برنامه بهینه زمانبندی یک ماشین تولید انباشته‌ای با معیار حداقل سازی تعداد کارهای دارای دیر کرد

دکتر فریبرز جولای
استادیار

دکتر مسعود ربانی
استادیار

گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

چکیده

این مقاله مساله حداقل‌سازی معیارهای مرتبط با تعداد کارهای دیر کرددار بر روی یک ماشین تولید انباشته‌ای را مورد بررسی قرار میدهد. یک ماشین تولید انباشته‌ای قادر به اجرای همزمان عملیات بر روی بیش از یک کار میباشد. برای حالات خاص شامل ثابت بودن ترتیب اجرای کارها، یکسان بودن موعد تحویل کارها و یکسان بودن زمان اجرای کارها، روشهای حل بهینه با تابع پیچیدگی زمانی پلی‌نومیال ارایه شده است. در انتها نتایج و زمینه‌های ادامه تحقیقات بحث شده‌اند.

کلمات کلیدی

توالی عملیات، ماشینهای تولید انباشته‌ای، حداقل کردن تعداد کارهای دارای دیر کرد، برنامه‌ریزی پویا.

Optimal Scheduling on a Batch Processing Machine with Minimum Number of Tardy Jobs Criteria

F. Jolai
Assistant Professor

M. Rabani
Assistant Professor

Department of Industrial Engineering,
Faculty of Engineering, Tehran University

Abstract

In this paper we consider the problems related to minimizing number of tardy jobs criteria on a single batch processing machine. A batch processor can process several jobs simultaneously as a batch. We developed a polynomial algorithm to find optimal solution for three special cases: fixed sequence of jobs, identical due dates and identical processing times of jobs. Finally, the results and further research fields are discussed.

Key words

Scheduling, Batch processing machine, minimizing mean number of tardy jobs, Dynamic programming.

مقدمه

یکی از مسایل مطرح در کارگاه های صنعتی تعیین ترتیب بهینه گذر قطعات (انجام عملیات وکارها) از ماشینها (ایستگاههای کاری) میباشد. معیار و اهداف مختلفی را میتوان در تعیین یک ترتیب ملاک قرار داد. از جمله حداقل کردن زمان ختم کل کارها، متوسط زمان ختم کارها و یا جریمه ناشی از دیر کرد کارها. در اغلب مقالات و کتب زمانبندی کارها فرض میشود وقتی عملیات یک قطعه بر روی یک ماشین به پایان میرسد، قطعه مجاز است مستقیم به ایستگاه کاری بعدی برود. ولیکن در دنیای واقعی موقعیتهای زیادی وجود دارند که قطعات باید قبل از شروع عملیات جدید گروهبندی شوند. سه دلیل عمده برای تولید قطعات بصورت انباشته‌ای وجود دارد:

ـ ضروری بودن آماده سازی، تنظیم یا تعویض ابزارآلات دستگاه تولیدی پیش از آغاز بعضی عملیات.

ـ وجود محدودیتهای فنی.

ـ قابلیت ماشین تولیدی در انجام همزمان یک عملیات بر روی بیش از یک قطعه (ماشین تولید انباشته‌ای).

موضوع پژوهش حاضر به برنامه‌ریزی تولید (تعیین توالی عملیات یا زمانبندی) یک ماشین تولید انباشته‌ای اختصاص دارد. نمونه شناخته شده‌ای از ماشینهای تولید انباشته‌ای کوره‌های عملیات حرارتی میباشند. همچنین حوزچه‌های عملیات شیمیایی، ماشین های CNC، قیچیهای صنعتی و نیز ایستگاه نهایی خط تولید مدارهای چاپی با ماشینهای تولید انباشته‌ای مدلسازی میشوند[۵].

مسایل زمانبندی همراه با ماشینهای تولید انباشته‌ای به انواع مختلفی تقسیم میشوند[۷]. در این مسایل علاوه بر تعیین تعداد بهینه انباشته‌های تولیدی، ترکیب کارهای داخل هر انباشته و ترتیب بهینه اجرای انباشته‌های حاصل به گونه‌ای یافت میشوند که معیارهای کارایی مورد نظر بهینه شوند. فرضیات اصلی مساله مورد نظر این مقاله عبارتند از:

۱ـ n کار در لحظه صفر در کارگاه حاضر میباشند و زمان مورد نیاز برای اجرای عملیات کار i ام (t_i)، موعد تحویل کارها (d_i) و نیز وزن و اهمیت هر کار (w_i) به ازاء $i=1,2,\ldots,n$ قطعی و معلوم است.

۲ـ عملیات تولیدی توسط یک ماشین تولید انباشته‌ای صورت میگیرد که قادر است عملیات حداکثر B کار را هم زمان انجام دهد. B نمایتگر ظرفیت ماشین است.

۳ـ به محض آنکه عملیات یک کار آغاز گردید امکان قطع آن تا پایان عملیات وجود ندارد. اگر C_i زمان ختم کار i ام و CB_j زمان ختم انباشته j ام تعریف شود، چنانچه کار i ام در انباشته j ام قرار گیرد خواهیم داشت: $C_i=CB_j$

۴ـ زمان پروسهٔ یک انباشته بر روی یک ماشین برابر بزرگترین زمان اجرای کارهایی است که در آن واقع شده است. اگر P_j زمان اجرای انباشته j ام تعریف شود، خواهیم داشت:

$$P_j=\max\{t_i\},\ i\in \text{batch } j$$

معیار کارایی مورد نظر حداقل کردن تعداد کارهای دارای دیرکرد (ΣU_i) یا ($\Sigma w_i U_i$) می باشد که در آن:

$$U_i=1 \text{ if } C_i > d_i$$
$$U_i=0 \text{ if } C_i <= d_i$$

انتخاب معیار فوق به دلیل اهمیت آن در سیستمهای تولیدی مدرن همانند JIT است. با درنظر گرفتن این معیار، برنامه‌هایی که منافع مشتریان را مد نظر قرار میدهند بدست خواهد آمد. بنابراین از جنبه کاربردی حائز اهمیت است. علاوه بر این از جنبه تئوری نیز تا به حال مورد بررسی کامل قرار نگرفته است. ساختار ادامه‌ی مقاله به شرح زیر میباشد.

در بخش اول مجموعه نتایج موجود مرتبط با مساله ارایه گردیده است. نتایج این پژوهش در زمینه‌ی دستیابی به حل بهینه در بعضی حالات خاص به همراه الگوریتم‌های آنها در بخش دوم ارایه شده‌اند. این الگوریتم‌ها اغلب بر اساس برنامه ریزی پویا میباشند. در انتها زمینه‌های جدیدی برای تحقیقات آتی ارایه شده است.

مرور ادبیات

مراجع [۸] و [۹] حاوی مرور آخرین تحقیقات انجام گرفته مرتبط با ماشینهای تولید انباشته‌ای میباشند. مسئله‌ای با

فرضیات تشریح شده در این مقاله از نوع مسائل NP-hard بوده و امیدی در یافتن یک حل بهینه در زمانی معقول برای آن وجود ندارد[۲]. تحقیقاتی که در این زمینه صورت گرفته به چند حالت خاص و قابل حل به صورت بهینه خلاصه میشوند.

هنگامیکه ظرفیت ماشین یک کار باشد، مسئله کلاسیک حداقل سازی ΣU_i بر روی یک ماشین تولید سری را خواهیم داشت. این مسئله توسط الگوریتمی موسوم به مور(Moore) قابل حل میباشد[۱]. در این الگوریتم کارهایی که سر وقت تمام میشوند به ترتیب صعودی موعدهای تحویل(Earliest Due Date, EDD) مرتب شده و ترتیب کارهای دیرکرددار اهمیت ندارد. با در نظر گرفتن معیار $\Sigma w_i u_i$ یک مساله NP-hard خواهیم داشت[۳].

اگر ظرفیت ماشین از تعداد کارهای موجود بیشتر باشد با مسئله ظرفیت نا محدود روبرو خواهیم بود. مرجع [۲] الگوریتمی با درجه پیچیدگی $O(n^3)$ برای حل این حالت خاص ارائه داده و ثابت میکند حل بهینه‌ای وجود دارد که در آن کارها به ترتیب SPT (Shortest Processing Time) برنامه‌ریزی میشوند. در ترتیب SPT کارها به ترتیب صعودی زمانهای اجرا متوالیاً در انباشته‌های مختلف برنامه‌ریزی میشوند. همچنین ثابت میشود با معیار $\Sigma w_i u_i$ در حالت ظرفیت نامحدود یک مسئله سخت خواهیم داشت.

سومین حالت خاص از مسئله اصلی یک شرط هماهنگی بین زمان عملیات کارها و موعد تحویل آنها فرض میکند. این فرض به مطابقت زمانها با موعدهای تحویل معروف است و به معنی آن است که کارهای دارای زمان اجرای طولانی‌تر موعد تحویل بزرگتری دارند. مقاله [۶] یک الگوریتم برنامه ریزی پویا برای حل این مسئله ارائه میدهد.

در بخش بعدی که آوردهٔ اصلی این مقاله را تشکیل میدهد، حالات خاص دیگری مطرح و پس از بررسی پیچیدگی آنها روشهای حل بهینهٔ آنها توسعه داده شده است.

توسعه الگوریتمهای حل بهینه در حالات خاص

در این بخش حالاتی از مسئله اصلی که تا به حال مورد توجه محققین قرار نگرفته و حل بهینهٔ آنها در زمان پلی‌نومیال قابل حصول است توسعه داده میشوند.

۱ـ ترتیب ثابت اجرای کارها

فرض کنید به دلایل مختلفی از قبیل درخواست مشتری، محدودیت فنی و یا اولویت‌بندی مدیر کارگاه، ترتیب اجرایی کارهای موجود از قبل تعیین و ثابت شده باشد. مسئله‌ای که باقی میماند دسته‌بندی این کارها در انباشته‌های مختلف است به نحوی که برنامه‌هایی با حداقل تعداد کارهای دارای دیرکرد داشته باشیم.

قبل از تشریح الگوریتم حل مساله، به کاربرد این حالت خاص در طراحی روشهای بهبود دهنده از قبیل تعویض جفتی مجاور، الگوریتم ژنتیک و غیره اشاره‌ای خواهیم داشت. در این روشها، در هر تکرار با جابجایی تصادفی (یا با یک برنامه قبلی) کارها در یک ترتیب موجود از آنها، ترتیب جدیدی ساخته میگردد. برای ارزیابی ترتیب جدید و تصمیم‌گیری در نگهداری آن برای شروع تکرار بعدی، لازم است مقدار تابع هدف محاسبه شود. با استفاده از الگوریتم توسعه داده شده میتوان این مرحله از روشهای بهبود دهنده را برای معیار حداقل کردن تعداد کارهای دارای دیرکرد اجرا کرد.

الگوریتم حل بر اساس برنامه‌ریزی پویا

با توجه به اینکه حداکثر n کار دارای دیرکرد میباشند، متغیر حالت، u ، تعداد کارهای دارای دیرکرد تعریف می‌شود. همچنین: $f_j(u)$= حداقل زمان ختم برای کارهای ۱ الی j در صورتیکه u کار دیرکرد داشته باشند.

برای رسیدن به حالت $j+1$ از حالت j، B طریق ممکن وجود دارد. طریق اول ساختن یک انباشته جدید با کار j و اضافه کردن آن به حل جزیی قبلی است. B-۱ طریق ممکن دیگر مطابقت با اضافه کردن j به آخرین انباشته موجود در حل جزیی دارد: کار j به همراه کار j-1 در انباشته آخر باشند، کار j به همراه کارهای j-1 و j-2 در انباشته آخر باشند و الی آخر. در هر کدام از B حالت فوق، با توجه به موعد تحویل کارهایی که همراه با j در انباشته هستند و زمان ختم این انباشته، کارهای دارای دیرکرد معلوم خواهند شد.

قدم ۱ (شروع)

$$f_j(u)=\infty \quad \forall\, u>j \ \text{ and } \ j=1,2,\ldots,n$$
$$f_0(0)=0$$

قدم ۲ (تابع برگشت)

$$f_j(u)=\min_{\substack{1\le g\le \min(j,B)\\ 1\le k\le \min(g,u)}}\begin{cases} f_{j\text{-}g}(u-k)+p_g & \textit{if } \text{there exists subset of jobs } S^k \\ \infty & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$\textit{where}\; S^k=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset S=\{j,j-1,\ldots,j-g+1\}\,\text{and}\;\forall\, i\in S^k \;\big|\; f_{j\text{-}g}(u-k)+p_g>d_i$$

P_g نماینگر زمان اجرای انباشتهٔ آخر در یک حل جزیی(شامل کار j ام) میباشد. اندیس g طروق مختلف رسیدن به حالـــت$f_j(u)$ را شمارش میکند. اگر در حل جزی جاری کمتر از B کار داشته باشیم، حداکثر مقدار g برابر j خواهد شد. در غیر این صورت همانطور که قبلا ذکر شد، B طریق وجود دارد.

فرض نمایید در مرحله ارزیابی رسیدن به حالت $f_j(u)$ از یک حل جزیی با j-g کار میباشیم. حل جزیی با j-g کار میتواند دارای حداکثر u کار دیرکرددار (به معنی آن است که کارهای j-g+1,...,j-1,j سروقت برنامه‌ریزی شوند) و حداقل u-g کار با دیرکرد باشد (به معنی آن است که کارهای j-g+1,...,j-1,j همگی با تاخیر روبرو شوند). اندیس k کارهای دارای دیرکرد بین این دو مقدار را شمارش میکند و مجموعه S^k نماینگر این دسته از کارهاست. واضح است که k هر مقداری به خود بگیرد باید مجموعه S^k متناظر با آن هم وجود داشته باشد تا معنی پیدا کند. در صورت وجود چنین مجموعه‌ای، مقدار $f_j(u)$ برابر مقدار زمان ختم حل جزیی قبلی بعلاوه زمان ختم انباشتهٔ شامل کار j ام خواهد شد. در غیر این صورت یک حالت ناممکن خواهیم داشت و به $f_j(u)$ یک مقدار بزرگ تخصیص میدهیم.

قدم ۳ (مقدار نهایی)

جواب بهینه مسئله برابر است با $\min_u\{f_n(u)<\infty\}$ و برنامهٔ بهینه با حرکت رو به عقب و دنبال کردن مقادیر بهینه بدست می‌آید. به عبارت دیگر در مرحلهٔ آخر، از بین حل‌های کامل بدست آمده، آنکه دارای کمترین تعداد کارهای دیرکرددار میباشد را انتخاب میکنیم.

تابع پیچیدگی زمانی الگوریتم

مقادیر j از ۱ تا n تغییر میکنند. u حداکثر برابر j کار است. بنابراین j= 1,2,...,n و u=0,1,2,...,j و حداکثر n^2 مقدار برای f محاسبه میشود. محاسبه هر مقداری از f حداکثرB^2 عملیات لازم دارد. زیرا g که شمارشگر تعداد کارهای آخرین انباشته است حداکثر B مقدار خواهد گرفت و k که تعداد کارهای دیرکرددار آخرین انباشته را نشان میدهد نمیتواند از g بیشتر شود. پس در کل تابع پیچیدگی محاسباتی الگوریتم فوق از درجه‌ی $O(n^2B^2)$ میباشد.

۲ـ حالت موعد تحویل یکسان

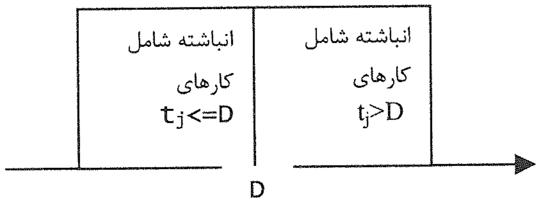
مسئله حداقل کردن $\Sigma\, U_i$ با درنظرگرفتن یک موعد تحویل یکسان برای تمام کارها، یک مساله پلی‌نومیال میباشد (زیرا مطابقت بین زمانها و موعدهای تحویل وجود دارد). در این بخش معیار وزنی تعداد کارهای دیرکرددار را مورد نظر قرار میدهیم.

معیار Σw_iU_i با موعد تحویل مشترک در حالت B=1 مسئله‌ای NP-hard است[۳]. بنابراین در حالت کلی (n>B) نیز مساله NP-hard خواهد بود. تنها حالتی که پیچیدگی آن بررسی نشده است معیار Σw_iU_i با فرض ظرفیت نامحدود (B>n) است. در ادامه نشان میدهیم که این حالت به راحتی قابل حل است و معیار کاملتری به جای آن پیشنهاد میگردد.

قضیه۱: مسئله حداقل کردن Σw_iu_i چنانچه کارها دارای موعد تحویل یکسان D بوده و ظرفیت ماشین نامحدود باشد به طریق زیرحل میشود:

قدم۱: کارهایی که دارای t_j<=D می باشند را در یک انباشته قرار دهید و قبل از D آغاز کنید.

قدم۲: کارهایی که دارای $t_j>D$ میباشند را نیز در یک انباشته قرار داده و بعد از زمان D عملیات آنها را آغاز کنید.



اثبات: با توجه به نامحدود بودن ظرفیت ماشین این امکان وجود دارد به تعداد دلخواه کارها را داخل یک انباشته قرار دهیم. بنابراین تمام کارهایی که دارای زمان اجرای کوچکتر از D می باشند و میتوانند سر وقت انجام شوند را در یک انباشته قرار خواهیم داد.

یک مسئله جالب در این رابطه تعیین همزمان موعد تحویل یکسان و برنامه بهینه برای کارها میباشد. واضح است که هر چقدر موعد تحویل بزرگتر باشد کارهای دیرکرددار کمتر خواهند شد. طولانی‌تر کردن موعد تحویل همراه با دادن امتیازاتی به مشتری است، بنابراین منطقی است برای افزایش D سقفی داشته باشیم. فرم کلی تابع هدف به شکل زیر خواهد بود که در آن α هزینه یک واحد افزایش در D است.

$$z=\min(\sum_{i=1}^{n} w_i u_i + \alpha D)$$

نکته: اگر $\sum_{i=1}^{n} w_i < \alpha$ باشد مقدار بهینه D برابر صفر بوده و تمام کارها دیرکرد خواهند داشت.

مقادیر ممکن برای D بین صفر و $\max_{1\le i\le n} t_i$ خواهد بود. با توجه به اینکه زمان اجرای کارها عدد صحیح فرض شده‌اند، حداکثر n مقدار برای D وجود دارد. با توجه به قضیه‌ی ۱، به ازاء یک D داده شده میتوان برنامهٔ بهینه و مقدار حداقل $\Sigma w_i U_i$ را پیدا کرد. در نتیجه حداقل Z با ارزیابی آن در n تکرار بدست میآید.

۳ـ کارها دارای زمان اجرای یکسان باشند

در این حالت فرض میکنیم کارها متعلق به یک خانوادهٔ کاری بوده (نیازمندی زمانی آنها به ماشین تولید انباشته‌ای یکسان است) ولیکن دارای موعدهای تحویل متفاوت میباشند.

$t_i=T \quad \text{for } i=1,2,\dots n$

با در نظر گرفتن معیار ΣU_i، حالت خاص مطابقت موعد تحویل با زمانهای اجرای کارها را خواهیم داشت که با الگوریتم [۶] قابل حل است. بنابراین معیار $\Sigma w_i U_i$ را مورد بررسی قرار میدهیم. ابتدا یکی از خواص حل بهینه اثبات میشود. سپس مدل برنامه ریزی ریاضی مساله ارایه و نشان داده خواهد شد که در زمانی پلی‌نومیال قابل حل است.

قضیه۲: در مسئله حداقل کردن $\Sigma w_i U_i$ برای یک ماشین تولید انباشته‌ای با ظرفیت محدود B، برنامهٔ بهینه‌ای وجود دارد که در آن کارهای سر وقت در انباشته‌های پر برنامه‌ریزی شده‌اند. مگر آخرین انباشته که ممکن است به اندازه کافی کار برای آن باقی نمانده باشد تا پر شود.

اثبات: با توجه به مساوی بودن زمانهای اجرای کارها همواره میتوان جاهای خالی در انباشته‌ها را پر کرد بدون آنکه زمان ختم انباشته(دیگر کارها) افزایش یابد.

روش برنامه‌ریزی ریاضی

با توجه به قضیه ۲، حداکثر $\frac{n}{B}+1$ انباشته خواهیم داشت. زمانهای اجرای انباشته‌ها (تعداد انباشته‌ها را r فرض میکنیم) یکسان و برابر T میباشد. زمان ختم انباشته i ام را با CB_i نشان میدهیم. برای یافتن ترتیب بهینهٔ اجرای n کار، با مسئله تخصیص n کار به این r انباشته هر کدام با ظرفیت B روبرو هستیم. هزینهٔ تخصیص کار j ام به انباشته i ام (به شرط آنکه

محدودیت ظرفیت رعایت شود) برابر است با C_{ij}.

$$C_{ij}=\begin{cases}0 & if\ \ CB_i \le d_j\\ w_j & if\ \ CB_i > d_j\end{cases}$$

متغیر زیر را تعریف میکنیم:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر کار j به انباشته i ام تخصیص یابد}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در مدل نهایی خواهیم داشت:

$$z=\min\sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij}\ x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} w_{ij}x_{ij}$$

$$st:\ \sum_{i=1}^{r} x_{ij}=1 \quad \text{for all } j=1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\le B \quad \text{for all } j=1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij}=0 \text{ or } 1$$

محدودیتهای نوع اول تضمین میکنند که هیچکاری به بیش از یک انباشته تخصیص نخواهد یافت. محدودیتهای دوم نیز تضمین‌کنندهٔ رعایت شدن محدودیت ظرفیت انباشته‌ها میباشند.

اگر کار j ام به انباشته‌ای تخصیص یابد که باعث دیرکرد آن گردد، به اندازهٔ w_j به مقدار تابع هدف افزوده میشود. هدف حداقل کردن مجموع وزن کارهای دارای دیرکرد است. در تابع هدف پارامتر α_i با تعریف $\alpha_{ij}=\begin{cases}1 \ \text{if}\ d_j < CB_i\\ 0 \quad \text{otherwise}\end{cases}$ وارد شده است. با توجه به اینکه $CB_1=T,\ CB_2=2T,\ldots,CB_r=(\frac{n}{B}+1)T$ میباشد، α_{ij} ها از قبل قابل محاسبه هستند. بر این اساس متناظر با هر w_j که داده اولیهٔ مساله است یک w_{ij} معرفی میگردد.

با دقت به روابط حاصل شده، به شباهت بین مساله تعریف شده در این حالت خاص با یکی از مسایل شناخته شده در بهینه‌سازی پی خواهیم برد. در واقع با r مسئله کوله پشتی(knapsack) خاص روبرو هستیم که در آن اشیاء دارای اندازه‌های یکسان و ارزشهای متفاوت w_j میباشند و مقادیر ارزش نیز به نوع کوله بستگی دارند. کوله‌ها باید به نحوی پرشوند که جمع ارزشها حداقل (حداکثر) گردد. مساله فوق با مساله Weighted Matching Bipartie معادل است و با الگوریتمی از درجه $O(n^3)$ حل میگردد [٤].

نتیجه گیری

مسئله اصلی مورد بررسی در این مقاله عبارت است از تعیین ترتیب اجرای تعداد مشخصی کار بر روی یک ماشین تولید انباشته‌ای، با هدف حداقل کردن کارهایی که دارای دیرکرد میشوند. الگوریتم‌های حل بهینه برای حالات خاص جدیدی از مسئلهٔ اصلی که یک مساله NP-hard است ارایه شده‌اند. خلاصه نتایج بدست آمده در حالات خاص، به همراه نتایج دیگر محققان، در جدول ۱ آورده شده است.

موضوعات پیشنهادی جهت ادامهٔ تحقیقات در این زمینه عبارتند از:

۱ـ توسعهٔ روش شاخه و حد و طراحی روشهای بهبود دهنده همانند الگوریتم ژنتیک برای حالت اصلی مسئله.

۲ـ تعمیم نتایج حاصل شده به سیستم ماشینهای موازی.

۳ـ در نظر گرفتن معیارهای مهم دیگری که موعد تحویل را در نظر میگیرند.

۴ـ توسعهٔ مدلهای چند معیاره برای یک ماشین تولید انباشته‌ای.

جدول (۱) بررسی پیچیدگی حل مساله در حالات خاص آن به همراه ذکر آوردهٔ مقاله.

حالت خاص از مساله اصلی	معیار ΣU_i		معیار $\Sigma w_i U_i$	
	نتایج	مرجع	نتایج	مرجع
ترتیب ثابت اجرای کارها	P= پلی نومیال	این مقاله	Open problem	-
زمان های یکسان اجرای کارها	P	۶	P	این مقاله
Dمتغیر تصمیم و موعد تحویل یکسان و $n \le B$	P	این مقاله	P	این مقاله
مطابقت موعد تحویل با زمانها	P	۶	NP-hard	۶
ظرفیت نا محدود ماشین$n \le B$	P	۳	NP-hard	۳

مراجع

[1] Baker K.R., (1974), "Introduction to Sequencing and Scheduling", John Wiley & Sons, New York.

[2] Brucker P., Gladky A., Hoogeveen H., Kovalyov M.Y., Potts C., Tautenhahn T. and Van de velde S., (1998), "Scheduling a Batching Machine", Journal of Scheduling, 1, pp. 31-55.

[3] Karp R.M., (1972), "Reducibility among Combinatorial Problems in Complexity of Computation", R. E. Miller and J.W. Thatcher (Eds.), Plenum press, New York, pp. 85-103.

[4] Lawler E.L., (1976), "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids", Holt, Rinehart & Winston, New York.

[5] Lee C.Y., Uzsoy R. and Martin-Vega L.A., (1992), "Efficient Algorithms for Scheduling Semiconductor Burn-in Operations", Operations Research, 40, pp. 764-775.

[6] Li C.L. and Lee C.Y., (1997), "Scheduling with Agreeable Release Times and Due Dates on a Batch Processing Machine", European Journal of Operational Research, 96, pp. 564-569.

[7] Potts C.N. and Kovalyov M.Y., (2000), "Scheduling with batching: a review", European Journal of Operations Research, 120, pp. 228-249.

[8] Wang C-S. and Uzsoy R., (2002), "A genetic algorithm to minimize maximum lateness on a batch processing machine", Computers and Operations Research, 29, pp. 1621-1640.

[9] Zhaohui L., Jinjiang Y., Cheng T.C.E., (2003), "On scheduling an unbounded batch machine", Operations Research Letters, 31, pp. 42-48.