اثـــر شکل هندسی آرایه در طراحـــی
آرایه هـــای Superresolution

فرخ حجت کاشانی
استاد
دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران

فرخ آرزم
دانشیار
دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تهران

محمد عسگری
دانشجوی دکترا
دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران

چکیده

الگوریتم MUSIC [1] بعنوان یک الگوریتم پایه از دسته الگوریتم‌های زیرفضای سیگنال درآشکارسازی و جداسازی تشعشع کننده‌ها در سیستم‌های پردازش آرایه بکار گرفته می‌شود. خطای ایجاد شده توسط در این الگوریتم بستگی به تعداد نمونه‌های دریافتی، مقدار سیگنال به نویز، فاصله دو تشعشع کننده و شکل عناصر و در نهایت نحوه چیده شدن عناصر آرایه دارد. در این مقاله، وابستگی خطاهای ذکر شده به شکل هندسی آرایه بررسی شده است. به این مقوله، مقالات کمتری پرداخته‌اند؛ چراکه مشکل اصلی پیچیدگی روابط است. از این رو در اینجا سعی برآن است که تمام حالات ممکن از شکلهای مختلف آرایه‌ها چه خطی و چه صفحه‌ای بررسی شوند و انواع گوناگون آرایه‌ها نیز تعریف شوند. بعلاوه ضمن بدست آوردن فرمول‌های تحلیلی خطا نسبت به هر دو بعد θ و ϕ در آرایه‌های صفحه‌ای (که حالت کلّیتر آرایه‌های خطی هستند)، نشان داده می‌شود که چه پارامترهایی را باید در انتخاب شکل هندسی برای داشتن خطای دلخواه تعیین نمود.

کلمات کلیدی

آرایه‌های با دقت تفکیک پذیری فوق العاده، الگوریتم MUSIC، حد کرامر ـ راو

The Effect of Array Geometery on Super-Resolution Array Designing

F. Hodjat Kashani
Professor

F. Arazm
Professor

M. Asgari
Assistant Professor

Abstract

MUSIC (Multiple Signal Classifiction) algorithm as a base of Sub-Space algorithms is applied in array processing systems. The error of the algorithm in detection & resolution depends on several parameters, such as snapshots, signal-to-noise ratio and sensor locations. In this paper, the previous dependency is investigated. So, all the senarios of array shaps are definded and then analytic formulas are derived in two bearings of θ and φ. We will show which parameters have the most effect on the desired error (the error threshold).

Key words

Super-resolution Array , MUSIC algorithm , Cramer-Rao Bound

مقدمه

در بخـش آرایه‌های Superresolution الگوریتم‌های مختلفی برای آشکارسازی و جداسازی سیگنال‌های دریافتی بکار گرفته شـده‌انـد. الگوریـتم‌هایـی کـه بر مبنای حداکثر احتمال و یا جداسازی فضای سیگنال از فضای نویز عمل می‌کنند از عمده‌ترین الگوریـتم‌هـای یـاد شـده هسـتند. دقـت الگوریـتم MUSIC که بر اساس روش زیر فضای سیگنال عمل می کند از پارامترهای مختلفـی مانـند ضـریب همبسـتگی تشعشـع کنـنده‌ها، بهره عناصر آرایه، محدودیت زمانی دریافت منابع و شکل هندسی آرایه متأثـر اسـت. مسلما مقداری از بهره یا ضریب همبستگی و یا فاصله بین عناصر آرایه وجود دارد که به ازای هر یک از آن مقادیر بطـور مسـتقل می‌توان حداقل خطای آشکارسازی و جداسازی را بدست آورد. هدف اصلی این مقاله آن است که در مرحله اول فرمول‌های تحلیلی خطا را برحسب شکل هندسی آرایه بدست آورده و سپس پارامترها و نکاتی را که در طراحی آرایه باید مورد تـوجه قـرار دارد، بررسـی کـند. از آنجـا که تاکنون مقالات ارائه شده از همان ابتدا به سراغ الگوریتم‌های بهینه‌سازی رفته اند و نحـوه ارتـباط خطا با شکل هندسی را نشان نداده‌اند (بجز روش هندسه تفاضلی که اولین بار توسط آقای مانیکاس و همکارانش [۲] ارایه شد)، هنوز برای مهندسین طراح آرایه‌های Superresolution این مسأله بصورت یک سؤال باقی مانده است که چگونه مـی‌تـوان آرایـه‌ای را بـرای داشتن حداقل خطا تعیین کرد. معمولاً" نیز از حد پایین کرامر ـ راو CRLB بعنوان کمترین خطای ممکن برای هر تخمین زن بایاس نشده‌ای استفاده می‌شود. البته فرم‌های مختلفی از حد CRLB بصورت ترکیبی و یا مستقل [۳] وجود دارد.

برای انجام آنچه که ذکر شد، آرایه‌ای را با N عنصر که در حال دریافت M سیگنال از M جهت متفاوت است در نظر بگیرید $(\underline{\theta},\underline{\phi})=\{(\theta_1,\phi_1),(\theta_2,\phi_2),\ldots(\theta_M,\phi_M)\}$. در نتیجه خروجی عناصر آرایه شکل (۱) چنین خواهد بود:

$$\underline{x}(t)=A(\underline{\theta},\underline{\phi})\underline{s}(t)+\underline{n}(t) \qquad (1)$$

معادلـه (۱) معادلـه عمومی پردازش آرایه است، که در آن $\underline{s}(t)$ برداریست مختلط و M بعدی که نشان دهنده تعداد منابع اسـت و $\underline{n}(t)$ بـردار N بعـدی نویـز سفید، جمع پذیر و مکانی می‌باشد. همچنین ستون‌های ماتریس $A(\theta,\phi)$ شامل بردارهای جهت نماد (Array Manifold) است که بطور عمومی با $\underline{a}(\theta,\phi)$ نشان داده می‌شوند؛ بعبارت دیگر:

$$A(\theta,\phi)=[\underline{a}_g(\theta_1,\phi_1),\underline{a}_g(\theta_2,\phi_2),\ldots\underline{a}_g(\theta_M,\phi_M)]$$

$$\underline{a}_g(\theta,\phi)=\underline{g}(\theta,\phi)\odot\underline{a}(\theta,\phi) \qquad (2)$$

که در آن $\underline{g}(\theta,\phi)$ بردار بهره عناصر آرایه است و

$$\underline{a}(\theta,\phi)=\exp(-j\pi\,\underline{r}.\underline{k}(\theta,\phi)) \qquad (3)$$

در ایـنجا مـا از نمادسـازی بکـار رفته [۲] جهت نوع بردار جهت نما یا بردار نشان‌دهنده موقعیت منابع، $\underline{a}(\theta,\phi)$، استفاده جسـته‌ایـم. در معادلـه (۳) $\underline{r}=[\underline{r}_x,\underline{r}_y,\underline{r}_z]^T$ و $\underline{k}(\theta,\phi)=\pi[\cos\theta\cos\phi,\sin\phi\ \cos\theta,\sin\phi]^T$ بـردار عـدد مـوج اسـت. در آرایـه‌هـای صـفحه‌ای $\underline{r}=[\underline{r}_x,\underline{r}_y,o]^T$ و در آرایـه‌هـای خطـی که عناصر بموازات محور xها چیده شده‌اند، $\underline{r}=[\underline{r}_x,o,o]^T$ خـواهد بـود. عناصـر ایـن بـردار نسـبت بـه $\lambda/2$ نرمالیزه شده‌اند. با درنظر گرفتن $\underline{r}$ و $\underline{k}(\theta,\phi)$ و جایگزین کردن آنها برای آرایه‌های صفحه‌ای داریم:

$$\underline{a}(\theta,\phi)=\exp\{-j\pi(\underline{r}_x\cos\theta+\underline{r}_y\sin\theta)\cos\phi\} \qquad (4)$$

$$|\underline{a}(\theta,\phi)|=\sqrt{N}$$

عـبارت $\underline{r}_x\cos\theta+\underline{r}_y\sin\theta$ را بـا $\underline{R}$ نشـان مـی‌دهـیم و خواهـیم دیـد کـه عبارت خطا تابعی از اندازه $\underline{R}$ خواهد بود و

نشان‌دهنده وابستگی خطا به نحوه چیدن آرایه یعنی r_x و r_y است.

در ادامـه مقاله، در بخش دوم به معرفی الگوریتم MUSIC و حد پایین کرامر- راو برای محاسبه خطای الگوریتم پرداخته و مفاهـیم کلی آن را بررسی می‌کنیم. در بخش سوم به دسته‌بندی آرایه‌ها خواهیم پرداخت و در بخش چهارم با انجام محاسباتی بـه فـرمول‌هـای تحلیلـی لازم بـرای نشـان دادن نحـوه ارتـباط خطا و یا حد پایین کرامر ـ راو با شکل هندسی آرایه می‌رسیم. همچنـین در بخـش پـنجم شـبیه‌سازی نتایج بدست آمده از حیث شکل هندسی ارائه می‌شود، این نتایج برای دو آرایه معروف دایروی شکل و Y شکل [۴] گرفته خواهد شد.

۱ـ الگوریتم MUSIC و خطای آشکارسازی و جداسازی

همچنانکه در قسمتهای قبل اشاره شد این الگوریتم از نوع الگوریتم زیرفضای سیگنال است و در سال ۱۹۸۹ توسط Stoica و Nehorae کامـل شـد [۱]. اگر چه قریب به یک دهه از پدید آمدن این الگوریتم می‌گذرد، تا بحال تغییرات زیادی یافته است. دلـیل اصلـی ایـن امـر را مـی‌تـوان در ضـعفهای این الگوریتم دانست؛ دلایلی از قبیل ضعیف بودن در آشکارسازی و جداسازی سـیگنال‌هـای همبسـته، وابستگی خطای آن به تعداد نمونه‌های دریافتی و همچنین نسبت سیگنال به نویز را می‌توان از دلایل عمده برشمرد. الگوریتم MUSIC زوایای دریافت سیگنال‌های ورودی به آرایه را از طریق ریشه‌های معادله زیر بدست آورد:

$$F_{MUSIC}(\theta,\phi) = A^H(\theta,\phi)\, P_A^{\perp}\, A(\theta,\phi) = 0 \qquad (۵)$$

کـه در آن $P_A^{\perp} = I - A(A^H A)^{-1} A^H$ اپـراتور تصـویر نامیده می‌شود و $A\varepsilon\in^{N-M}$ ماتریسی متشکل از بردارهای ویژه زیـر فضـای نویـز اسـت [۱]. بـرای بدست آوردن خطای هر تخمین زننده‌ای که پارامترهای تخمین آن (مثلا" دراینجا θ و ϕ) دارای متوسط صفر است (بایاس نشده‌اند)، CRB عبارتست از

$$CRB(p) = \frac{\sigma^2}{2}\left\{\sum_{t=1}^{L} \operatorname{Re}\left[\underline{s}^H(t)\, D^H\, P_A^{\perp}\, D\underline{s}(t)\right]\right\}^{-1} \qquad (۶)$$

کـه $D = \frac{\partial A}{\partial P}$ و p می‌تواند θ و یا ϕ باشد. گرچه عبارت (۵) تنها فرمول موجود در محاسبه خطا چه در آشکارسازی و چه در جداسـازی سیگنال‌ها در سیستم Superresolution است، ولی باید اذعان کرد که بخودی خود اطلاعات چندانی را نسبت به نحـوه طراحـی آرایه یا چگونگی درنظر گرفتن پارامترهایی چون فرکانس یا همبستگی سیگنال‌ها و یا عوامل مختلف دیگری که عمـوما" در طراحـی ایـن نـوع آرایـه‌ها مورد نیاز است، در اختیار نمی‌گذارد. پس برای رسیدن به هدف اصلی که بدست آوردن روابطـی اسـت کـه خطا را به شکل هندسی آرایه و یا به نحوه چیدن آرایه ربط می‌دهد، مجبوریم شرایط و فرضهایی را در نظر بگیـریم. بنابراین در هر دو حالت آشکارسازی و جداسازی فرض‌های مشترکی چون معلوم بودن تعداد نمونه‌های دریافتی، معلوم بـودن نسـبت سـیگنال بـه نویز، تعداد عناصر آرایه و بهره عناصر استفاده خواهیم کرد. همچنین برای ساده شدن مطلب، بدون هـیچ نقصی در کلّیّتِ محاسبات، در حالتی که خطای آشکارسازی مورد نظر است فقط یک سیگنال در محیط فرض می‌شود. از آنجـا کـه آشکارسازی برای تک تک منابع اجرا خواهد شد، لذا می‌توان خطا را نسبت به هرکدام جداگانه بدست آورد و در مورد خطـای جداسـازی گـرچه مهـم ایـن است که بتوان آن را نسبت به چندین منبع محاسبه کرد، ولی برای سادگی باید دو به دو مـنابع را از یکدیگر آشکارسازی کرد. پس در اینجا می توان خطای جداسازی را در هر مرحله برای دو منبع فرضی که در فاصله معینی از یکدیگر قرار گرفته‌اند در نظر گرفت. پس در دو حالت فوق محاسبات را بطور جداگانه انجام می‌دهیم.

۲ـ الف خطای آشکارسازی

این فرض که در این حالت تعداد منابع فقط یکی است $(M = ۱)$، پس P_1، توان سیگنال دریافتی، برابر است با:

$$P_1 = E\left\{s^H(t)\, s(t)\right\} = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L} s^H(t)\, s(t)$$

که با جایگذاری در (۵) داریم:

$$CRB_{det}(p) = \frac{\sigma^2}{2Lp_1} \frac{1}{\underline{a}_{1g}^{\bullet H} P_{\underline{a}_{1g}}^{\perp} \underline{a}_{1g}^{\bullet}} \quad (۷)$$

ایـن عـبارت نشـان مـی‌دهـد که خطای حاصل از آشکارسازی بطور معکوس با مشتق بردار جهت نما (Manifold Vector) رابطـه دارد و اگر فرض کنیم $\sigma^{۲} / ۲Lp_{۱}$ عبارتی ثابت باشد، با بسط دادن عبارت $(\underline{a}_{1g}^{\bullet H} P_{\underline{a}_{1g}}^{\perp} \underline{a}_{1g}^{\bullet})^{-1}$ باید نحوه ارتباط خطا را با شکل هندسی آرایه بدست آورد.

۲ـ ب ـ خطای جداسازی

در ایـن حالت فرض بر وجود دو منبع در محیط می است، یعنی (M=۲) که به فاصله $\Delta\theta$ یا $\Delta\phi$ از یکدیگر قرار گرفته اند. بـرای سـادگی مسـأله فـرض مـی کـنـیم کـه سـیگنال‌هـای دریافتی همبستگی نداشته باشند. در این صورت با در نظر گرفتن $\underline{s}(t) = [s_{۱}(t), s_{۲}(T)]$ معادله (۵) بصورت زیر در خواهد آمد:

$$CRB_{res}(p) = \frac{\sigma^2}{2Lp_1} \frac{1}{A^{\bullet H} P_A^{\perp} A^{\bullet}} \quad (۸)$$

که در آن $A^{\bullet} = [\underline{a}_{۱g}^{\bullet}, \underline{a}_{۲g}^{\bullet}] \in C^{N*۲}$ فقط دارای دو بردارِ جهت نما است.

با توجه به نیاز معادلات (۶) و (۷) به مشتق بردار جهت نما، در اینجا به آنالیز آنها خواهیم پرداخت.

با توجه به (۴) داریم:

$$\dot{\underline{a}}_{\theta}(\theta,\phi) = -j\pi \cos\phi \; \dot{\underline{R}}(\theta) \odot \underline{a}(\theta,\phi) \quad (۹)$$

$$\underline{a}_{\phi}(\theta,\phi) = +j\pi \cos\phi \; \underline{R}(\theta) \odot \underline{a}(\theta,\phi)$$

$\dot{\underline{a}}_{\theta}(\theta,\phi)$ و $\dot{\underline{a}}_{\phi}(\theta,\phi)$ بترتیب مشتقات $\underline{a}(\theta,\phi)$ نسبت به θ و ϕ هستند. همچنین $\odot$ نشان دهنده ضرب عنصر در عنصر یا ضرب هادامارد بردارها است. در حالت کلی برای آرایه های غیرایزوتروپیک داریم:

$$\underline{a}_g^{\bullet}(\theta,\phi) = \dot{g}(\theta,\phi)\,\underline{a}(\theta,\phi) + g(\theta_1\phi)\,\dot{\underline{a}}(\theta_1\phi) \quad (۱۰)$$

و در نتیجه اگر مشتق را نسبت به θ بنویسیم، داریم

$$\underline{a}_{g\theta}^{\bullet}(\theta,\phi) = \dot{g}_{\theta}(\theta,\phi)\,\underline{a}(\theta,\phi) - j\pi\cos\phi\; g(\theta,\phi)\dot{\underline{R}}(\theta) \odot \underline{a}(\theta,\phi) \quad (۱۱)$$

$$\underline{a}_{g\theta}^{\bullet}(\theta,\phi) = [\dot{g}_{\theta}(\theta,\phi)[\underline{1}] - j\pi\cos\phi\; g(\theta,\phi)\dot{\underline{R}}(\theta)] \odot \underline{a}(\theta,\phi) \quad (۱۱)$$

$$\underline{a}_{g\theta}^{\bullet}(\theta,\phi) = \dot{\underline{G}}_{\theta}(\theta,\phi) \odot \underline{a}(\theta,\phi)$$

کـه در آن $\dot{\underline{G}}_{\theta}(\theta,\phi)$ را بـردار مشـتق بهره نسبت به θ می‌نامیم. دلیل این نام گذاری را وقتی که $g(\theta,\phi) = 0$ باشد بهتر دَرک می‌کنیم. همچنین برای مشتق نسبت به ϕ خواهیم داشت.

$$\dot{\underline{a}}_{g\phi} = \dot{\underline{G}}_{\phi}(\theta,\phi) \odot \underline{a}(\theta,\phi) \quad (۱۲)$$

که در آن

$$\dot{\underline{G}}_{\phi}(\theta,\phi) = \dot{g}_{\phi}(\theta,\phi)[\underline{1}] + j\pi\sin\phi\; \underline{R}(\theta) \quad (۱۳)$$

بردار مشتق بهره نسبت به ϕ است. بردار [۱] برداریست که تمام اعضای آن یک هستند.

۲ـ دسته بندی شکل آرایه های صفحه‌ای و خطی

در اینجا این مطلب به ذهن می‌رسد که شکل‌های مختلف، چه درآشکارسازی و چه درجداسازی سیگنالهای رسیده به آرایه به خطاهای مختلف منجر خواهند شد. در این قسمت شکل قرار گرفتن آرایه از حیث نزدیکی عناصر و یا دوری آنها از یکدیگر و یا اینکه چه دهانه‌ای از آرایه (در آرایه‌های خطی، دهانه آرایه همان طول آرایه خواهد بود) حصول خطای معینی کیفیت بهتری دارد، مطرح نیست. در مقالات بعدی به اهمیت تعریف شکل‌های مختلف آرایه خواهیم پرداخت و اثبات خواهیم کرد که خطای جداسازی به ضریب همبستگی سیگنالهای محیطی بستگی ندارد، با آنکه در حالت کلی این خطا به این ضریب بستگی دارد. شکل آرایه صفحه‌ای نیز توسط بردارهای $\underline{r}_x \in R^{N*1}$ و $\underline{r}_y \in R^{N*1}$ تعریف می‌شود و معمولا" در نظر گرفتن مرکز آرایه در مبدأ فازی نحوه محاسبات را آسانتر خواهد نمود.

ـ آرایه متقارن

هر عنصر این آرایه یک عضو متناظر که نسبت به مرجع آرایه متقارن باشد دارد، بعبارت دیگر

$$\sum_i r_{xi} = \sum_i r_{yi} = 0 \qquad \forall i = \text{فرد} \tag{۱۴}$$

اگر تقارن فقط روی محور x برقرار باشد، آنگاه: $\sum_i r_{xi} = 0$ و بطور مشابه، اگر تقارن روی محور y نیز برقرار باشد، آنگاه:

$\sum_i r_{yi} = 0$.

ـ آرایه‌های متعامد

در این دسته آرایه، بردارهای $\underline{r}_y$ و $\underline{r}_x$ بر یکدیگر عمودند، یعنی:

$$\underline{r}_x^T . \underline{r}_y = 0 \tag{۱۵}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که تقارن آرایه نسبت به محور x یا y و یا هر دو شرط کافی و البته نه لازم، برای تعامد دو بردار است.

ـ آرایه متقارن موازنه شده

در اینجا آرایه‌ها بردارهای $\underline{r}_y$ و $\underline{r}_x$ هم متعامدند و هم دارای اندازه‌های یکسان هستند، بعبارت دیگر

$$\underline{r}_x^T . \underline{r}_y = 0 \qquad \text{و} \qquad |\underline{r}_x| = |\underline{r}_y| \tag{۱۶}$$

یکسان بودن نرم دو بردار به این معنی است که عناصر بطور یکنواخت در دو جهت x و y پراکنده شده‌اند (اگرچه ممکن است در نگاه اول به آرایه در این مورد مردد شویم). بسیاری از آرایه‌های عمومی موجود مثل ساختارهای دایروی یکنواخت، آرایه‌هایی X شکل، Y شکل، مربعی بصورت شبکه و ... جزء این کلاس از آرایه‌ها بشمار می‌روند. این گونه آرایه‌ها دارای بردارهای جهت نمای متفاوت از دیگر آرایه‌ها، و تمامی آرایه‌هایی که در این کلاس قرار می‌گیرند خاصیت یکسانی دارند.

ادامه این مقاله از دو آرایه معروف ۲۴ عنصری Y شکل و دایروی یکنواخت برای بررسی نتایج استفاده خواهیم کرد. [۴] (شکل‌های ۲ ـ الف و ۲ ـ ب).

۳ـ بسط فرمولهای خطا

۳-۱ـ بسط فرمولهای خطای آشکارسازی

برای بسط فرمول‌های خطا، ابتدا از خطای آشکارسازی یعنی $\mathrm{CRB_{det}}(p)$ شروع می‌کنیم. با توجه به (۶) در اینجا به عبارت

$\underline{a}_{1g}^{\bullet H} P\underline{a}_{1g}^{\perp} \underline{a}_{1g}^{\bullet}$ توجه می‌شود؛ با جایگذاری $P\underline{a}_{1g}^{\perp}$ داریم:

$$\underline{a}_{1g}^{\bullet H} P\underline{a}_{1g}^{\perp} \underline{a}_{1g}^{\bullet} = \underline{a}_{1g}^{\bullet H} [I - \underline{a}_{1g} (\underline{a}_{1g}^{H} \underline{a}_{1g})^{-1} \underline{a}_{1g}^{H}] \underline{a}_{1g}^{\bullet}$$

$$= \underline{a}_{1g}^{\bullet H} \underline{a}_{1g}^{\bullet} - \underline{a}_{1g}^{\bullet H} \underline{a}_{1g}^{\bullet} (\underline{a}_{1g}^{H} \underline{a}_{1g})^{-1} \underline{a}_{1g}^{H} \underline{a}_{1g}^{\bullet} \qquad (۱۷)$$

دو عبارت $\underline{a}_{1g}^{\bullet H} \underline{a}_{1g}^{\bullet}$ و $\underline{a}_{1g}^{H} \underline{a}_{1g}^{\bullet}$ به راحتی قابل محاسبه هستند:

$$\underline{a}_{1g}^{H} \underline{a}_{1g} = (g_1 \underline{a}_1)^H . (g_1 \underline{a}_1) = |g_1|^2 |\underline{a}_1|^2 = N |\underline{g}_1|^2 \qquad (۱۸)$$

چرا که $|\underline{a}_1(\theta,\phi)| = \sqrt{N}$ و

$$\dot{\underline{a}}_{1g}^{H} . \dot{\underline{a}}_{1g} (\dot{\underline{G}}_1 \odot \underline{a}_1)^H (\dot{\underline{G}}_1 \odot \underline{a}_1) = \left|\dot{\underline{G}}_1\right|^2 \qquad (۱۹)$$

همچنین:

$$\dot{\underline{a}}_{1g}^{H} . \dot{\underline{a}}_{1g} = (\dot{\underline{G}} \odot \underline{a}_1)^H (\underline{g}_1 \ \underline{a}_1)^H = g_1 (\dot{\odot} \quad \underline{a}_1)^H . \underline{a}_1 = g_1 \sum_{i=1}^{N} \dot{G}_{1i}^{H} \qquad (۲۰)$$

$\dot{G}_{1i}^{H}$ عنصر iام از بردار $\dot{\underline{G}}_1^{H}$ است.

بنابراین، با استفاده از (۱۷) تا (۲۰) می‌توان نوشت:

$$\dot{\underline{a}}_{1g}^{H} P\underline{a}_{1g}^{\perp} \dot{\underline{a}}_{1g} = \left|\dot{\underline{G}}_1\right|^2 - \frac{\left|\sum_{i=1}^{N} \dot{G}_{1i}^{H}\right|^2}{N} \qquad (۲۲)$$

با جایگزینی $\dot{\underline{G}}_{1\theta}$ و $\dot{\underline{G}}_{1\phi}$ به جای $\dot{\underline{G}}_1$ در عبارت (۱۴)، عبارت (۶) بصورت زیر در می‌آید:

$$CRB_{\det}(\phi) = \frac{\sigma^2}{2LP_1|g_1|^2} \frac{1}{\pi^2 \sin^2 \phi_1} [|\underline{R}(\theta_1)|^2 - \frac{1}{N} \Sigma^2 R_i(\theta_1)]^{-1} \qquad (۲۳)$$

$$CRB_{\det}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2LP_1|g_1|^2} \frac{1}{\pi^2 \cos^2 \phi_1} [\left|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\right|^2 - \frac{1}{N} \Sigma^2 \dot{R}_i(\theta_1)]^{-1} \qquad (۲۴)$$

در فرمول‌های بالا Σ^2 به معنی توان دوم مجموع است. همچنانکه از (۱۵) و (۱۶) برمی‌آید، عبارتی کامل را بدست آورده‌ایم که خطای آشکارسازی را به شکل هندسی آرایه ربط می‌دهد بدست آورده‌ایم. فرمول‌های فوق عمومیت برای تمام اشکال هندسی دارند اما با در نظر گرفتن بعضی از حالات خاص مثل آنچه که در بخش چهارم ذکر شد نتایج بهتری از آنها قابل استخراج است. بعنوان مثال اگر آرایه متقارن باشد، یعنی : $\Sigma R_i(\theta) = \Sigma \dot{R}_i(\theta) = 0$، آنگاه (۱۵) و (۱۶) بصورت زیر ساده خواهند شد:

$$CRB_{\det}(\phi) = \frac{\sigma^2}{2LP_1|g_1|^2} \frac{1}{\pi^2 \sin^2 \phi_1 |\underline{R}(\theta_1)|^2} \qquad (۲۵)$$

$$CRB_{\det}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2LP_1|g_1|^2} \frac{1}{\pi^2 \cos^2 \phi_1 \left|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\right|^2} \qquad (۲۶)$$

از (۱۷) و (۱۸) کاملا" مشخص است که خطای آشکارسازی به اندازه دهانه آرایه یعنی $|\underline{R}(\theta_1)|^2$ بستگی معکوس دارد،

بعـبارت دیگر آرایه‌های بزرگتر دارای خطای کمتری هستند و این خود اولین قدم در طراحی آرایه‌های Superresolution برای داشـتن حداکثـر دقـت و حـداقل خطـا اسـت. همچنین مشخص شد که آرایه‌های متقارن دارای خطای کمتری نسبت به سایر آرایـه‌هـا هسـتند که. از مقایسه (۱۵) و (۱۶) با (۱۷) و (۱۸) براحتی قابل تشخیص است؛ و بدلیل آن که $\dot{\underline{R}}(\theta)=\underline{R}(\theta+\frac{\pi}{2})$، پس: $CRB_{\text{det}}(\theta)=\Big|_{\theta_\circ,\phi_\circ}=CRB_{\text{det}}(\phi)\Big|_{\theta_\circ-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}-\phi_\circ}$.

در اینجا بد نیست نگاهی به محاسبات مانیکاس و کریمی [۵] داشته باشیم. فرمول‌های $CRB_{\text{det}}(\theta)$ ǎ $CRB_{\text{det}}(\phi)$ که آنها در حالـت کلـی بدسـت آوردنـد مشـابه (۱۷) و (۱۸) هسـتند، در حالـیکه دیـدیم این فرمول‌ها برای حالت خاص آرایه حاصل می‌شوند که نشان دهنده کلّیّت فرمول‌های (۱۵) و (۱۶) است.

برای آرایه‌های متقارن موازنه شده نیز مطلب دیگری قابل توجه است. در این آرایه‌ها می‌توان نوشت:

$$|\underline{R}(\theta)|^2=|\underline{r}_x\cos\theta+\underline{r}_y\sin\theta|^2=|\underline{r}_x|^2\cos^2\theta+|\underline{r}_x|^2\sin^2\theta=|\underline{r}_x|^2=|\underline{r}_y|^2$$

و همچنین می‌توان ثابت کرد که دراین آرایه‌ها $|\underline{R}(\theta)|^۲=\left|\dot{\underline{R}}(\theta)\right|^۲$. پس اگر فرض کنیم که $g_۱$ نیز تابعی از θ نباشد در اینصورت:

$$\text{CRB}_{\text{det}}(\theta)=\frac{\sigma^2}{2\text{LP}_1|\text{g}_1|^2}\frac{1}{|\underline{\text{r}}_\text{x}|^2\sin^2\phi_1} \qquad (۲۷)$$

$$\text{CRB}_{\text{det}}(\phi)=\frac{\sigma^2}{2\text{LP}_1|\text{g}_1|^2}\frac{1}{|\underline{\text{r}}_\text{x}|^2\cos^2\phi_1}$$

همچنانکه دیده می‌شود، در این حالت خطای آرایه تابعِ θ نخواهد بود و این یکی از محاسن آرایه‌های متقارن موازنه شده است که در بخشهای قبلی نیز به آن اشاره رفت. در این حالت: $CRB_{\text{det}}(\theta)=\Big|_{\phi=\phi_\circ}=CRB_{\text{det}}(\phi)\Big|_{\phi=\phi_\circ+\frac{\pi}{۲}}$؛ به عبارت دیگر با داشتن یکی از فرمول‌های خطا و با یک شیفت ساده، می‌توان مشخصات خطای دیگر را بدست آورد. اگر در این حالت رابطه خطا را با شکل آرایه بررسی کنیم، خواهیم دید که:

$$\text{CRB}_{\text{det}}(\theta)\alpha\frac{1}{|\underline{\text{r}}_{\text{x}}|^2}\ \text{یا}\ \text{ǎ}\frac{1}{|\underline{\text{r}}_{\text{y}}|^2} \qquad (۲۸)$$

$$\text{CRB}_{\text{det}}(\phi)\alpha\frac{1}{|\underline{\text{r}}_{\text{x}}|^2}\ \text{یا}\ \text{ǎ}\frac{1}{|\underline{\text{r}}_{\text{y}}|^2} \qquad (۲۹)$$

چـنانکه قـبلا“ گفته، شد این نشان‌دهنده آن است که خطای آشکارسازی فقط به دهانه آرایه بستگی دارد و به نحوه توزیع عناصـر در صفحه بستگی ندارد. بعبارت دیگر آرایه‌های مختلف که دارای دهانه‌های یکسان باشند دارای خطای مشابهی خواهند بـود. تـوجه بـه ایـن نکـته بسـیار مهـم اسـت، چرا که نشان می دهد طراح در هنگام طراحی آرایه برای رسیدن به یک خطای مشـخص، بـه جـواب یکتایـی نخـواهد رسـید و مجـبور است برای محدود کردن تعداد پارامترهای دیگری را نیز در حل مسأله دخالت دهد.

آرایـه‌های خطی حالت خاصی از آرایه‌های صفحه‌ای هستند، اگر عناصر آرایه فقط بر روی محور xها قرار گرفته باشند آنگاه $\underline{R}(\theta)=\underset{-x}{r}\cos\theta+\underset{-y}{r}\sin\theta=\underset{-x}{r}\cos\theta$ خواهد شد، پس:

$$\text{CRB}_{\text{det}}(\theta)=\frac{\sigma^2}{2\text{LP}_1|\text{g}_1|^2\sin^2\theta_1\cos^2\phi_1}\left[\left|\underset{-\text{x}}{\text{r}}\right|^2-\Sigma^2\,\text{r}_{\text{xi}}\right]^{-1} \qquad (۳۰)$$

$$\mathrm{CRB}_{\det}(\phi)=\frac{\sigma^{2}}{2LP_1|g_1|^{2}\cos^{2}\theta_1\sin^{2}\phi_1}[\left|\underset{-x}{r}\right|^{2}-\Sigma^{2}r_{xi}]^{-1} \qquad (۳۱)$$

حـالات خـاص ذکـر شده در قسمتهای قبل مثل آرایه‌های متقارن و متقارن موازنه شده نیز را می‌توان در اینجا بررسی کرد کـه از آن صرفنظر کرده و محاسبات را برای آرایه‌های خطی یکنواخت ادامه می‌دهیم. در این آرایه‌ها عناصر بطور یکسان پخش شده‌اند یعنی بمحض مشخص شدن d، طراحی انجام یافته است، چرا که در این حالت:

$$\mathrm{CRB}_{\det}(\theta)=\frac{\sigma^{2}}{2LP_1|g_1|^{2}\sin^{2}\theta_1\cos^{2}\phi_1 d^{2}}[\sum_{i=1}^{N}(i)^{2}-\sum_{i=1}^{N}{}^{2}(i)]^{-1} \qquad (۳۲)$$

$$=\frac{\sigma^{۲}}{LP_۱|g_۱|^{۲}\sin^{۲}\theta_۱\cos^{۲}\phi_۱ d^{۲}}[\frac{۶}{N(N+۱)(۳N^{۲}-N-۲)}]$$

$$\mathrm{CRB}_{\det}(\phi)=\frac{\sigma^{2}}{2LP_1|g_1|^{2}\cos^{2}\theta_1\sin^{2}\phi_1 d^{2}}[\sum_{i=1}^{N}(i)^{2}-\sum_{i=1}^{N}{}^{2}(i)]^{-1} \qquad (۳۳)$$

$$=\frac{\sigma^{2}}{LP_1|g_1|^{2}\cos^{2}\theta_1\sin^{2}\phi_1 d^{2}}\frac{6}{N(N+1)(3N^{2}-N-2)}$$

مفهـوم عـبارت‌هـای (۲۰) و (۲۱) آن اسـت کـه اگـر طـراح آرایـه‌ای خطـی و یکـنواخت را چـنان طراحـی کند که مثلا" $\mathrm{CRB}_{\det}(\theta)$ معینی داشته باشد، در این صورت ممکن است $\mathrm{CRB}_{\det}(\phi)$ بدست آمده زیاد مناسب نباشد. همچنین بیانگر آن اسـت که نمی‌توان $\mathrm{CRB}_{\det}(\phi)$ را مجددا" تغییر داد، چرا که $\mathrm{CRB}_{\det}(\theta)$ و $\mathrm{CRB}_{\det}(\phi)$ هر دو تابع $d^{۲}$ هستند و اگر هر یک توسط یکی از فرمول‌هـای (۲۰) یا (۲۱) یکبار تعیین شود دیگر قابل تغییر نخواهد بود.

شکل (۳) مقادیر $\sqrt{\mathrm{CRB}_{\det}(\theta)}$ و $\sqrt{\mathrm{CRB}_{\det}(\phi)}$ را برای دو آرایه شکل (۲) نشان می‌دهند.

۲ـ۳ـ بسط فرمولهای خطای جداسازی

در اینجا با توجه به حضور دو منبع در محیط، از معادله (۷) استفاده می جوئیم. با استفاده از [۵] داریم

$$\underline{a}_{۱g}^{\bullet H}P_{Ag}^{\perp}\underline{a}_{۱g}^{\bullet}=\underline{a}_{۱g}^{\bullet H}[P\underline{a}_{۱g}^{\perp}-P\underline{a}_{۱g}^{\perp}\underline{a}_{۲g}[\underline{a}_{۲g}^{H}P\underline{a}_{۱g}^{\perp}\underline{a}_{۲g}]^{-۱}\underline{a}_{۲g}^{H}P\underline{a}_{۱g}^{\perp}]\underline{a}_{۱g}^{\bullet}$$

$$=\underline{a}_{۱g}^{\bullet H}P\underline{a}_{۱g}^{\perp}\underline{a}_{۱g}^{\bullet}-\underline{a}_{۱g}^{\bullet}P\underline{a}_{۱g}^{\perp}\underline{a}_{۲g}(\underline{a}_{۲g}^{H}P\underline{a}_{۱g}^{\perp}\underline{a}_{۲g})^{-۱}\underline{a}_{۱g}^{H}P\underline{a}_{۱g}^{\perp}\underline{a}_{۱g}^{\bullet} \qquad (۳۴)$$

بـرای محاسـبه (۲۲) آن را بـه چندین بخش تقسیم‌بندی می‌کنیم. نتایج این محاسبات با استفاده از روابط ضمیمه (۱) بدست آمده‌اند:

الف ـ محاسبه $\xi_۱=\underline{a}_{۲g}^{H}P\underline{a}_{-۱g}^{\perp}\underline{a}_{۲g}$

$$\xi_1=N|g_2|^{2}[1-\frac{\left|\sum_{i=1}^{N}\exp(j\Delta s_i)\right|^{2}}{N^{2}}] \qquad (۳۵)$$

در این رابطه و در حالت کلی (یعنی $\theta_1=\theta_2$ و $\phi_1\neq\phi_2$) داریم: $\Delta s_i=\pi[R_i(\theta_2)\cos\phi_2-R_i(\theta_1)\cos\phi_1]$.

ب ـ محاسبه $\xi_۲=\underline{a}_{۲g}^{H}P\underline{a}_{۱g}^{\perp}\dot{\underline{a}}_{۱g}$

$$\xi_2 = g_2^H[\sum_{i=1}^{N}\dot{G}_{1i}\ \exp(j\Delta s_i) - \frac{\sum_{i=1}^{N}\dot{G}_{1i}\sum_{i=1}^{N}\exp(j\Delta s_i)}{N}] \qquad (۳۶)$$

ج ـ محاسبه $\xi_3 = \underline{a}_{1g}^{\bullet H} P \underline{a}_{1g}^{\perp}\ \dot{\underline{a}}_{1g}$

عبارت $\xi_۳$ در بخش قبل محاسبه شده و در اینجا فقط از نتایج آن استفاده می‌کنیم

$$\xi_3 = \left|\dot{\underline{G}}_1\right|^2 - \frac{\left|\sum_{i=1}^{N} G_{1i}^{\bullet H}\right|^2}{N} \qquad (۳۷)$$

با محاسبه سه عبارت فوق عبارت کلی

$$\underline{a}_{1g}^{\bullet H}\ P_{Ag}^{\perp}\ \dot{\underline{a}}_{1g} = \xi_3 - \frac{|\xi_2|^2}{\xi_1} \qquad (۳۸)$$

بدست خواهد آمد.

حال به بحث در روابط فوق پرداخته و آنها را برای حالت‌های خاص محاسبه می‌کنیم. قبل از ادامه، از آنجایی که در سیستم‌های Superresolution اصل بر جداسازی سیگنال‌های خیلی نزدیک به هم است، پس باید Δs_i بسیار کوچک باشد لذا از این به بعد در روابط از تقریب درجه اول $exp(j\Delta s_i)$ استفاده خواهیم جست؛ بعبارت دیگر: $\exp(j\Delta s_i) \approx 1 + j\Delta s_i$. با قراردادن $\dot{G}_۱$ در معادلات قسمتهای «ب» و «ج» و با دانستن این مطلب که این عبارات را یکبار برای مشتق نسبت به ϕ و یکبار نسبت به θ در نظر می‌گیریم (از عبارت $\dot{G}_{1\theta}$ و $\dot{G}_{1\phi}$ استفاده می‌کنیم). در ابتدا فرض می‌کنیم که $\theta_۱ = \theta$ و $\phi_۱ \neq \phi_۲$؛ بعبارت دیگر :

$$\Delta s_i = \pi R_i(\theta_۱)(\cos\phi_۲ - \cos\phi_۱) \qquad (۳۹)$$

با جایگزین نمودن $\dot{G}_{1\phi}$ به جای $\dot{G}_۱$ بدست می‌آید:

$$\left|\xi_۲(\phi)\right|^۲ = \pi^۲ \sin\phi_۱(\cos\phi_۲ - \cos\phi_۱) g_۱ g_۲^H [\frac{\sum^۲ R_i(\theta_۱)}{N} - \left|\underline{R}(\theta_۱)\right|^۲] \qquad (۴۰)$$

و همچنین:

$$\xi_1(\phi) = -\pi^2 |g_2|^2 (\cos\phi_2 - \cos\phi_1)^2 \frac{\sum^2 R_i(\theta_1)}{N} \qquad (۴۱)$$

و در نتیجه:

$$\frac{|\xi_2(\phi)|^2}{\xi_1(\phi)} = -\pi^2 \sin\phi_1^2 |g_1|^2 \frac{\left|\frac{\sum^2 R_i(\theta_1)}{N} - \left|\underline{R}(\theta_1)\right|^2\right|^2}{\frac{\sum^2 R_i(\theta_1)}{N}} \qquad (۴۲)$$

حال اگر به جای $\dot{G}_۱$، $\dot{G}_{1\phi}$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{|\xi_2(\phi)|^2}{\xi_1(\phi)} = -\pi^2 \cos\phi_1^2 |g_1|^2 \frac{\left|\sum R_i(\theta_1)\dot{R}_i(\theta_1) - \frac{\sum R_i(\theta_1)\sum \dot{R}_i(\theta_1)}{N}\right|^2}{\frac{\sum^2 R_i(\theta_1)}{N}} \qquad (۴۳)$$

همچنین:

$$\xi_3(\phi) = -\pi^2 \sin^2\phi_1 |g_1|^2 [\left|\underline{R}(\theta_1)\right|^2 - \frac{\sum^2 R_i(\theta_1)}{N}] \qquad (۴۴)$$

$$\xi_3(\phi) = -\pi^2 \cos^2\phi_1 |g_1|^2 [\left|\underline{\dot{R}}(\theta_1)\right|^2 - \frac{\Sigma^2 \dot{R}_i(\theta_1)}{N}] \quad (۴۵)$$

در نتیجه:

$$CRB_{Res}(\phi) = \frac{\sigma^2}{2LP|g_1|^2}\frac{1}{\pi^2 \sin^2\phi_1}[\{|\underline{R}(\theta_1)|^2 - \frac{\Sigma^2 R_i(\theta)}{N}\}\frac{|\underline{R}(\theta_1)|^2}{\frac{\Sigma^2 R_i(\theta_1)}{N}}]^{-1} \quad (۴۶)$$

قابـل تـوجه اسـت بـرای حالتـی کـه $\theta \neq \theta_1$ و $\phi_1 = \phi_2$ باشـد، عـبارات فوق با جود $\Delta s_i = \pi \cos\phi_1(R_i(\theta_2) - R_i(\theta_1))$ و $\Delta R_i(\theta) = R_i(\theta_2) - R_i(\theta_1)$، به شکل زیر تغییر می‌کنند:

$$CRB_{Res}(\phi) = \frac{\sigma^2}{2LP|g_1|^2}\frac{1}{\pi^2 \sin^2\phi_1}\{|\underline{R}(\theta_1)|^2 - \frac{\Sigma^2 R_i(\theta_1)}{N} +$$

$$+\frac{\left|\frac{\Sigma R_i(\theta_1)\Sigma \Delta R_i(\theta)}{N} - \Sigma R_i(\theta_1)\Sigma R_i(\theta_2) + |\underline{R}(\theta_1)|^2\right|^2}{\frac{\Sigma^2 \Delta R_i(\theta)}{N}}\}^{-1} \quad (۴۷)$$

و

$$CRB_{Res}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2LP|g_1|^2}\frac{1}{\pi^2 \cos^2\phi_1}\{\left|\underline{\dot{R}}(\theta_1)\right|^2 - \frac{\Sigma^2 \dot{R}_i(\theta_1)}{N} -$$

$$-\frac{\left|\Sigma \Delta R_i(\theta)\Sigma \dot{R}_i(\theta_1) - \frac{\Sigma \Delta R_i(\theta)\Sigma \dot{R}_i(\theta_1)}{N}\right|}{\frac{\Sigma^2 \Delta R_i(\theta)}{N}}\}^{-1} \quad (۴۸)$$

عـبارات (۲۳) تـا (۲۶) کاملتـرین عبارات در جهت محاسبه خطای جداسازی در دو برای θ و ϕ هستند. با یک نگاه دقیق مـی‌تـوان فهمید که در حالتهای خاص مثل آرایه‌های متقارن این فرمول‌ها ساده می‌شوند. در اینجا برای روشنتر شدن موضوع، حالـت آرایه‌های متقارن را بررسی می‌کنیم. با قراردادن $\Sigma R_i(\theta) = \Sigma \dot{R}_i(\theta) = 0$ در چهار معادله اخیر به راحتی دیده می‌شود کـه هـم $CRB_{Res}(\phi)$ و هـم $CRB_{Res}(\theta)$ صـفر خواهند شد که ایده آل ترین حالت ممکن است؛ ولی اگر دقت کنیم عبارت $\exp(j\Delta s_i)$ را قـبلا" بـه شکل درجه ۱ بسط داده بودیم که خود مقداری خطا را وارد مسأله کرده است، پس در مورد آرایه‌های مـتقارن به جای بسط درجه اول، از بسط درجه دوم که از خطای کمتری برخوردار است، استفاده می‌کنیم. بنابراین اگر بجای ( ) فرض شود:

$$\exp(j\Delta s_i) \cong ۱ + j\Delta s_i - \frac{(\Delta s_i)^۲}{۲} \quad (۴۹)$$

با استفاده از محاسبات ضمیمه (۲) می بینیم که اگر $\theta_1 = \theta$ و $\phi_1 \neq \phi_2$ باشند، خواهیم داشت:

$$CRB_{Res\,\Sigma R_i=۰}(\phi) = \frac{\sigma^۲}{۲LP|g_۱|^۲}\frac{۱}{\pi^۲ \sin^۲\phi_۱|\underline{R}(\theta_۱)|^۲}\{۱ - \frac{۲}{N(۲ - \frac{\pi^۲}{۲}(\cos\phi_۲ - \cos\phi_۱)^۲|\underline{R}(\theta_۱)|^۲)}\}^{-۱} \quad (۵۰)$$

و

$$CRB_{\mathrm{Res}\sum R_i(\theta)=\sum \dot{R}_i(\theta)=0}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2LP|g_1|^2}\frac{1}{\pi^2\cos^2\phi_1}\frac{1}{\left|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\right|^2} \quad (۵۱)$$

$$\cdot\{1-\frac{\cos^2\phi_1[\sum^2 \dot{R}_i(\theta_1)\sum^2 R_i(\theta_1)+\frac{\pi^2}{4}(\cos\phi_2-\cos\phi_1)^2\sum \dot{R}_i(\theta_i)R_i^2(\theta_1)]}{\frac{N}{2}|\underline{R}(\theta_1)|^2\left|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\right|^2[2-\frac{\pi^2}{2}(\cos\phi_2-\cos\phi_1)^2|\underline{R}(\theta_1)|^2]}\}^{-1} \quad (۵۲)$$

و در حالتی که $\phi_1=\phi_2$ و $\theta_1\neq\theta$ باشد:

$$CRB_{\mathrm{Res}\sum R_i(\theta)=0}(\phi) = \frac{\sigma^2}{2LP|g_1|^2}\frac{1}{\pi^2\sin^2\phi_1}\{|\underline{R}(\theta_1)|^2-\frac{2|\Delta\underline{R}(\theta)|^2}{N(2-\frac{\pi^2}{2}\cos^2\phi_1|\Delta\underline{R}(\theta)|^2}\}^{-1} \quad (۵۳)$$

و

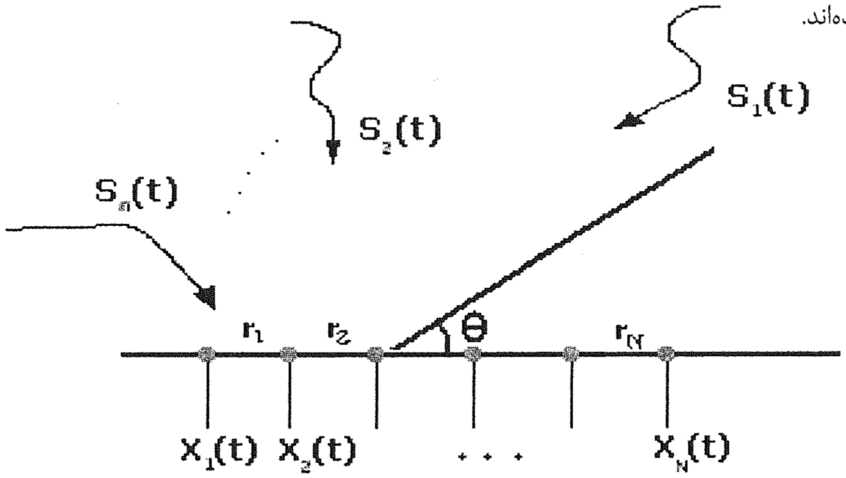
$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{Res}\sum R_i(\theta)=\sum \dot{R}_i(\theta)=0}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2LP|g_1|^2}\frac{1}{\pi^2\cos^2\phi_1}\frac{1}{\left|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\right|^2}$$

$$\{1-\frac{\cos^2\phi_1[\sum^2 \dot{R}_i(\theta_1)\Delta R_i(\theta)+\frac{\pi^2}{4}\cos^2\Phi_2\sum^2 \dot{R}_i(\theta_i)\Delta^2 R_i(\theta_1)]}{\frac{N}{2}|\Delta\underline{R}(\theta_1)|^2\left|\dot{\underline{R}}(\theta_1)\right|^2[2-\frac{\pi^2}{2}(\cos^2\Phi_2|\Delta\underline{R}|^2]}\}^{-1} \quad (۵۴)$$

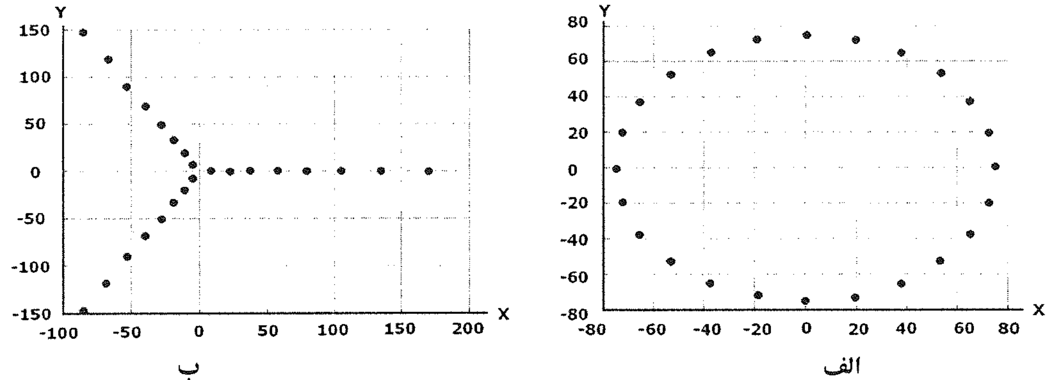
از معـادلات فـوق نتیجه می‌شود که کمترین خطا چه در $CRB_{\mathrm{Res}}(\theta)$ و چه در $CRB_{\mathrm{Res}}(\phi)$ در آرایه‌های متقارن ظاهر مـی‌شـود شـکل (۴) خطـای آشکارسازی را برای ارایه‌های شکل (۲) نشان می‌دهد. همچنین این خطا در حضور عناصر با بهره $g(\theta,\phi)=\cos\theta$ نیز در شکل (۵) مشخص شده است.

٤ـ نتایج

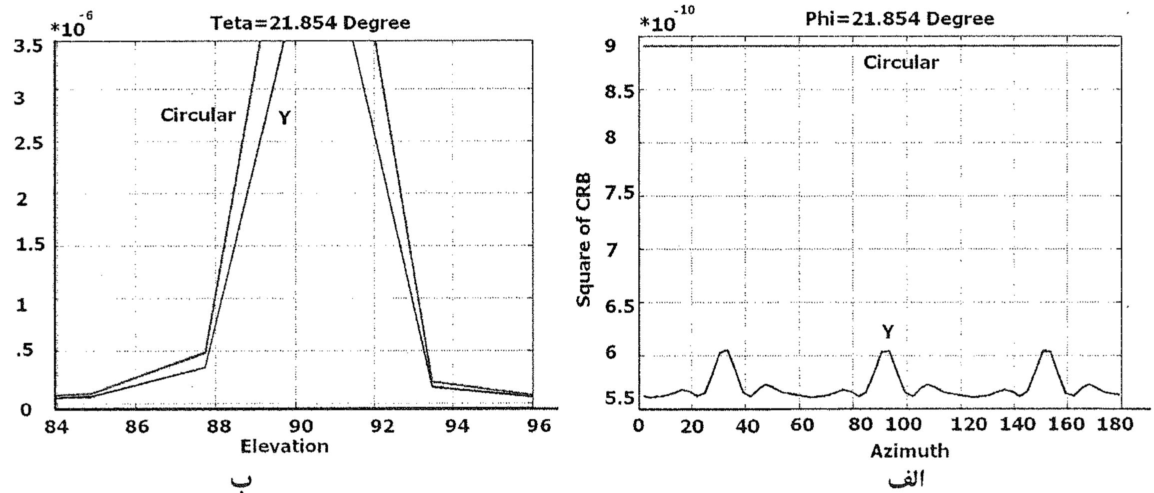
در این مقاله نشان دادیم که خطای آشکارسازی و جداسازی منابع دریافتی توسط مجموعه عناصر یک آرایه بستگی مستقیم به شکل هندسی آرایه و یا نحوه چیده شدن عناصر آرایه دارد. چگونگی ارتباط، توسط فرمولهای (۱۵) تا (۲۶) نشان داده شده‌اند. همچنین با دسته‌بندی شکل آرایه‌ها، نشان داده شد که آرایه‌های متقارن چه از حیث آشکارسازی و چه از حیث جداسازی نسبت به سایر آرایه‌ها دارای خطای کمتری است که با در نظر گرفتن بسط درجه دوم تابع نمایی فرمولهای دقیق توسط (۲۹) و (۳۰) ارائه شده‌اند.



شکل (۱): عناصر یک آرایه Superresolution



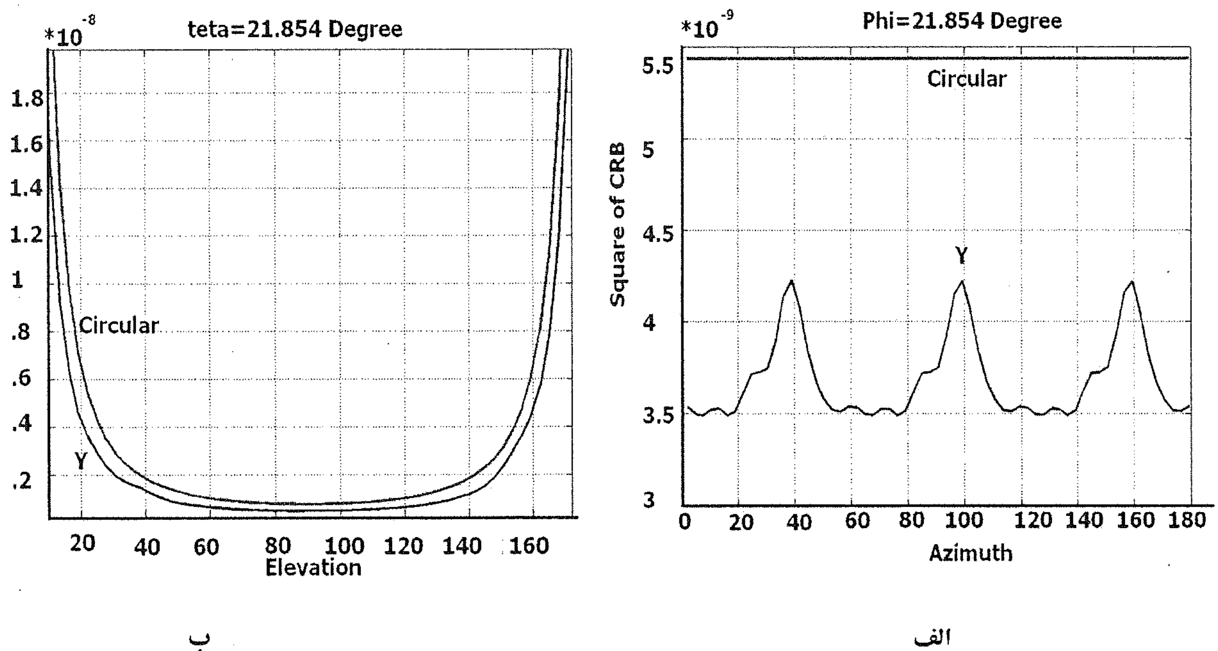
شکل (۲): موقعیت عناصر آرایه‌های دایره‌ای (الف) و Y (ب)



شکل (۳): خطای آشکارسازی برای آرایه‌های شکل (۲)

الف ـ خطای آشکارسازی نسبت به Azimuth و $\phi=20$ ب ـ خطای آشکارسازی نسبت به Elevation $\theta=20$ –

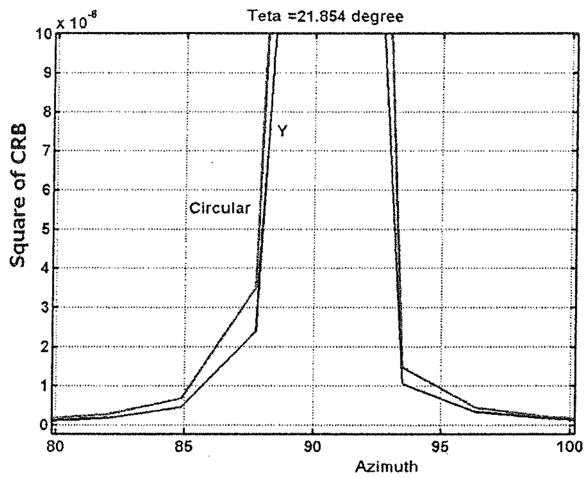
مشخصات سیستم پردازشگر $SNR=10dB, L=100, f=15MHz$ و عناصر ایزوتروپیک هستند.



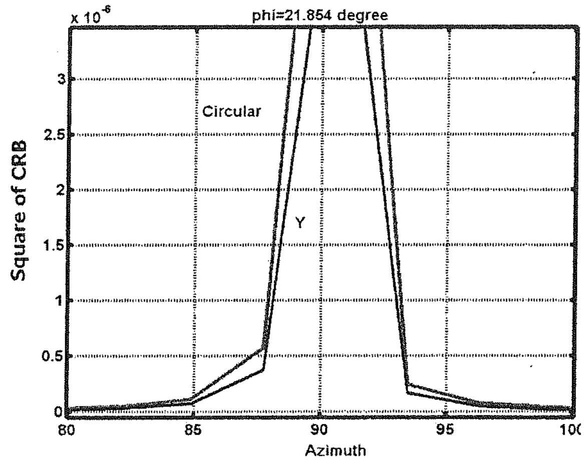
شکل (٤): خطای آشکارسازی برای آرایه‌های شکل (۲).

الف- خطای جداسازی نسبت به Azimuth و $\phi=۲۰$ ب خطای جداسازی نسبت به $\theta=۲۰$ Elevation- مشخصات سیستم پردازشگر: عناصر ایزوتروپیک

ج $\Delta\phi=۰.۰۱\pi$ و $\Delta\theta=۰.۰۱\pi, SNR=۱۰dB, L=۱۰۰, f=۱۵MHz$



ب



الف

شکل (۵): خطای آشکارسازی برای آرایه‌های شکل (۲).

الف ـ خطای جداسازی نسبت به Azimuth و $\phi = 20$ ب ـ خطای جداسازی نسبت به Elevation $\theta = 20$ - مشخصات سیستم پردازشگر: عناصر با گین $g(\theta,\varphi)=\cos\theta$ $\mathrm{SNR} = 10\mathrm{dB}, L = 100, f = 15\,\mathrm{MHz}$ $\Delta\theta = 0.01\pi$ و $\Delta\varphi = 0.01\pi$

ضمائم

الف ـ محاسبه $\xi_۱$

$$\xi_1 = \underline{a}_{2g}^{H} P \underline{a}_{1g}^{\perp} \underline{a}_{2g} = \underline{a}_{2g}^{H}(I - \underline{a}_{1g}(\underline{a}_{1g}^{H}\underline{a}_{1g})^{-1}\underline{a}_{1g}^{H})\underline{a}_{1g}$$

$$= \underline{a}_{2g}^{H}\underline{a}_{2g} - \underline{a}_{2g}^{H}\underline{a}_{1g}(\underline{a}_{1g}^{H} a_{-1g})^{-1}\underline{a}_{1g}^{H}\underline{a}_{2g}$$

با فرض:

$$\xi_1, \Delta s_i = \pi\left[R_i(\theta_2)\cos\phi_2 - R_i(\theta_1)\cos\phi_1\right]$$

را به قسمتهای زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

۱) $\underline{a}_{1g}^{H}\underline{a}_{1g} = \left|\underline{a}_{1g}\right|^2 = N\left|g_1\right|^2$

۲) $\underline{a}_{2g}^{H}\underline{a}_{2g} = \left|\underline{a}_{2g}\right|^2 = N\left|g_2\right|^2$

۳) $\underline{a}_{۲g}^{H}\,\underline{a}_{۱g}\,\underline{a}_{۱g}^{H}\,\underline{a}_{-۲g} = \left|\underline{a}_{۲g}^{H}\,\underline{a}_{۱g}\right|^{۲} = \left|\sum_{i_۲} g_۲^{H} g_۱ \exp[j\Delta s_i]\right|^{۲}$

$$\xi_1 = \underline{a}_{2g}^{H} P_{-1g}^{\frac{1}{a}}\underline{a}_{2g} = [N|g_2|]^2 - \frac{|g_1|^2|g_2|^2|\sum\exp[j\Delta s_i]|^2}{N|g_1|^2}$$

$$= N|g_2|^2\left[1 - \frac{\left|\sum\exp[j\Delta s_i]\right|^2}{N^2}\right]$$

ب ـ محاسبه $\xi_۲$

$$\xi_2 = \underline{a}_{2g}^{H} P_{-1g}^{\frac{1}{a}}\underline{a}_{1g}^{*} = \underline{a}_{2g}^{H}(I - \underline{a}_{1g}(\underline{a}_{1g}^{H}\underline{a}_{1g})^{-1}\underline{a}_{1g}^{H})\underline{a}_{1g}^{*}$$

$$= \underline{a}_{2g}^{H}\, \dot{\underline{a}}_{1g} - \underline{a}_{2g}^{H}\, \underline{a}_{1g}\, (\underline{a}_{1g}^{H}\, \underline{a}_{1g})^{-1}\, \underline{a}_{1g}^{H}\, \dot{\underline{a}}_{1g}$$

دراینجا نیز مانند قسمت قبل، ξ_2 را به بخش‌های زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$\underline{a}_{1g}^{H}\underline{a}_{1g} = N|g_1|^2$$

$$\underline{a}_{1g}^{H}\, \dot{\underline{a}}_{1g} = (g_1[\underline{1}] \odot \underline{a}_1)^H (\dot{G}_{-1} \odot \underline{a}_1) = g_1^H \sum_i \dot{\underline{G}}_{1i}$$

$$\underline{a}_{2g}^{H}\underline{a}_{1g} = (g_2[\underline{1}] \odot \underline{a}_1)^H (g_1[\underline{1}] \odot \underline{a}_1) = g_1 g_2^H \sum_i \exp[\Delta s_i]$$

بنابراین:

$$\xi_2 = g_2^H [\sum_i \dot{G}_{1i} \exp(\Delta s_i) - \frac{\sum_i \dot{G}_{1i} \sum_i \exp(\Delta s_i)}{N}]$$

با قراردادن مقادیر ξ_1 و ξ_2 و ξ_3 و (ξ_3 قبلا" در خود مقاله محاسبه شده است) در عبارت $\dot{\underline{a}}_{1g} P_{Ag}^{\perp} \dot{\underline{a}}_{1g}$ عبارت کامل بدست می‌آید.

$$\dot{\underline{a}}_{1g} P_{Ag}^{\perp} \dot{a}_{1g} = \left|\dot{\underline{G}}_1\right|^2 - \frac{\left|\sum_i \dot{G}_{1i}^{H}\right|^2}{N} - \frac{\left|\sum \dot{G}_{1i} \exp(j\Delta S_i) - \sum \dot{G}_{1i} \sum \exp(j\Delta S_i)\right|^2}{N[1 - \frac{\left|\sum_i \exp(j\Delta S_i)\right|^2}{N^2}]}$$

اگر در این حالت عبارتهای ξ_1 و ξ_2 و ξ_3 را به ترتیب با II_1 و II_2 و II_3 نشان دهیم عبارت ξ_3 بدلیل نداشتن تابع exp بدون تغییر باقی خواهند ماند یعنی $II_3 = \xi_3$

اما دو عبارت II_1 و II_2 مجددا" باید محاسبه شوند.

برای محاسبات سعی می‌کنیم فقط تغییرات را جایگزین کنیم. درعبارت ξ_1 تغییر اصلی بر عبارت $g_2^H g_1 \sum \exp(j\Delta s_i)$ حاصل شده است پس:

$$II_1 = N|g_2|^2 - \frac{\left|g_2^H g_1 \sum \exp(j\Delta s_i)\right|^2}{N|g_1|^2}$$

$$II_1 = N|g_2|^2 - \frac{\left|g_2^H g_1 - \frac{\pi^2}{2}(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)^2 g_2^H g_1 |\underline{R}(\theta_1)|^2\right|^2}{N|g_1|^2}$$

در عبارت فوق همچنین $\Delta s_i = \pi(\cos\phi_2 - \cos\phi_1) R_i(\theta_1)$ در نظر گرفته شده است. پس $II_1 = N|g_2|^2 \frac{\pi^2}{2}(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)^2 |\underline{R}(\theta_1)|^2 \left[2 - \frac{\pi^2}{2}(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)^2 |\underline{R}(\theta_1)|^2\right]$ برای محاسبه عبارت II_2 داریم

$$II_2 = \xi_2 - [\frac{1}{2}\dot{g}_1 g_2^H \pi^2 (\cos\phi_2 - \cos\phi_1)^2 |\underline{R}(\theta_1)|^2 - [\frac{\pi^2}{2}(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)^2 g_1 g_2^H$$
$$. |\underline{R}(\theta_1)|^2 (N g_1 g_1^H)] N|g_1|^2$$

به عـبارت دیگر II_2 هیچ تغییری حتی با بسط درجه دوم exp نمی‌کند. با ترکیب کردن نتایج فوق به ترتیب (۲۷) و (۲۸) بدسـت مـی‌آیند. نکته مهم که باید در اینجا مد نظر باشد، عبارت مشتق بهره است که تفاوت اصلی در فرمولها را ایجاد می‌کند. همچنـین در ایـنجا نتایج را برای حالتی که Δs_i بصورت ( ) تعریف شود بدست آوردیم، با کمی دست کاری می‌توان نتایج را برای $\Delta s_i = \pi \cos\phi_1 [R_i(\theta_2) - R_1(\theta_1)]$ نیز به شکل (۲۹) و (۳۰) بدست آورد.

مراجع

[1] Stoica, P. and Nehorai, A., "MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer- Rao Bound", IEEE Trans. On Acoustics, and signal processing. Vol. 37, No. 5, May 1989

[2] Dacos I., and Manikas A., "The use of Differential Geometry in Estimating the Manifold Parameters of one Dimentional Array of Sensors", Journal of The Franklin Institute, Engineering and Applied Mathematics, Vol. 332 B, No. 3, PP 307-332, 1995

[3] Aleksander Dogandric and Arye Nehorai, "CRAMER-RAO Bounds for Estimating –Range, velocity, and Direction with a sensor Array" 0-7803-6339-61001 © IEEE 2000 PP- 370-375

[4] A. Manikas, A. Alexiou and H. R. Karimi, "Comparison of the Ultimate Direction-Finding Capabilities of a number of Planar Array Geometries", IEE, Proc-Radar, Sonar Navig.- Vol 144, No.6 December 1997

[5] H. R. Karimi and A. Manikas, " The Manifold of a planar Array and its Effects on the Accuracy of Direction-Finding Systems", IEE Proc, Radar, Sonar and Navig. Vol 143, No. 6 PP. 349-357, December 1996.