# کاربرد هندسهٔ فینسلر در مهندسی و علـــــوم، همراه با تعمیمی از الصاق‌های فینسلری


بهروز بیدآباد
استادیار

اکبر طیبی
دانشجوی دکتری

دانشکدهٔ‌ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر


## چکیده


با توجه به دیدگاههای گوناگون هندسهٔ کاربردی، الصاقهای خطی متنوعی در هندسهٔ فینسلر پدید آمده‌اند. تنوع الصاقها در هندسهٔ فینسلری، راهگشای حل بسیاری از مسائل پیچیده در کاربرد این هندسه، بخصوص در برق، کنترل، نسبیت عام، بیولوژی، اکولوژی، کریستالها، صنعت ذوب فلزات، اخترشناسی و اخیراً نحوهٔ رشد سلولهای سرطانی و زمین‌شناسی شده است. با توجه به این موضوع، پیدایش هرگونه الصاق جالب دیگری، می‌تواند موجب توسعهٔ کاربرد هندسهٔ‌فینسلری در شاخه‌های فوق گردد.

ما در این مقاله، بطور مشخص سه هدف اصلی را دنبال می‌کنیم. ابتدا برای مشخص نمودن اهمیت این هندسه، به ارائه چند کاربرد آن در مهندسی و علوم می‌پردازیم. سپس مقدمات لازم برای مطالعه این هندسه را بیان می‌کنیم و در بخش آخر که در حقیقت قسمت ابداعی این مقاله است، الصاق جدیدی را در این هندسه می‌سازیم که تعمیمی از الصاقهای هندسهٔ‌فینسلری بوده و تعدادی از آنها را به عنوان حالتی خاص دربر می‌گیرد. لازم به یادآوری است که در تعریف این الصاق جدید از نظرات نویسندگان مقالات [Bc] و [Ch] علی‌الخصوص [Sh1] استفاده شده است.


# Application of Finsler Geometry in Sciences & Engineering with Respect to Finsler Commection


B. Bidabad
Assistant professor

A. Tayebi
Ph.D Student

Faculty of Mathematics and Computer Science,
Amirkabir University of Technology


## Abstract


*There are many contributions in connection theory of Finsler geometry, related to their applications in electrical engineering, control theory, relativity, biology, ecology, crystals, Metallurgy, Astronomy and recently Growth of cancer cells and Geology.*

*In this paper, first a scope of applications of finsler geometry in science and engineering. In given then followed by its methoddogy study. In the last part of this work which is an original contribution in connection theory of Finsler connection, we introduce a new Finsler connection which contains some of the well-known connections as a special case.*

## مقدمه

الصاقها (Connection) به زبان ساده، یک نوع مشتق‌گیری جهتی می‌باشند که نقش اساسی در هندسه و کاربرد آن در علوم دیگر دارند. بعد از فرمول *انیشتن* در نسبیت عام، هندسهٔ ریمانی مورد توجه قراز گرفت و یکی از این الصاقها که به الصاق *لوی - چی ویتا* (Levi-Civita) معروف است، جایگاه خاصی برای خود پیدا کرد. این الصاق دو نشان قابل توجه بهمراه خود دارد؛ سازگاری متری (metric compatible) و تاب صفر بودن(torsion-free) . این الصاق یک ابزار با ارزش در هندسهٔ ریمانی است و چون هندسه فینسلری یک توصیف عمیق و زیبا از هندسهٔ ریمانی است، ابداع الصاقهای جدید می‌تواند در پیشرفت هندسه و توصیف ساختارهای جدید و کاربرد آن مؤثر واقع شود.

در سال ۱۸۵۴، ریمان (Riemann) یک ساختار متری برای یک فضای معمولی، بر اساس عنصر طول قوس $ds = F(x^1,...,x^n, \frac{dx^1}{dt},...,\frac{dx^n}{dt})$ به وجود آورد که در اینجا $F(x,y)$ یک تابع مثبت روی کلاف مماسی M بوده و نسبت به $y \neq o$، همگن از درجه یک است یعنی $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y) \quad \forall \lambda > o$. یک حالت خاص، هنگامی اتفاق می‌افتد که F بصورت $F^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ باشد که در آن $g_{ij}$ها، مؤلفه‌های تانسور ریمان می‌باشند.

به زبان ساده، هندسهٔ فینسلری (Finsler) یک توصیف بهتر از هندسه ریمانی است که محدودیت مربعی بودن متریک را ندارد. در حقیقت هندسهٔ فینسلری با یک انتگرال ساده شروع شده و قدمتی به اندازهٔ حساب تغییرات دارد بویژه آنکه، مساله‌های چهارم و بیست و سوم هیلبرت(Hilbert) در رستهٔ هندسه فینسلری قرار دارند.

در سال ۱۹۲۶، *بروالد*(Berwald)، اولین الصاق را در هندسهٔ فینسلری بوجود آورد که دو تانسور انحناء، با خود به همراه داشتند. این الصاق البته دارای تاب صفر بوده ولی سازگاری متری را ندارد.[Be]. الصاق بعدی توسط *کارتان*(Cartan) کشف شد و پس از *کارتان*، شاگرد او، چرن (Chern) الصاق جالبی را بوجود آورد که به همراه الصاق بروالد باعث دگرگونی عظیمی در هندسهٔ فینسلری شدند و بسیاری از مسائل لاینحل را، بدین وسیله حل کردند. البته لازم به ذکر است که الصاق چرن، ساده‌تر از الصاق *بروالد* بوده، ولی با این حال الصاق بروالد برای فضاهایی با انحنای پرچمی ثابت،بیشتر کاربرد دارد این دو الصاق، در فضاهای *لندسبرگی* (Landsberg) برهم منطبق می‌شوند و در فضاهای بروالدی، به یک الصاق خطی روی منیفلد M کاهش می‌یابند ([Ch]).

اخیراً، شن (Shen)، یک الصاق دیگری یافته است که در صورت نداشتن hv- انحنا، به یک الصاق ریمانی روی M تبدیل می‌شود [Sh1]. لازم به یادآوری است که تمامی الصاقهای یاد شده روی کلاف $\pi^*(TM)$ ، تعریف شده‌اند.

در این مقاله نیز الصاق جدیدی در ادامه کار شن روی $\pi^*(TM)$ ساخته می‌شود که ما آنرا الصاق تعمیم یافته می‌نامیم. این الصاق جدید، الصاقهای معروف فینسلری را به عنوان حالتی خاص دربر می‌گیرد سپس در قضیه دیگری انحناهای این الصاق را محاسبه می‌کنیم و روابط مابین انحناهای این الصاق را با دیگر الصاقها می‌یابیم.

# ۱- کاربرد هندسه فینسلر در مهندسی و علوم

## ۱-۱- کاربرد هندسه فینسلر در کنترل

یکی از جذابیتهای نظریه کنترل، از طبیعت بین رشته‌ای بودن آن سرچشمه گرفته است. با مروری بر تحقیقات نوین در زمینه کنترل، مشاهده می‌کنیم که تعداد زیادی از افراد از گروههای مختلف در یک موضوع کنترل با یکدیگر تشریک مساعی می‌نمایند. در نتیجه مسائل متنوعی از کنترل در رشته‌های مختلف بوجود آمده است که حل آن احتیاج به گرایش‌های متفاوتی از ریاضیات دارد. اساس نظریه کنترل در مدل‌سازی وقایعی است که در اطراف ما به وقوع می‌پیوندد. این مدل‌ها همواره با معادلات دیفرانسیل همراه بوده‌اند. غالباً این مدل‌ها با نظریه سیستمهای کنترل خطی شروع می‌شوند، یعنی معادلاتی به صورت:

$$m < n \ , \ x \in IR^n \ , \ u \in IR^m \ , \ \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad (1)$$

که در آن A و B ماتریسهای ثابتی هستند. برای اطلاعات بیشتر در زمینه سیستمهای خطی با بعد متناهی به مرجع [Br] مراجعه شود. اخیراً تحقیقات زیادی در مورد حل دستگاههای غیرخطی انجام شدهٔ است. متخصصان کنترل ثابت کردند که هندسه دیفرانسیل مدرن بهترین مجموعه را برای تجزیه و تحلیل تعدادی از مسائل کنترل فراهم می‌کند کتاب *آسای دوری* (Isidori) [I] در سیستمهای کنترل غیرخطی با مفاهیمی از میدان‌های برداری، الصاق‌ها و کروشه‌لی روی منیفلدها شروع شده است. موضوع نظریه کنترل هندسی به سرعت توسعه زیادی پیدا کرد. اما از آنجا که از الصاق‌ها در هندسه استفاده چندانی نشده بود دچار مشکلاتی گردید. تا اینکه *گاردنر*(Gardner) پیشنهاد کرد که از روش هم ارزی کارتان استفاده شود [Sh2]. *گاردنر* و *شادویک*(Shadwick) یک مسئله مشهور در کنترل را با استفاده از این روش بطور کامل حل کردند. این مسئله پیدا کردن شرط لازم و کافی برای یک سیستم کنترل غیرخطی بود که آن را با استفاده از یک تغییر متغیر قابل تبدیل به یک سیستم خطی می‌کرد. ([G1] ، [G2] و [GW]) در این مسئله تغییر متغیرهای (تبدیلات) قابل قبول، تغییر متغیرهای فیدبک یا (feed back) هستند که در آن یک تغییر متغیر فیدبک به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} \overline{x} = \varphi(x) \\ \overline{u} = \varphi(x, u) \end{cases} \qquad (۲)$$

این مسئله توسط *واندرشاف* (Vander schaf) در سال ۱۹۸۴ حل گردید که بعدها *گاردنر* و *شادویک* با استفاده از روش مشتق‌گیری خارجی [ب]، پیشرفت اساسی در این زمینه را به وجود آوردند. هر جواب این مسئله، خانواده‌ای از معادلات دیفرانسیل از نوع *پفافی*(Pefaffian) بود. یافتن تغییر متغیری که بتواند این سیستم‌های کنترلی غیرخطی را به یک سیستم خطی تبدیل کند نیازمند انتگرال‌گیری از هر یک از معادلات دیفرانسیل از نوع *پفافی* می‌باشد.

گروه دیگری از نظریه‌پردازان کنترل در دانشگاه برکلی به پیشرفت‌های قابل توجهی در کنترل سیستم‌های چند تریلی (Multi-trailer) مربوط به تسمه نقاله‌هایی که چمدانها را مابین هواپیماها و ترمینال رد و بدل می‌کنند دست یافتند. در این میان آنها از یک سیستم مشتق خارجی که به فرم نرمال *گورسات* (Goursat) معروف است بهره بردند. که با استفاده از آن، توانستند مجموعه‌ای از دستگاه مختصات جالب را بیابند که دستگاه کنترل غیرخطی را به چند دستگاه خطی تبدیل می‌کرد. کاربردهایی از این قبیل را می‌توان در مراجع [MS], [MU], [BTS] و [MLS] یافت.

## ۲-۱- کاربردهایی از هندسهٔ‌فینسلر در بیولوژی و اکولوژی

پس از مقالهٔ *اینگاردن* (Ingarden) ، که یک مقدمه از کاربرد هندسهٔ‌فینسلری در اپتیک، مکانیک و ترمودینامیک بوده است، *آنتونلی*(Antonelli) تلاشهای او را با یک گزارش کوتاه در مورد کاربردهای هندسه فینسلر در بیولوژی، مهندسی و مکانیک کوانتومی، کامل کرد. فرض کنیم $(x^i,N^i)$ مختصات طبیعی در کارت موضعی کلاف مماسی TM باشد [ب]. در اینجا در مورد سیستم $2^{nd}$ معادله زیر بحث می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = K_{(i)}N^i \qquad \text{(غیرجمعی)} \\ \dfrac{dN^i}{dt} = -\Gamma^i_{jk}N^jN^k + r^i_jN^j + e^i \end{cases}$$

در اینجا ضرایب $\Gamma^i_{jk}$ها توابعی از $x^i$ ، $N^i$ و t می‌باشند. به سیستم فوق، سیستم *ولترا-همیلتون*(Volterra-Hamilton) از نوع فینسلری گوئیم، که در آن i نمایانگر گونه‌های جمعیت، $N^i(t)$ تعداد یا تراکم آن گونه در زمان t، $x^i(t)$ میزان تولید محصول نوع i ام می‌باشد و $\Gamma^i_{jk}$ها، $n^3$ مقدار ثابت‌اند، که ضرایب تاثیر متقابل نامیده می‌شوند. $K_{(i)}$ و $\lambda_{(i)}$ نیز ۲n عدد ثابت‌اند که بترتیب به نرخ تولید و نرخ رشد جمعیت موسومند. $e^i$ها واکنش در برابر محیط خارجی‌اند و $\Gamma^i_{jk}$ها در حالت فینسلری می‌توانند به $N^i/N^j$ وابستگی پیدا کنند که در حالت ریمانی علائم *کریستوفل* مستقل از ضرایب $N^i/N^j$ بوده و این یک نقطهٔ ضعف بزرگ

هندسه ریمانی است که با توسیع آن به هندسهٔفینسلری، این نقص از بین رفت و هندسه‌دانان فینسلری توانستند به روش رشد جاندارانی مانند مرجانها، *بریوزونها* (Bryozoans)، *سیفونوفرها* (Siphonophores) ، حشرات *گروه‌زی*(Colonial) ، قارچها و ... بپردازند که در هندسه‌های دیگر این کار شدنی نبود.

سپس با استفاده از نظریهٔ ریاضی سیستمهای ولترا ـ همیلتون فینسلری، در مورد جمعیتهای بی‌حرکت دریازی (گیاهان بدون ساقه یا جانوران ثابت و بی‌حرکت)، تحقیقاتی وسیعی صورت گرفت. به خصوص مدلی برای تعیین ارزش تولید*ترپن* (Terpen) (هیدروکربن اشباع شده با فرمول $C_6H_{10}$ در مرجانهای نرم، که دارای اجزای فرعی زهرآگینی هستند، ارائه شد (برای اطلاعات بیشتربه مرجع[آ]، صفحات ۱۳۲ تا ۱۴۱، مراجعه کنید).

## ۳-۱ـ کاربردهایی از هندسهٔفینسلر در مهندسی برق

در مهندسی برق نیز از سیستم ولترا ـ همیلتون فینسلری استفاده می‌شود. در صنعت برق، $x^i$های موجود در سیستم ولترا ـ همیلتون فینسلری، به دو حالت تقسیم می‌شوند. یک کلاس، شامل مختصات موقعیت معمولی از حرکت اجزای یک ماشین الکتریکی چرخشی مثل دینام است و نوع دیگر شارژهای الکتریکی در قسمتهای متفاوت را شامل می‌شود بنابراین $N^i = \frac{dx^i}{dt}$، معمولاً سرعت جریان برق را، به همراه $k_{(i)}=1$ ، نشان می‌دهد.

در سال ۱۹۵۰، کار قابل توجهی توسط مهندس آمریکایی (رومانی الاصل)، بنام *گابریل کرن*(Gabriel Korn) در این زمینه انجام شد. وی بطور وسیعی روی «سیستم شکار» کار کرده و توانسته بود که آنرا برای ماشینهای الکتریکی چرخشی بسط دهد. در کار *کرن*، ضرایب الصاق $\Gamma^i_{jk}$ مستقل از $N^i$ فرض شده بودند. تاب غیر صفر بوده و سمبلهای الصاق *لویی ـ چی ویتا*-Levi) (Civita Connection از یک متریک ریمانی استفاده می‌کردند که به دو قسمت انرژی القایی مغناطیسی و انرژی جنبش مکانیکی شکسته می‌شد. ([k1] ، [k2] و [k3]).

قبل از این کارها، یک فیزیکدان بنام *راندرز* (Randers) روی یک نوع جالب از ساختارهای فینسلری مطالعه کرده بود که منجر به کشف یک متر جدید بنام متر «راندرز» شد. یک متر راندرز، یک ساختار فینسلری F روی TM است که بصورت $F(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$ تعریف می‌شود و در آن $\alpha(x,y) = \sqrt{\tilde{a}_{ij}\, y^i y^j}$ و $\beta(x,y) = b_i(x)\, y^i$ به ترتیب مؤلفه‌های یک متر ریمانی و یک ۱ـ فرمی هستند. فضاهای «راندرز» ،بطور طبیعی در بسیاری از موارد کاربردهای فراوان دارند.

مطابق با محاسبات *اینگاردن* (کتاب [AIM] صفحهٔ ۳۹ را ببینید)، لاگرانژین الکترونهای نسبیتی از تابع فینسلری F(x,y) که از نوع راندرزی است محاسبه می‌شود. این امر کاربرد فراوانی در صنعت برق دارد. در اینجا:

$$F(x,y) = \sqrt{\varphi(x) + \frac{1}{4}\varphi^2(x)} \ \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2} \ + A_i(x) y^i$$

که در آن φ و A نوع نرمالیزه شده مربوط به پتانسیلهای الکتریکی (اسکالر) و مغناطیسی (بردارها) مـــی‌باشند ([SSAY], [M]). در مخابرات برای حل مسائل پیچیدهٔ کنترلی و مخابراتی به حل معادلهٔ موج $y'' + \delta^2 y = 0$ نیازمندیم که بهترین جواب این معادله، تاکنون با استفاده از متر ریمانی، پیدا شده است.

## ۴-۱ـ کاربردهایی از هندسهٔفینسلری در مکانیک، نظریه تبدیلات پلاستیکی، کریستالها و صنعت ذوب

در سال ۱۹۵۳، *فوجیناکا*(Fujinaka) ، یکی از دانشجویان *کُند* (Kondo) (کسی که از معادلات شکار کرن الهام گرفته بود و عقیدهٔ جالبی را در مورد استحکام یک هواپیما در آسمان، ارائه داده بود) یک مقاله دربارهٔ تعمیم فینسلری معادلات شکار برای ماشینهای الکتریکی چرخشی تعمیم یافتهٔ کرن نوشت. *کند*، یک مسئله بزرگ مهندسی را بررسی کرده بود که شروع کار خوبی برای مکانیک پیوسته، بویژه تئوری تبدیلات پلاستیکی و الاستیکی شد. ([ko2], [ko1], [F]) . البته شایان ذکر است که کند، قبلاً توانسته بود با استفاده از تانسور تاب کارتان، چگالی خطوط جابجا شده در کریستالها را مشخص نماید. این کشف

عمیق نقش هندسهٔفینسلری را متبلور کرد. تا اینکه در سال ۱۹۶۲، *آمارای* (Amari) نظریه تبدیلات مواد فرومغناطیسی را کشف کرد که در آن به طرز بسیار جالب و شایسته‌ای هندسهٔ فینسلری را بکار برده بود. این یک نظریه برجسته بود که توسط متخصصان و مهندسان صنعت ذوب فلزات بخوبی مورد توجه واقع شد. نظریه تبدیلات فرومغناطیسی اصولاً می‌تواند در مورد کریستالهای مایع نیز بکار رود.

### ۵-۱ـ کاربردهایی از هندسهٔفینسلری در فیزیک نسبیت، کوانتوم و اخترشناسی

کاربرد هندسهٔفینسلری در فیزیک نظری، با کوشش در مورد یکی سازی نظریه‌های میدان در مفهوم فیزیکی شروع شد. به زبان ساده، همهٔ تلاشهای یکی سازی، از یک مفهوم کوانتوم فشرده بوجود آمد. متخصصان هندسه خیلی زود دریافتند که برای اینکار نسبیت عام پایهٔ کارها است. اغلب میدان‌های الکترومغناطیسی و سایر میدانها باید داخل یک تعمیم عمومی از میدان‌های نسبی قرار گیرند که برای اینکار با وجود سختی کار، تئوری یکی سازی فینسلری برای کلاس بندی میدانها، بهترین وسیله محسوب می‌شود. در یک سطح ابتدایی، می‌توان مابین نظریه‌هایی که از $y=\frac{dx}{dt}$ استفاده می‌کنند، با آنهایی که از y=dx در تابع متریک فینسلری F(x,y) استفاده می‌کنند تمایز قائل شد. برای اهداف حاضر، برنامه دیگری نیز ساخته شده است که به دو نوع نظریه عمده، ماکروسکوپی و میکروسکوپی تقسیم می‌شود.

نظریهٔ میکروسکوپی بیشتر به ذرات بنیادی می‌پردازد. نتایج بنوعی به مشتق الصاقهای فینسلری مانند میدانهای *یانگ ـ میلز*(Yang-Mills) ، و یا یک معادله از حرکت یک ذرهٔ شارژ شده مربوط می‌شوند. رستهٔ میکروسکوپی به طرز عجیبی به الصاق‌ها بستگی دارد. در این نظریه‌ها، الصاقهای متنوع روی کلاف مماسی، کلاف مماسی تصویری و یا به طور عمده کلافهای تاری مطرح می‌گردند. الصاقها، تابها و یا انحناها می‌توانند به میدانهایی مانند میدان الکترومغناطیسی و یا میدانهای *یانگ ـ میلز* تعمیم یابند. این نظریه‌ها بسیار پیشرفته و مبتکرانه‌اند، اما با ساختارهای پیچیدهٔ ریاضی سر و کار دارند. کارهای اساسی یکی‌سازی در رسته میکروسکوپی بیشتر توسط *براند* (Brandt) انجام شده است. *براند*، هندسه کلاف مماسی *یانو* را در طول یک ساختار متریک *کلاین ـ کالیوزا*(Klien-Kaluza) مورد استفاده قرار داده و بدین وسیله به طبیعت جالب میکروسکوپی سیاه چالهٔ معروف، *شوارزچیلد* (Schavarzschild)، پی برد. کاربرد هندسه فینسلر در رسته یکی سازی ماکروسکوپی به کارهای آسانو (Asanov) [As] ، راکس بورگ(Rox burgh) [R] ، توکل (Tavakol) و وان در برگ (Van der Bergh) [TV] و بالان (Balan) [B] برمی‌گردد.

## ۲ـ مقدماتی از هندسه فینسلر

فرض کنیم M یک منیفلد $C^\infty$، n بعدی باشد. $T_xM$ فضای مماسی در $x \in M$ و $TM = U_{x\in M}T_xM$ کلاف مماسی M باشد. هر عضو TM بصورت (x,y) است که $x \in M$ و $y \in T_xM$. فرض کنید $TM_o = TM - \{o\}$. تصویر طبیعی $\pi$ :$TM \to M$ را بصورت $\pi(x,y) := x$ تعریف می‌کنیم. کلاف مماسی $\pi^*TM$، یک کلاف برداری روی $TM_o$ است که فیبرهای آن $\pi_v^* TM$، همان $T_xM$ است که $\pi(v) = x$. آنگاه:

$\pi^*TM = \{(x,y,v) \mid y \in T_xM_o \ , \ v \in T_xM\}$ . $\{\partial_i|_v := (v, \partial/\partial x^i|_x)\}_{i=1}^n$ پایهٔ طبیعی برای $\pi_v^*TM$ است. یک مقطع کانونی L از $\pi^*TM$، بصورت $L_v = (v,v)/F(v)$ است.

### ۱ـ۱ـ منیفلد فینسلری

یک ساختار فینسلری روی منیفلد M ، یک تابع $F: TM \to [o,\infty)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱ـ F روی $TM_o$ هموار است.

۲ـ F همگن مثبت از درجه یک در y است یعنی $\forall\lambda > o, \quad F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$ .

F_۳ اکیداً مثبت است، یعنی ماتریس هسین F در تمامی نقاط $TM_o$، دترمینان اکیداً مثبت دارد. لذا اگر $(g_{ij})=([\frac{1}{2}F^2])_{y^iy^j}$ آنگاه $|g_{ij}|>o$ .

زوج (M,F) را منیفلد فینسلری می‌گوئیم. به F ریمانی گفته می‌شود اگر $g_{ij}(x,y)$ مستقل از $y\neq o$ باشد.

اصل (۳) از این سیستم، گاهی اوقات برای کاربرد هندسهٔفینسلری در ساختار مدلهای هندسی در سایر علوم، بالاخص فیزیک، کوانتوم و بیولوژی، بسیار مهم‌تر است ([MHSS]).

هرمتریک فینسلری روی یک منیفلد، یک طول روی منحنی‌های $C^\infty$ تکه‌ای جهت‌پذیر تعریف می‌کند. فرض کنیم C یکی منحنی $C^\infty$ تکه‌ای جهت‌پذیر از p تا q در منیفلد فینسلری (M,F) باشد. $C:[a,b]\to M$ که در آن $C(a)=p$ $C(b)=q$ . طول C بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$L_F(c)=\int_a^b F(c(t),\frac{dc(t)}{dt})\,dt .$$

تابع فاصله القائی توسط F را با $d_F$ نشان می‌دهیم و بفرم $d_F(p,q)=\inf_C L_F(c)$ تعریف می‌کنیم.

## ۲-۲ـ تانسورهای کارتان و لندسبرگ

ساختار فینسلری F، یک تانسور $g:\pi^*TM\otimes\pi^*TM\to[o,\infty)$ با فرمول $g(\partial_i|_v,\partial_j|_v)=g_{ij}(x,y)$ به نام تانسور اساسی تعریف می‌کند که در آن $v=y^i\,\partial/\partial x^i|_x$ در این صورت $(\pi^*TM,g)$ یک کلاف برداری ریمانی روی $TM_o$ است.

فرض کنیم $A_{ijk}=\frac{1}{2}F(x,y)\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x,y)$. آشکارا $A_{ijk}$ نسبت به i و j وk متقارن است. تانسور کارتان توسط $A:\pi^*TM\otimes\pi^*TM\otimes\pi^*TM\to IR$ تعریف می‌شود به طوری که:

$$A(\partial_i|_v,\partial_j|_v,\partial_k|_v)=A_{ijk}(x,y)$$

به فرض $\nabla$ یک الصاق فینسلری (مثل چرن ـ بروالد) باشد. تعریف می‌کنیم

$$A^\bullet(X,Y,Z)=\bar{L}A(X,Y,Z)-A(\nabla_{\bar{L}}X,Y,Z)-A(X,\nabla_{\bar{L}}Y,Z)-A(X,Y,\nabla_{\bar{L}}Z)$$

$\bar{L}\in HTM$ میدان ژئودزی است که در شرط $\rho(\bar{L})=L$ صدق می‌کند.

تانسور لندسبرگ را توسط $A^\bullet:\pi^*TM\otimes\pi^*TM\otimes\pi^*TM\to R$ تعریف می‌کنیم. از طرف دیگر داریم $A^\bullet_{ijk}=A_{ijk|s}L^s$ که در آن علامت | مشخص کننده مشتق همگرد افقی(Horizontal Covariant) است.

بوضوح $A^\bullet(X,Y,L)=A(X,Y,L)=0$ , $g(L,L)=1$

## ۲-۳ـ توزیع p بعدی و الصاق غیرخطی

یک توزیع p بعدی روی یک منیفلد n بعدی M، یک تابع $\Omega$ روی M است به طوری که $\Omega_m$ یک زیر فضایی برداری P بعدی از $T_mM$ (که $0<p\leq n$ ) بوده و در شرط دیفرانسیل‌پذیری صدق کند یعنی برای هر نقطهٔ m متعلق به دامنهٔ $\Omega$، همسایگی $V_m$ای وجود داشته باشد که میدانهای برداری $x_1,...,x_p$ به گونه‌ای تعریف شوند که $\forall q\in V$، $\Omega_q=<x_1,...,x_p>_q$.

فرض کنیم $\pi:TM\to M$ تصویر طبیعی و $\pi_*:TTM\to TM$ نگاشت مماس آن باشد. $\forall v\in TM$ قرار می‌دهیم $\ker\pi_{*,v}=\{z\in TTM\,|\,\pi_{*,v}(z)=0\}$. یک کلاف برداری عمودی روی M را بصورت $VTM=U_{v\in TM}\ker\pi_{*,v}$ تعریف می‌کنیم. یک الصاق غیرخطی و یا یک توزیع عبارتست از نگاشت $N:v\in TM\to H_vTM\subset T_vTM$ که $H_vTM$ مکمل

$V_vTM$ در $T_vTM$ است یعنی $T_vTM = H_vTM \oplus V_vTM$، در اینجا $T_vTM$ فضای مماس بر $TM$ در نقطهٔ $v=(x,y)\in TM$ بوده، $V_vTM$ و $H_vTM$ بترتیب زیر فضاهای عمودی و افقی از $T_vTM$ در نقطهٔ V بوده و نیز (باز بترتیب) تولید شده توسط بردارهای $\left\{ \partial/\partial y^i |_v \right\}_{i=1}^n$ و $\left\{ \partial/\partial x^i |_v \right\}_{i=1}^n$ می‌باشند. (منظور از $\partial/\partial y^i |_v$ (و یا $\partial/\partial x^i |_v$) یعنی بردار $\partial/\partial y^i$ (یا $\partial/\partial x^i |_v$) در نقطهٔ v).

## ٤-٢ـ الصاق فینسلری و الصاق کارتان

فرض کنیم M یک منیفلد n بعدی بوده و VTM یک کلاف برداری عمودی باشد. اگر N یک الصاق غیرخطی روی TM و $\nabla$ یک الصاق خطی روی VTM باشد آنگاه زوج ( $\nabla$ و N) را یک الصاق فینسلری روی منیفلد M گوئیم و آنرا با $(HTM,\nabla)$ نیز نمایش می‌دهیم.

یک الصاق خطی روی TM، یک نگاشت $\nabla :(X,Y)\in \chi(TM)\times\chi(TM)\to\nabla_X^Y \in \chi(TM)$، است که در شرایط زیرین صدق می‌کند.

$$\nabla_{fx+gy}Z = f\nabla_x Z+g\nabla_y Z$$

$$\nabla_x fY = X(f)+f\nabla_x Y \quad , \quad \nabla_x(Y+Z) = \nabla_X Y+\nabla_X Z$$

فرض کنید که ضرایب $\nabla$ در پایه $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^j\frac{\partial}{\partial y^j} \; , \; \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ (که آنرا با ( $X_{\bar{i}}$ و $X_i$ ) نمایش خواهیم داد) بصورت زیرین نوشته شود:

$$\nabla_{x_i}X_j = \Gamma_{ji}^m X_m+\Gamma_{ji}^{\bar{m}}X_{\bar{m}} \quad , \quad \nabla_{x_i}X_{\bar{j}} = \Gamma_{ji}^{m}X_m+\Gamma_{ji}^{\bar{m}}X_{\bar{m}}$$

$$\nabla_{x_{\bar{i}}}X_j = \Gamma_{ji}^m X_m+\Gamma_{ji}^{\bar{m}}X_{\bar{m}} \quad , \quad \nabla_{x_{\bar{i}}}X_{\bar{j}} = \Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{m}X_m+\Gamma_{ji}^{\bar{m}}X_{\bar{m}}$$

بر اساس قضیه‌ای در هندسهٔ فینسلر، یک الصاق خطی $\nabla$، الصاق فینسلری است اگر و فقط اگر که $\Gamma_{ji}^m = \Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{m}}$ , $\Gamma_{ji}^m = \Gamma_{ji}^{\bar{m}}$ و همه ضرایب دیگر صفر باشند [M].

با قرار دادن $\Gamma_{ji}^m = \Gamma_{ji}^{\bar{m}} = F_{ji}^m$ , $\Gamma_{ji}^m = \Gamma_{ji}^{\bar{m}} = C_{ji}^m$، برای یک الصاق فینسلری مربوط به پایه $(X_i \, , \, X_{\bar{i}})$، خواهیم داشت:

$$\nabla_{x_i}X_j = F_{ji}^m X_m \quad , \quad \nabla_{x_i}X_{\bar{j}} = F_{ji}^m X_{\bar{m}}$$

$$\nabla_{x_{\bar{i}}}X_j = C_{ji}^m X_m \quad , \quad \nabla_{x_{\bar{i}}}X_{\bar{j}} = C_{ji}^m X_{\bar{m}}$$

اگر از مختصات موضعی $(x^i,y^i)$ روی TM استفاده کنیم آنگاه $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ یک پایه موضعی را، روی $T_vTM$ تعریف می‌کند. پایه جدید دیگری برای TTM می‌سازیم که با $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},F\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ نشان داده شده توسط $\frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ تعریف می‌گردد.

یک الصاق فینسلری روی یک منیفلد فینسلری (F و M) را h- متریکی (v- متریکی) گوئیم اگر به ترتیب داشته باشیم $\nabla_{x_i} g = o$ (یا $\nabla_{x_i} g = o$ ). اگر الصاق فینسلری h- متریکی و v- متریکی باشد آنرا متریک می‌نامیم. حال تانسورهای زیر را که موسوم به تانسورهای تاب می‌باشند در نظر می‌گیریم.

(که آن را h- تاب $R^1$ می‌گوئیم) $R_{ij}^h := \delta_j N_i^h - \delta_i N_j^h$

(که آن را hv- تاب $P^1$ می‌گوئیم) $P_{ij}^h := \partial_j^\bullet N_i^h - F_{ji}^h$

(که آن را h- تاب T می‌گوئیم) $T_{ij}^h := F_{ij}^h - F_{ji}^h$

(به v- تاب $S^1$ معروف است) $S_{ij}^h := C_{ij}^h - C_{ji}^h$

که در آن $\partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ و $\partial_i^\bullet = \frac{\partial}{\partial y^i}$ و $\delta_i = \partial_i - N_i^j \partial_i^\bullet$

$$F_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hm} (\delta_i g_{mj} + \delta_j g_{im} - \delta_m g_{ij})$$

$$C_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hm} (\partial_i^\bullet g_{mj} + \partial_j^\bullet g_{im} - \partial_m^\bullet g_{ij})$$

فرض کنیم (F و M) یک منیفلد فینسلری n بعدی و $\nabla$ یک الصاق فینسلری روی TTM باشد. $\nabla$ را یک الصاق کارتان می‌گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱ـ $\nabla_X g = o$ (یعنی h متریک و v- متریک باشد)

۲ـ $S_{ij}^h = 0$ و $T_{ij}^h = 0$ (h- تاب و v تاب صفر شوند)

۳ـ $N_i^h = y^m F_{mi}^h$

## ۳ـ یک الصاق جدید در هندسهٔ فینسلری

**تعریف:** فرض کنیم (F و M) یک منیفلد فینسلری n بعدی g وA تانسورهای اصلی و کارتان در $\pi^* TM$ بوده و D یک الصاق فینسلری روی M باشد. آنگاه می‌گوئیم:

(۱) D تاب صفر دارد، یعنی $\forall x, y \in C^\infty(T(TM))$

$$T_D(X,Y) = D_x\, \rho(Y) - D_y\, \rho(X) - \rho([X,Y]) = 0 \qquad (۳\text{-}۱)$$

(۲) D سازگار با ساختار فینسلری در مفهوم زیرین است:

$$Z \in T_v(TM_0), \forall X, Y \in C^\infty(\pi^* TM)$$

$$(D_z\, g)(X,Y) := Zg(X,Y) - g(D_z X, Y) - g(X, D_z Y)$$

$$= 2(1-u) A(\rho(Z), X, Y) + 2F^{-1} A(\mu(Z), X, Y) - 2vA^\bullet(\rho(Z), X, Y) \qquad (۳\text{-}۲)$$

که در آن $\rho(Z) = (v, \pi_*(Z))$ و $\mu(Z) = D_z FL$ و $u, v \in R$ ثابت هستند.

**قضیهٔ ۱ــ** فرض کنیم (F و M) یک منیفلد فینسلری n بعدی باشد. آنگاه یک الصاق منحصر بفرد D روی $\pi^* TM$ وجود دارد به طوری که دارای تاب صفر بوده و با ساختار فینسلری به مفهوم بالا سازگار باشد.

**اثبات:** در یک سیستم مختصات موضعی استاندارد در $TM_o$، می‌نویسیم:

$$D_{\partial/\partial x^i}\partial j=\Gamma'^{k}_{ij}\partial_k \quad \text{و} \quad D_{\partial/\partial y^i}\partial j=\Gamma'^{k}_{ij}\partial_k$$

بوضوح (۱-۳) و (۲-۳) با معالادت زیرین معادلند:

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji} \tag{۳-۳}$$

$$\Gamma'^{k}_{ij}=o \tag{۳-۴}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij})=\Gamma^L_{ki}g_{Lj}+\Gamma^L_{kj}g_{Li}+2(1-u)A_{ijk}-2vA^{\bullet}{}_{ijk} \tag{۳-۵}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^k}(g_{ij})=\Gamma'^{L}_{kj}g_{Lj}+\Gamma'^{L}_{ik}g_{jL}+2F^{-1}A_{ijk}+\{2(1-u)A_{ijL}-2vA^{\bullet}{}_{ijL}\}\Gamma'^{L}_{mk}L^m \tag{۳-۶}$$

که در آن $g_{ij}=g_{ij}(x,y)$ و $A_{ijk}=A_{ijk}(x,y)$. توجه کنید که (۴-۳) و (۶-۳)، فقط تعاریفی از $A_{ijk}$ هستند.

ما $\Gamma^k_{ij}$ را از معادلات (۳-۳) و (۵-۳) محاسبه می‌کنیم. ابتدا یک جایگشت از i و j و k در (۵-۳) بوجود می آوریم و بعد از (۳-۳) استفاده کرده و معادلهٔ زیر را بدست می‌آوریم:

$$\Gamma^k_{ij}=Y^k_{ij}-(1-u)A^k_{ij}+vA^{\bullet k}_{ij}+g^{kL}\{A_{ijm}\Gamma^m_{Lb}-A_{jLm}\Gamma^m_{jb}-A_{Lim}\Gamma^m_{jb}\}L^b \tag{۳-۷}$$

که $Y^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kL}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jL})+\frac{\partial}{\partial x^j}(g_{iL})-\frac{\partial}{\partial x^L}(g_{ij})\right\}$ ، $A^k_{ij}=g^{kL}A_{ijL}$ و $(g_{ij})^{-1}=g^{ij}$.

(۷-۳) را در $L^j$ ضرب می‌کنیم، پس داریم:

$$\Gamma^k_{ib}L^b=Y^k_{ib}L^b+\left((1-u)A^k_{Lm}+vA^{\bullet k}_{Lm}\right)\Gamma^m_{Lb}L^bL^L \tag{۳-۸}$$

فرمول (۸-۳) را در $L^i$ ضرب می‌کنیم، پس داریم:

$$\Gamma^k_{ib}L^aL^b=Y^k_{ab}L^aL^b \tag{۳-۹}$$

(۹-۳) را در (۸-۳) جاگذاری می‌کنیم.

$$\Gamma^k_{ib}L^b=Y^k_{ib}L^b+\left((1-u)A^k_{Lm}+vA^{\bullet k}_{Lm}\right)Y^m_{ab}L^aL^b \tag{۳-۱۰}$$

حال (۱۰-۳) را در (۷-۳) قرار می‌دهیم و معادلهٔ زیر را می‌یابیم:

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ij}&=Y^k_{ij}+vA^{\bullet k}_{ij}+(u-1)A^k_{ij}+g^{kL}\{A_{ijm}Y^m_{Lb}-A_{jLm}Y^m_{ib}-A_{Lim}Y^m_{jb}\}L^b\\&+\{A^k_{jm}A^m_{is}+A^k_{im}A^m_{js}-A^k_{sm}A^m_{ij}\}Y^s_{ab}L^aL^b\end{aligned} \tag{۳-۱۱}$$

فرمول (۱۱-۳) یکتایی D را ثابت می‌کند و مجموعهٔ $\{\Gamma_{ij}^{k}, \Gamma_{ij}'^{k} = 0\}$، که $\Gamma_{ij}^{k}$ توسط فرمول (۱۱-۳) مشخص شده است، یک الصاق خطی D که در شرط (۱-۳) و (۲-۳) صدق می‌کند را تعریف می‌کند.

نگاشت کلافی $\mu : T(TM_O) \to \pi^*TM$ را که در قضیهٔ (۱) تعریف کرده‌ایم، می‌توان به فرم زیر بیان نمود.

$$\mu : T(TM_O) \to \pi^*TM$$

$$\mu(\frac{\partial}{x^{i}}) = N_i^k \partial_k \text{ و } \mu(\frac{\partial}{\partial y^{i}}) = N_i^k \partial_i \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

که در آن $N_i^k = F\Gamma_{ij}^{k} L^j = F\left\{ Y_{ij}^{k} L^j - \left((1-u)A_{Lm}^{k} + vA^{\bullet k}_{Lm}\right) Y_{ab}^{L} L^a L^b \right\}$ به ضرایب الصاق غیرخطی معروفند.

نگاشت کلافی نیز که در تعریف سازگاری متری آمده است در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\rho(\frac{\partial}{\partial x^{i}}) = \partial^{i} \text{ و } \rho(\frac{\partial}{\partial y^{i}}) = \partial^{i} \qquad (۳\text{-}۱۳)$$

قرار می‌دهیم $VTM := \ker \rho = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^{i}}\right\}_{i=1}^{n}$، VTM زیرکلاف n بعدی از $T(TM_O)$ است که فیبر $V_vTM$ در v، فضای مماسی $T_v(TM_0) \supset T_v(T_xM)$ است.

برای اثبات (۱۲-۳)، قرار می‌دهیم $L^i = L\frac{\partial}{\partial x^{i}}$ که $L = L^i\partial_i$ حالا $\rho(L) = L$. پس از (۱-۳) داریم:

$$\mu(\frac{\partial}{\partial y^{i}}) = D_{\partial/\partial y^i} FL = \rho\left(\left[\frac{\partial}{\partial y^{i}}, y^k \frac{\partial}{\partial x^{k}}\right]\right) = \partial_i \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

قرار می‌دهیم $HTM = \ker \mu$. و تجزیه $T(TM_O) = HTM \oplus VTM$ را داریم. براحتی می‌توان دید که تحدید $\rho$ به HTM و تحدید $\mu$ به VTM، ایزومورفیسمهایی بتوی $\pi^*TM$ هستند.

## ٤ـ انحناها

تانسور انحنای $\Omega$ از D را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega(x,y)z = D_x D_y z - D_y D_x z - D_{[x,y]} z$$

که در آن $x, y \in C^\infty(T(TM_o))$ و $z \in c^\infty(\pi^*TM)$.

بفرض $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ یک میدان جهتی (مربوط به g) متعامد موضعی برای کلاف برداری $\pi^*TM$ باشد به طوری که :

$$g(e_i, e_n) = 0 \qquad i = 1, \dots, n-1 \qquad e_n = \frac{y}{F} = \frac{y^i}{F(x,y)} \frac{\partial}{\partial x^{i}} = L.$$

فرض کنیم $\{\omega^i\}_{i=1}^{n}$ میدان دوگان جهتی میدان‌های $e_i$ باشد. $\omega^i$ها مقطع موضعی از کلاف دوگان $\pi^*TM$ هستند به طوری‌که $\omega = \frac{\partial F}{\partial y^{i}} dx^i = \omega^n$. $\omega$ به فرم هیلبرت معروف است. بوضوح $\omega(L) = 1$.

قرار دهید $\Omega e_i = 2\Omega_i^j \otimes e_j$ و $De_i = \omega_i^j \otimes e_j$ و $\rho = \omega^i \otimes e_i$ $\{\Omega_i^j\}$ و $\{\omega_i^j\}$ را به ترتیب، فرمهای انحنا و فرمهای الصاق D مربوط به پایهٔ $\{e_i\}$ می‌گوئیم. داریم $\mu := D\ FL = F\{\omega_n^i + d(\log F)\delta_n^i\} \otimes e_i$ قرار دهید $\omega^{n+i} = \omega_n^i + d(\log f)\delta_n^i$.
می‌توان دید که $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}_{i=1}^n$ پایه موضعی برای $T^*(TM)$ است، طبق تعریف داریم $\rho = \omega^i \otimes e_i$ و $\mu = F\omega^{n+i} \otimes e_i$.
بفرض $\{\bar{e}_i, \dot{e}_i\}_{i=1}^n$ پایه موضعی برای $T(TM_o)$ باشد که دوگانش $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}_{i=1}^n$ است یعنی $\bar{e}_i \in HTM$ و $\dot{e}_i \in VTM$، به طوری که $\mu(\dot{e}_i) = Fe_i$ و $\rho(\bar{e}_i) = e_i$. واضح است که (۱-۳) و (۲-۳) با معادلات زیر معادلند:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \tag{۴-۲}$$

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k + 2(1-u)A_{ijk}\omega^k - 2vA^{\bullet}{}_{ijk}\omega^k + 2A_{ijk}\omega^{n+k} \tag{۴-۳}$$

در پایه جدید، تانسور انحنای $\Omega$، به طور موضعی، به صورت زیر در می‌آید:

$$d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \Omega_i^j \tag{۴-۴}$$

چون $\Omega_j^i$ها، ۲- فرمی‌هایی روی منیفلد $TM_o$ هستند، پس بصورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2}R_{ikL}^{\ j}\omega^k \wedge \omega^L + P_{ikL}^j\omega^k \wedge \omega^{n+L} + \frac{1}{2}Q_{ikL}^j\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+L} \tag{۴-۵}$$

در حقیقت اگر که $\dot{X}, \dot{Y} \in VTM$ و $\bar{X}, \bar{Y} \in HTM$، آنگاه تانسور انحنای افقی یا h- انحناء $R : HTM \otimes HTM \otimes \pi^*TM \to \pi^*TM$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(\bar{X}, \bar{Y})Z = \Omega(\bar{X}, \bar{Y})Z$$

و تانسور hv- انحنای $P : HTM \otimes VTM \otimes \pi^*TM \to \pi^*TM$ به این صورت تعریف می‌گردد که:

$$P(\bar{X}, \dot{Y})Z = \Omega(\bar{X}, \dot{Y})Z$$

و تانسور انحنای قائم یا vv- انحناء $Q : VTM \otimes VTM \otimes \pi^*TM \to \pi^*TM$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$Q(\dot{X}, \dot{Y})Z = \Omega(\dot{X}, \dot{Y})Z$$

عبارات R، P و Q را به ترتیب hh- تانسور، hv - تانسور و vv- تانسور انحنای الصاق D می‌گوئیم، و قرار می‌دهیم $R(\bar{e}_k, \bar{e}_L)e_i = R_{ikL}^{\ j}e_j$، $P(\bar{e}_k, \dot{e}_L)e_i = P_{ikL}^j e_j$ و $Q(\dot{e}_k, \dot{e}_L)e_i = Q_{ikL}^j e_j$.
از تاب آزاد بودن الصاق داریم $Q = 0$. مطابق با مراجع [Bcs]، [Sh2] و [Sh1] نتایج مشابهی را بدست می‌آوریم. از آنجمله شرط اول بیانچی برای R یعنی :

$$R_{ikL}^{\ j} + R_{kLi}^{\ j} + R_{Lik}^{\ j} = 0 \tag{۴-۶}$$

$$P_{ikL}^j = P_{kiL}^j \tag{۴-۷}$$

حالا، مشتق کواریانت تانسور کارتان را روی TM تجزیه می‌کنیم.

$$dA_{ijk} - A_{Ljk}\omega_i^L - A_{iLk}\omega_j^L - A_{ijL}\omega_k^L = A_{ijk|L}\omega^L + A_{ijk.L}\omega^{n+L} \tag{۴-۸}$$

نتیجه مشابهی را برای $\dot{A}$ داریم.

$$dA^\bullet{}_{ijk} - A^\bullet{}_{Ljk}\omega_i^L - A^\bullet{}_{iLk}\omega_j^L - A^\bullet{}_{ijL}\omega_k^L = A^\bullet{}_{ijk|L}\omega^L + A^\bullet{}_{ijk.L}\omega^{n+L} \tag{۴-۹}$$

بوضوح $A_{ijk|L}$، $A_{ijk.L}$، $\dot{A}_{ijk|L}$ و $A_{ijk.L}$ نسبت به i و j و k متقارنند. از تعریف (۴-۸) و (۴-۹) داریم:

$$A^\bullet{}_{ijk|n} = A^{\bullet\bullet}{}_{ijk} \quad \text{و} \quad A^\bullet{}_{ijk|n} = A^{\bullet\bullet}{}_{ijk} \tag{۴-۱۰}$$

و

$$A^\bullet{}_{njk|L} = o \quad \text{و} \quad A^\bullet{}_{njk.L} = -A^\bullet{}_{jkL} \tag{۴-۱۱}$$

**قضیه ۲ـ** اگر (M و F) یک منیفلد فینسلری n بعدی باشد و D الصاق تعریف شده در قضیهٔ (۱) باشد آنگاه:

الف ـ برای hv تانسور انحنای D داریم:

$.P_{nijk} = (u-1)A_{ijk} + (v-1)A^\bullet{}_{ijk}$

ب ـ اگر u=1 آنگاه $P_{ijkl}=0$ اگر و فقط اگر F متریک بروالد باشد و اگر u=0 آنگاه $P_{ijkl}=0$ اگر و فقط اگر F متریک ریمانی باشد.

**اثبات:** از فرمول (۴-۳) مشتق می‌گیریم و از (۲-۴)، (۳-۴)، (۴-۴)، (۸-۴)، (۹-۴)، (۱۰-۴) و (۱۱-۴) استفاده می‌کنیم داریم:

$$\begin{aligned} g_{kj}\Omega_i^k + g_{ik}\Omega_j^k &= -2A_{ijk}\Omega_n^k - 2v\left\{A^\bullet{}_{ijk|L}\omega^k \wedge \omega^L + A^\bullet{}_{ijk.L}\omega^k \wedge \omega^{n+L}\right\} \\ &+ 2(1-u)\left\{A_{ijk|L}\omega^k \wedge \omega^L - A_{ijk.L}\omega^{n+k} \wedge \omega^L\right\} \\ &- 2A_{ijL|k}\omega^k \wedge \omega^{n+L} + 2A_{ijk.L}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+L} \end{aligned} \tag{۴-۱۲}$$

(۴-۵) را در (۴-۱۲) قرار می‌دهیم داریم:

$$R_{ijkL} + R_{jikL} = -2v\left\{A^\bullet{}_{ijk|L} - A^\bullet{}_{\pm ijL|k}\right\} + 2(1-u)\left\{A_{ijk|L} - A_{ijL|k}\right\} - 2A_{ijs}R^s_{nkL} \tag{۴-۱۳}$$

$$P_{ijkL} + P_{jikL} = -2vA^\bullet{}_{ijk.L} - 2(u-1)A_{ijk.L} - 2A_{ijL|k} - A_{ijs}R^s_{nkL} \tag{۴-۱۴}$$

$$A_{ijk.L} = A_{ijL.K} \tag{۴-۱۵}$$

یک جایگشت در (۴-۱۴) انجام می‌دهیم و از (۴-۷) استفاده می‌کنیم داریم:

$$P_{ijkL} = \left\{-v\dot{A}_{ijk.L} - (u-1)A_{ijk.L}\right\} - \left(A_{ijL|k} + A_{jkL|i} - A_{kiL|j}\right) + A_{kis}P^s_{njL} - A_{jks}P^s_{niL} - A_{ijs}P^s_{nkL} \tag{۴-۱۶}$$

در (۴-۱۶) قرار می‌دهیم i=n داریم.

$$P_{njkL} = (v-1)A^\bullet{}_{jkL} + (u-1)A_{jkL} - A_{jks}P^s_{nnL} \tag{۴-۱۷}$$

از طرفی $P^s_{nmL} = o$. پس از (۱۷-۴) داریم:

$$P_{njkL} = (u-1)A_{jkL} + (v-1)A^{\bullet}{}_{jkL}$$

ب ـ اگر $u=1$ ، آنگاه به ازای هر $V$ دلخواه، این الصاق تبدیل به الصاقی از نوع چرن خواهد شد. برای این نوع الصاقها، شبیه آنچه برای الصاق چرن رخ می‌دهد، $P_{ijkl}=0$ اگر و فقط اگر $F$ از نوع بروالد می‌باشد.

اگر $u=0$، آنگاه به ازای هر $V$ دلخواهی، این الصاق تبدیل به الصاقی از نوع الصاق شن خواهد شد و برای این نوع الصاق ثابت می‌شود که $P_{ijkl}=0$ اگر و فقط اگر $F$ ریمانی باشد.

در حقیقت بر اساس بودن یا نبودن $U$ مترهای ریمانی از مترهای بروالدی متمایز می‌شوند و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

۵ـ الصاقهای بروالد، چرن و شن و رابطهٔ آنها با الصاق قضیه (۱).

الصاق $D$ در قضیهٔ (۱) در حالتهای خاص به الصاقهای معروف فوق تبدیل می‌شود.

(۵-۱) در حالتی که $v = u = 1$، $D$ به الصاق بروالد تبدیل می‌شود از روی فرمول (۱۶-۴) می‌توان فهمید که در این حالت hv- انحنای الصاق، $P_{ijkl}$، صفر می‌شود اگر و فقط اگر که $A_{ijk|L} = o$ یا به عبارتی فضای مورد نظرمان، بروالدی باشد. [Sh2]

(۵-۲) در حالتی که $u = 1$ و $v = o$، آنگاه $D$ به الصاق چرن تبدیل می‌شود. در این حالت نیز $P_{ijkl}$ صفر است اگر و فقط اگر $F$ بروالدی باشد.

(۵-۳) در حالتی که $v = u = o$ ، الصاق $D$، الصاق شن [Sh1] می‌شود. در این حالت hv- انحناء، صفر است اگر و فقط اگر ساختار فینسلری $F$ ریمانی باشد، یعنی $A_{ijk} = o$.

از روی (۱۱-۳) به رابطهٔ مابین ضرایب کریستوفلی الصاقهای چرن، شن و بروالد می‌رسیم. اگر که ضرایب کریستوفلی الصاقهای چرن، شن و بروالد را به ترتیب با ${}^c\Gamma^i_{jk}$، ${}^s\Gamma^i_{jk}$ و ${}^b\Gamma^i_{jk}$ نشان دهیم. آنگاه

$${}^b\Gamma^i_{jk} = {}^c\Gamma^i_{jk} + A^{\bullet}{}^i_{jk} \quad \text{و} \quad {}^c\Gamma^i_{jk} = {}^s\Gamma^i_{jk} + A^i_{jk} \tag{۵-۴}$$

و در مورد hv- انحناهای چرن و بروالد نیز، اگر آنها را با ${}^cP$ و ${}^cP$ نشان دهیم، داریم:

$${}^bP^i_{jkL} = {}^cP^i_{jkL} - A^{\bullet}{}^i_{jk.l}$$

بواسطه تاب صفر بودن هر سه الصاق فوق، داریم: ${}^cQ = {}^bQ = {}^sQ = o$

## نتیجه‌گیری

در این مقاله ما کاربردهایی از هندسه فینسلری را به طور اجمالی بیان کردیم و سپس الصاق خطی منحصر بفردی را بوجود آوردیم که حالت کلی از الصاقهای چرن، شن و بروالد بوده و سپس رابطهٔ مابین انحناهای این الصاق را با الصاقهای فوق، بدست آوردیم.

## زیرنویس

۱ـ برای بدست آوردن اطلاعاتی در مورد ساختار $\pi^*(TM)$ مراجع [P] و [Bcs] را ببینید.

۲ـ برای مطالعه مقدمات لازم در مورد مفهوم منیفلدها به مرجع [ب] رجوع شود.

## مراجع


[۱] اعظم آسنجرانی، " فضاهای فینسلری مسطح تصویری و فضاهای فینسلری که تانسور انحنای افقی‌شان فقط به x بستگی دارد". پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه امیرکبیر، اردیبهشت ۱۳۸۱.

[۲] بهروز بیدآباد، "هندسهٔ منیفلد (۱)" انتشارات امیرکبیر، چاپ دوم ۱۳۸۱.
[3] G.S.Asanov, Finsler geometry, Relativity and Gauge Theories (1990).
[4] P.L.Antonelli, Application of Finsler Geemetry to Biology, Engineering and Physics, contemporay mathematics, vol 196, (1996).
[5] P.L.Antonelli, Mathematical Essays on Growth and the Emergence of Form, U. of Alberta press, Edmonton, Canada, (1985) PP. 330.
[6] P.L.Antonelli, R.S.Ingarden & M.Matsumoto , The Theory of Sprays and Finsler Spaces with application in physics and biology, kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Boston, London (1993).
[7] P.L.Antonelli, P.W.Sammarco, A model of allelochemical interactions between soft and scleractinian corals on the Great Barriev Reef.J. Biol.Syst. (1993).
[8] V.Balan, Tensor, N.S.52.199 (1993).
[9] D.Bao, S.S.Chern, On a notable connection in Finsler geometry, Houston.J.Math. (1993), 135-180.
[10] L.Berwald, Untersuchung der krummung allgemeiner metrischer Raume auf Grund des in ihnen herrschenden parallelismus, Math.2.25.(1926) 40-13.
[11] D.Bao, S.S.Chern and Z.Shen, An Introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag (2000).
[12] Roger.W Brockett, Finite dimensional Linear systems, Series in decision and control 1970.
[13] L.Bushnell, D.Tilbury and S.S.Satry, Extended Goursat normal forms with applications on to nonholonomic motion planning, Proceedings of IEEE conference on Decision and control (1993) 3447-3452.
[14] S.S.Chern, On the Euclidean connections in a Finsler Space. Proc. National Acad. Soc. 29 (1943) 33-37.
[15] M.Fujinaka, On Finsler Spaces and dynamics with special reference to equations of Hunting, proc, Japan Nat.cong. Applied Math (1953) 433-436.
[16] R.B.Gardner, Steering three-input chained form nonholonomic systems using sinusoids: The fire truck example, The international J.of robotics research. 14 (1995). No 4. 366-381.
[17] R.B. Gardner, The method of equivalence and its applications, SIAM (1989).
[18] R.B. Gardner, and W.F.Shadwick, The GS algorithm for exact linearization to Brunvosky normal form, IEEE. Transactions on Automatic control (1992) 224-230.
[19] R.B. Gardner, and G.R.Wilkens, Classical geometries arising in f.b equivalence, proceedings of the 32 nd. Conference on control (1993) 3431-3440.
[20] A.Isidori, Nonlinear control system, communications & control engineerings, (1989).
[21] G.Kron, Non-Riemannian dynamics of rotating electrical machinery J.M.Ph. 13. (1934) 103-194.
[22] G.Kron, Tensor Analysis for Electrical Engineering, J.Wiley & Sons. I. (1942).
[23] G. Kron, A physical interpretation of the Riemann-christoffel curvature tensor, Tensor 4. (1955) 150-172.
[24] K.Kondo, On the dynamics of the aeroplane and non-Riemannian geometry, parts I & II, Jour. Japan. Soc (1954) 161-166.
[25] K.Kondo, On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding, proc, 2nd , Japan. Nat. cong. Appl. Mech. Tokyo (1952).
[26] R.Miron, General Randers Spaces, Lagrange and Finsler geometry, P.L.Antonelli, R.Miron, kluwer Academic publishers (1996) 123-140.
[27] R.Miron, D. Hrimiuc, H. Shimada, S.V. Sabau, The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces, kluwer Academic publishers (2001).
[28] R.M.Murray, Z.Li and S.S.Satry, A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton, FL. (1994).
[29] R.M.Murray, S.S.Satry , Steering nonholonomic system in chained forms, proceedings of the IEEE, (1991) 1121-1126.
[30] R.M.Murray, Applications and extensions of Goursat form to control of non-Linear system, proceedings of the IEEE, (1993) 3425-3430.
[31] W.Poor, The structure of Differential Geometry (1981).
[32] I.W.Roxburgh, Gen, Rel. Grav (1991).
[33] Z.Shen, On a connection in Finsler geometry, Houston.J. of Math. 20 (1994) 591-602.
[34] C.Shibata, H.Shimada, M.Azuma and H.Yasuda, On Finsler Spaces with Randers'metric, Tensor, N.S. 31 (1977) 219-226.
[35] R.K.Tavakol and N.Vanden Bergh (1986) Gen, Rel, Grav. 18, 849.