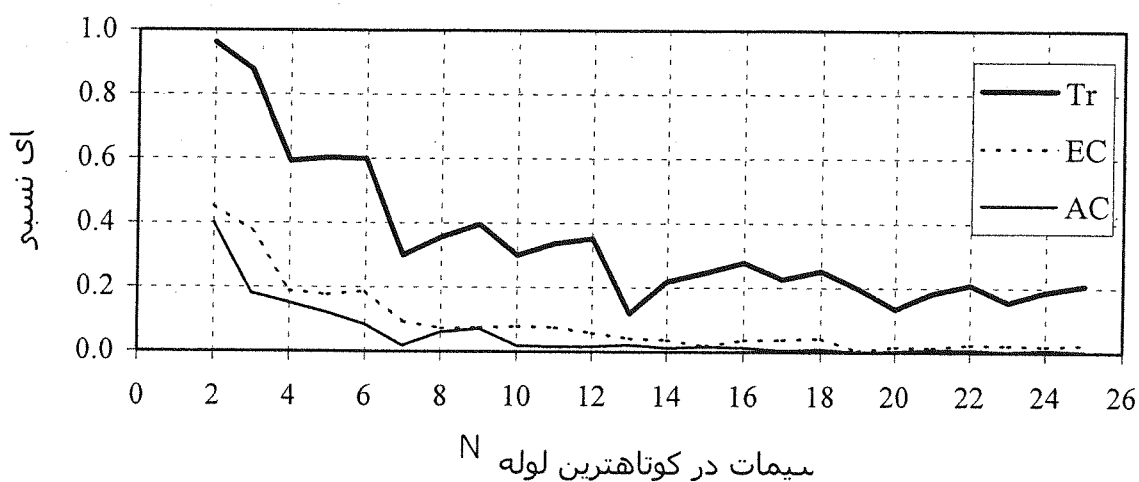
شکل (۱۵) نشان می‌دهد که زمان پردازش تمام روش‌ها با افزایش تعداد تقسیمات و یا به عبارتی کاهش گام زمانی، بطور تصاعدی افزایش می‌یابند. در این میان، روش درونیابی روی خط مکانی با استفاده از معادلات تقریبی (AS) حداقل افزایش (در $N = 25$ ، حدود $1/6$ برابر روش سنتی) و درونیابی‌های ترکیبی بویژه روش ترکیبی با استفاده از معادلات کامل (EC)، حداکثر افزایش (در $N = 25$ ، حدود $5/5$ و $6/5$ برابر روش سنتی) را از خود نشان می‌دهند.



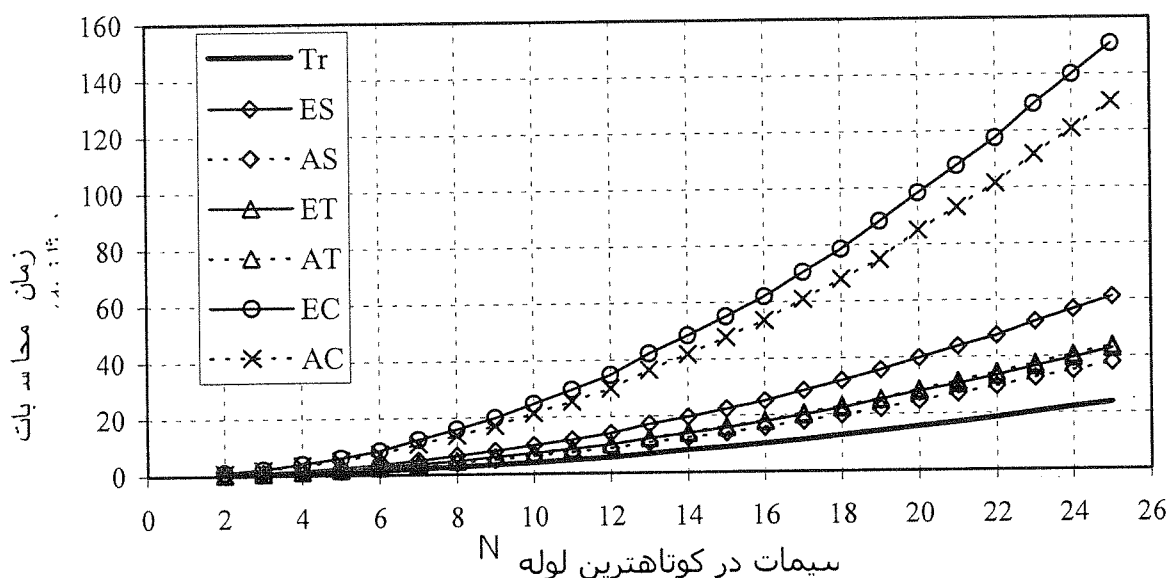
شکل (۱۲): خطای نسبی محاسبات مربوط به روش‌های درونیایی روی خط مکانی برای مسأله کاربردی نمونه.



شکل (۱۳): خطای نسبی محاسبات مربوط به روش‌های درونیایی روی خط زمانی برای مسأله کاربردی نمونه.



شکل (۱۴): خطای نسبی محاسبات مربوط به روش‌های درونیایی ترکیبی برای مسأله کاربردی نمونه.



شکل (۱۵): زمان محاسبات مربوط به کلیه روش‌های درونیابی برای مسأله کاربردی نمونه.

در روش درونیابی روی خط زمانی، در استفاده از هر دو نوع معادلات (ET, AT)، از لحاظ زمان پردازش بسیار نزدیک به روش (AS) بوده که با توجه به دقت بالای آنها، مطلوب‌ترین روش‌ها به نظر می‌رسند. نکته قابل توجه آنکه در محدوده تعداد تقسیمات ۱۰ تا ۱۵، روش‌های درونیابی درجه سه زمانی (ET, AT) از نظر زمان پردازش تفاوت چندانی با روش سنتی ندارند، اما دقت محاسباتی بسیار بهتری از خود نشان می‌دهند. بنابراین از این روش‌ها می‌توان برای تحلیل پدیده ضربه قوچ در شبکه‌ها و خطوط انتقال آبی که دارای لوله‌ها و شرایط مرزی بیشتری هستند، استفاده کرد و در زمان تقریباً یکسان نتایج بسیار دقیق‌تری بدست آورد.

۷- نتیجه‌گیری

با توجه به مطالب بیان شده، می‌توان نتایج کلی زیر را ارائه کرد:

- هنگامی که از گام زمانی بسیار کوچک استفاده می‌شود و یا به عبارتی تعداد تقسیمات در اجزاء سیستم انتقال زیاد است، عدد کورانت در تمام لوله‌ها به عدد یک بسیار نزدیک شده و در نتیجه، تمام روش‌های درونیابی یک جواب واحد ارائه می‌دهند.
- روش‌های درونیابی درجه سه نسبت به روش‌های درونیابی خطی دارای سه مزیت مهم هستند: دقت بالاتر، سرعت همگرایی بیشتر و نوسان کمتر در جوابها.
- در روش‌های درونیابی درجه سه، بیشترین نوسان در جوابها برای درونیابی روی خط مکانی (AS) و کمترین نوسان برای درونیابی‌های ترکیبی (EC, AC) حاصل می‌شود.
- اگر از معادلات کامل استفاده می‌شود، بیشترین خطا در جوابها برای روش درونیابی روی خط مکانی (ES) و کمترین آن مربوط به روش درونیابی روی خط زمانی (ET) است.
- اگر از معادلات تقریبی استفاده می‌شود، بیشترین خطا را درونیابی روی خط مکانی (AS) و کمترین آن را درونیابی ترکیبی (AC) ارائه می‌کند.
- در میان روش‌های درونیابی، کمترین زمان پردازش را درونیابی روی خط مکانی با استفاده از معادلات تقریبی (AS)

و روش‌های درونیابی روی خط زمانی (ET, AT)، و بیشترین زمان پردازش را روش‌های درونیابی ترکیبی (EC, AC) نیاز دارند.

- در مجموع بهترین روش درونیابی، درونیابی روی خط زمانی (ET, AT) است، زیرا علاوه بر دقت بالاتر، سرعت همگرایی بیشتر و نوسان کمتر، به زمان پردازش کمتری (نزدیک به روش سنتی) نیز نیازمند است. بنابراین، می‌توان از آن با اطمینان کافی در تحلیل‌ها بهره جست.

۸- زیر نویس‌ها

- | | |
|--|-------------------|
| 1- Water hammer | 2- Elastic theory |
| 3- Method of characteristics | 4- Dissipation |
| 6- Reachback time-line interpolation | 5- Dispersion |
| 7- Implicit time-line interpolation | 8- Hermite |
| ¹⁰ - Cubic-spline interpolation | 9- Spline |
| 11- Shape function | 12- Serendipity |
| 13- Traditional | 14- Exact |
| 15- Approximate | 16- Space |
| 17- Time | 18- Combined |

مراجع

[۱] تائبی، ا. و چمنی، م. ر، شبکه‌های توزیع آب شهری، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۹.

[2] Larock, B. E., Jeppson, R. W., and Watters, G. Z., *Hydraulics of Pipeline Systems*, CRC Press LLC, 2000.

[3] Goldberg, D. E., and Wylie, E. B., "Characteristics Method Using Time-Line Interpolations," *J. Hydr. Div.*, ASCE, 109(5), 1983, 671-683.

[4] Streeter, V.L., and Lai, C., "Water Hammer Analysis Including Fluid Friction," *J. Hydr. Div.*, ASCE, 88(3), 1962, 79-112.

[5] Watters, G. Z., *Analysis and Control of Unsteady Flow in Pipelines*, Butter Worth Publishers, Ann Arbor, 1984.

[6] Watters, G. Z., Jeppson, R. W., and Flammer, G. H., "Water Hammer in PVC and Reinforced Plastic Pipe," *J. Hydr. Div.*, ASCE, 102(HY7), 1976, 831-843.

[7] Price, R. K., "Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing," *J. Hydr. Div.*, ASCE, 100(HY7), 1974, 879-899.

[8] Wiggert, D. C., and Sundquist, M. S., "Fixed-Grid Characteristics for Pipeline Transients," *J. Hydr. Div.*, ASCE, 103(HY12), 1977, 1403-1416.

- [9] Streeter, V. L., "Valve Stroking for Complex Piping System," J. Hydr. Div., ASCE, 93(HY3), 1964, 81-98.
- [10] Karney, B. W., and Ghidaoui, M. S., "Flexible Discretization Algorithm for Fixed-Grid MOC in Pipelines," J. Hydr. Engrg., ASCE, 123(11), 1997, 1004-1011.
- [11] Holly, M., and Prissmann, A., "Accurate Calculation of Transport in Two Dimension," J. Hydr. Engrg., ASCE, 103(11), 1977, 1259-1277.
- [12] Sibetheros, I. A., Holley, E. R., and Branski, J. M. "Spline Interpolation for Water Hammer Analysis," J. Hydr. Engrg., ASCE, 117(10), 1991, 1332-1369.
- [۱۳] رستمی، ع، بررسی دینامیکی جریان ناماندگار در لوله‌های تحت فشار از طریق مدل‌های تحلیلی و عددی - ضربه قوچ، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۹.
- [14] Reddy, N. J., An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, Inc., 1993.