تحلیل پایداری سیستم های غیر خطی و بررسی نوسان در آنها با استفاده از سیستم کمکی طراحی شده

حسن فتح آبادی بزچلوئی
دانشجوی دکترا

سیدکمال الدین نیکروش
استاد

دانشکده برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله، روشی نوین برای تحلیل پایداری و بررسی نوسان در سیستم‌های دینامیکی غیر خطی ارائه خواهد شد. روش مبتنی بر استفاده از یک سیستم کمکی متناظر با سیستم اصلی جهت تحلیل پایداری آن است. منحنی‌های هم پتانسیل نقش اصلی را در این تحلیل بازی می‌کنند. روش ارائه شده شرایط لازم و کافی پایداری، ناپایداری و یا وجود یک سیکل حدی پایدار مجانبی را در یک سیستم مفروض می‌دهد. این روش وجود سیکل حدی و حتی تخمینی از محل قرارگیری آنرا ارائه می‌کند که کاربردهای زیادی در مسائلی نظیر طراحی نوسان سازها، دارد.

کلمات کلیدی

پایداری، نا پایداری، سیکل حدی [1]، منحنی‌های هم پتانسیل [2].

On the Stability Analysis and Limit Cycles in Nonlinear Systems Using Model System

H. Fathabadi
Ph. D. Student

S. K. Nikravesh
Professor

Department of Electrical Engineering,
Amirkabir University of Technology

Abstract

In this paper, a new method for stability analysis and control of limit cycles in nonlinear systems is proposed. The region of an asymptotically stable limit cycle is estimated, as an invariant set which is as small as possible. The method is based on equipotential curves. Sufficient and necessary conditions for the existence of an asymptotically stable limit cycle are obtained. The solution of this theoretical problem finds many applications. Also this method can be applied for local or global stabilization of nonlinear systems.

مقدمه

تحلیل پایداری یکی از مهمترین مسائل مرتبط با سیستم‌ها می‌باشد. طراحی کنترل‌کننده‌ها و بسیاری از مسائل دیگر که در سیستم‌های کنترل صورت می‌گیرد، در صورتی نتایج مثبت در بر خواهد داشت که دید واقع بینانه‌ای از پایداری سیستم داشته باشیم [۲]. روش ارائه شده در این مقاله جهت تحلیل پایداری سیستم‌ها، مبتنی بر استفاده از یک سیستم کمکی مناسب برای سیستم مورد نظر می‌باشد. جوابهای این سیستم کمکی همان منحنی‌های هم پتانسیل می‌باشند [۹] . در این روش از مفاهیم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نوع پفافی [3] استفاده می‌شود. سیکل حدی یکی از ویژگیهای مهم سیستم‌های غیرخطی است که در سیستم‌های خطی دیده نمی‌شود [۱] ، [۴] ، [۵] . در طی سالهای گذشته، توجه زیادی روی مسئله وجود سیکل حدی در یک سیستم دینامیکی غیرخطی صرف شده است. این امر به علت کاربرد وسیع این موضوع میباشد. یکی از این کاربردها در روباتیک است [۳]. بندیکسون شرایط کافی برای عدم وجود سیکل حدی را در یک سیستم مرتبه دوم خود گردان ارائه کرد [۱] ، [۴]. در این مقاله شرایط لازم و کافی جهت وجود یک سیکل حدی نیز ارائه خواهد شد.

۱ ـ روش‌ها و تلاش‌های انجام شده جهت تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی تاکنون

در حال حاضر مهمترین روش تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی روش لیاپونف بوده است [۶] . لذا تلاش‌های زیادی جهت یافتن تابع لیاپونف انجام شده است [۶] ، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۱]، [۲۲]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۶]، [۲۷]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۱] .

اگر چه روش لیاپونف روشی بسیار قدرتمند برای تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است، لیکن در بررسی روشهای مختلف ارائه شده برای تولید تابع لیاپونف این نتیجه حاصل می‌شود که تولید این تابع در حالت کلی کار بسیار مشکلی می‌باشد. در روشی که در زیر ارائه می‌گردد، تاحد امکان این مشکل بر طرف شده است. در تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با استفاده از این روش گرچه نیازی به تابع لیاپونف نمی‌باشد، لیکن در عمل می‌توان شاید مناسبترین تابع لیاپونف را برای یک سیستم مفروض بدست آورد.

۱ـ منحنی‌ها و سطوح هم پتانسیل

تعریف (۱): دسته منحنی‌های $u(x_1,x_2)=c$ را منحنی‌های هم پتانسیل می‌نامیم، زیرا آنها جوابهای معادله دیفرانسیل پفافی زیر هستند:

$$\sum_{i=1}^{2} F_i.dx_i = 0 \tag{۱-۲}$$

بطور مشابه دسته سطوح $u(x_1,x_2,x_3)=c$ را سطوح هم پتانسیل می‌نامیم، زیرا آنها جوابهای معادله دیفرانسیل پفافی زیر هستند:

$$\sum_{i=1}^{3} F_i.dx_i = 0 \tag{۲-۲}$$

معادلات (۱-۲) و (۲-۲)حالت خاصی از معادله دیفرانسیل پفافی مرتبه n ام زیر هستند:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i.dx_i = \vec{F}.d\vec{r} = 0 \tag{۳-۲}$$

۲ـ ارتباط بین منحنی‌های هم پتانسیل و پایداری سیستم‌ها

یک سیستم مرتبه دوم خودگردان را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)\end{cases} \tag{۳-۱}$$

که x_1 و x_2 متغیرهای حالت و f_1 و f_2 توابع خطی و یا غیرخطی از متغیرهای حالت هستند.

ازمنحنی $u_1(x_1, x_2) = c_1$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \tag{۳-۲}$$

از رابطه (۲-۳) می‌توان معادلات حالت زیر را برای دینامیک حرکت روی منحنی‌های هم پتانسیل بدست آورد:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \dfrac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}\\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}\end{cases} \tag{۳-۳}$$

از (۳-۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$\vec{V}_{u_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \vec{u}_{x_1} + (-\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}) \vec{u}_{x_2} \tag{۳-۴}$$

که $\vec{u}_{x_1}$ بردار واحد در جهت محور x_1 ، $\vec{u}_{x_2}$ بردار واحد در جهت محور x_2 و نیز $\vec{V}_{u_1}$ بردار سرعت مربوط به $u_1(x_1, x_2) = c_1$ است.

برای بردار حرکت سیستم (۱-۳) داریم:

$$\dot{\vec{X}} = f_1(x_1, x_2)\vec{u}_{x_1} + f_2(x_1, x_2)\vec{u}_{x_2} \tag{۳-۵}$$

قضیه (۱-۳): سیستم (۱-۳) حول نقطه تعادل خود پایدار مجانبی است، اگر و تنها اگر مجموعه منحنی‌های بسته‌ای مانند $u_1(x_1, x_2) = c_1$ که راستگرد هستند، در همسایگی نقطه تعادل سیستم، که به مبدأ انتقال داده شده است، وجود داشته باشند، بطوریکه داشته باشیم [۹]:

$$\overline{\vec{V}_{u_1} \times \dot{\vec{X}}} \, \langle \, 0 \tag{۳-۶}$$

اثبات: هر گاه سیستم (۱-۳) پایدار مجانبی باشد، آنگاه کلیه تراژکتوریهایی [1] که در یک همسایگی مانند Ω از نقطه تعادل سیستم (۱-۳) شروع می‌شوند، با گذشت زمان ($t \to \infty$) به نقطه تعادل سیستم (مبدأ) میل می‌کنند. بزرگترین همسایگی از این نوع، همان حوزه جذب [2] سیستم (۱-۳) است. در رابطه (۶-۳) ، $\dot{\vec{X}}$ بردار سرعت تراژکتوریهای سیستم (۱-۳) است. اینک اگر یک همسایگی کوچک از مبدأ را درنظر بگیریم، چون سیستم (۱-۳) پایدارمجانبی است، تراژکتوریها از مبدأ دور نخواهند شد. بنابراین منحنی‌های هم پتانسیل بسته خواهند بود (زیرا در غیر این صورت تراژکتوریها در نواحی منحنی باز، از مبدأ دور

خواهند شد). از طرف دیگر لازم است ضرب خارجی بردار سرعت منحنی‌های هم پتانسیل در بردار سرعت تراژکتوریها منفی باشد، زیرا این امر تضمین‌کننده اینست که جهت این تراژکتوریها بسمت درون این منحنی‌های بسته (نزدیک شدن به مبدأ) می‌باشد نه خارج این منحنی‌ها. بنابراین لازم بودن رابطه (۶-۳) ثابت شده است. این رابطه شرط کافی برای پایداری نیز هست. زیرا بسته بودن منحنی‌های هم پتانسیل بهمراه رابطه (۶-۳) تضمین‌کننده اینستکه تراژکتوریها به مبدأ میل کنند. بنابراین پایداری مجانبی، سیستم (۱-۳) نتیجه می‌شود.

نکته: هر گاه رابطه (۶-۳) را، با رابطه $\overline{\vec{V}_{u_1} \times \vec{X}} \leq 0$ (شبه منفی ـ بشرطی که همیشه برابر با صفر نباشد)، جایگزین کنیم، قضیه تنها پایداری سیستم را ارائه خواهد کرد.

قضیه (۲-۳): سیستم (۱-۳) حول نقطه تعادل خود ناپایدار است، اگر و تنها اگر مجموعه منحنی‌های بسته‌ای مانند $u_2(x_1, x_2) = c_1$ که راستگرد هستند، در همسایگی نقطه تعادل سیستم، که به مبدأ انتقال داده شده است، وجود داشته باشند، بطوریکه داشته باشیم:

$$\overline{\vec{V}_{u_2} \times \vec{X}} > 0 \tag{۳-۷}$$

اثبات: چون قضیه (۱-۳) شرط لازم و کافی را بیان می‌کند، قضیه (۲-۳) بوضوح اثبات می‌شود [۹].

۳ ـ ارتباط بین منحنی‌های هم پتانسیل و سیکل حدی در سیستم‌های غیرخطی

تعریف (۲): نقطه A در یک مجموعه مانند S نقطه مرزی نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر هر همسایگی آن هم شامل نقاط متعلق و هم شامل نقاط غیر متعلق به مجموعه S باشد. بعبارت دیگر A یک نقطه مرزی نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر:

الف ـ نقطه حدی [1] باشد ب ـ نقطه درونی نباشد [2].

تعریف (۳): منحنی C یک منحنی مرزی برای مجموعه S نامیده می‌شود اگر و تنها اگر کلیه نقاط آن از نوع مرزی باشند.

قضیه (۱-۴): اگر L یک سیکل حدی پایدارمجانبی برای سیستم غیر خطی از نوع (۱-۳) باشد، در این صورت دو منحنی بسته $u_1(x_1, x_2) = c_1$ و $u_2(x_1, x_2) = c_2$ که مبدأ را احاطه کرده‌اند، وجود دارند که شرایط زیر را برقرار می‌کنند:

$$\overline{\vec{V}_{u_2} \times \vec{X}} < 0 \text{ و } \overline{\vec{V}_{u_1} \times \vec{X}} > 0$$

هر گاه ناحیه بین دو منحنی تراز $u_1(x_1, x_2) = c_1$ و $u_2(x_1, x_2) = c_2$ را با Ω نمایش دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$L \subset \operatorname{int}\Omega$$

اثبات: چون سیکل حدی پایدار مجانبی است، داریم:

$$\forall R > 0 \ , \exists r > 0 \ \ d\{X(t_0), L\} < r \ \Rightarrow \ \operatorname{Max} \ d\{X(t), L\} < R$$

و همچنین

$$X(t) \to L \ \text{as} \ t \to \infty$$

در نتیجه یک مجموعه تغییر ناپذیر [1] مانند Ω وجود دارد. چون L یک سیکل حدی پایدار است، لذا این مجموعه فشرده است. از طرفی چون سیکل حدی از نوع پایدار مجانبی است، لذا این مجموعه شامل مبدأ نمی‌شود و آنرا احاطه کرده است. اینک دو منحنی بسته $u_1(x_1, x_2) = c_1$ و $u_2(x_1, x_2) = c_2$ را طوری در نظر می‌گیریم که منحنی‌های مرزی مجموعه Ω

باشند. بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که منحنی بسته $u_2(x_1,x_2)=c_2$ مجموعه نقاط مرزی بالا و منحنی بسته $u_1(x_1,x_2)=c_1$ مجموعه نقاط مرزی پائین مجموعه Ω را تشکیل می‌دهند. از آنجائیکه یک مجموعه تغییر ناپذیر است، لذا برای هر شرط اولیه خارج از Ω ($X(t_0)\notin\Omega$) تراژکتوری $X(t)$ منحنی های مرزی $u_1(x_1,x_2)=c_1$ و $u_2(x_1,x_2)=c_2$ را تنها و تنها در یک نقطه قطع (نه مماس) می‌کنند. جهت منحنی‌های بسته مرزی فوق را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\overline{\vec{V}_{u_2}\times\dot{\vec{X}}}\ \langle\ 0$$

همچنین بطور مشابه داریم:

$$\overline{\vec{V}_{u_1}\times\dot{\vec{X}}}\ \rangle\ 0$$

که در اینجا اثبات کامل می‌شود.

عکس قضیه بالا هم که به شکل زیر بیان می‌شود، صحیح است.

قضیه (۲-۴): فرض کنید که M یک مجموعه فشرده [2] با شرایط زیر باشد:

الف ـ فاقد هر نقطه تعادلی باشد. ب ـ مبدا توسط این مجموعه فشرده احاطه شده باشد. علاوه بر این فرض می‌کنیم دو منحنی بسته $u_1(x_1,x_2)=c_1$ و $u_2(x_1,x_2)=c_2$ که جهت آنها در جهت عقربه‌های ساعت است و مبدا را احاطه کرده باشند، به مجموعه M متعلق باشند. دراین صورت چنانچه این دو منحنی بسته نامساوی‌های زیر را برقرار کنند:

$$\overline{\vec{V}_{u_1}\times\dot{\vec{X}}}\ \rangle\ 0 \tag{۴-۱}$$

$$\overline{\vec{V}_{u_2}\times\dot{\vec{X}}}\ \langle\ 0 \tag{۴-۲}$$

یک سیکل حدی پایدار مجانبی L بطوری وجود دارد که:

$$L\subset \operatorname{int}\Omega \tag{۴-۳}$$

که Ω ناحیه بین $u_1(x_1,x_2)=c_1$ و $u_2(x_1,x_2)=c_2$ است.

اثبات: روابط (۱-۴) و (۲-۴) تضمین می‌کنند که Ω یک مجموعه تغییر ناپذیر است و چون یک مجموعه همبند دو گانه است (مبدا را احاطه کرده است و دارای دو مرز با لایی و پائینی است)، لذا از قضیه پوینکر[۶] می‌دانیم حتماً یک مجموعه تعادل به شکل منحنی بسته (سیکل حدی) به آن متعلق است.

٤ ـ الگوریتم تحلیل پایداری ـ ناپایداری و وجود سیکل حدی

سیستم کمکی زیر را برای سیستم (۱-۳) در نظر می‌گیریم:

(۵-۱)

بطوریکه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{vmatrix} g_{11}(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2)\\ g_{12}(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2)\end{vmatrix}\ \langle 0$$

۲) مبدأ (نقطه تعادل) توسط جواب معادله پفافی زیر محاط شده باشد:

$$g_{12}(x_1,x_2)dx_1 - g_{11}(x_1,x_2)dx_2 = 0 \qquad (۵-۲)$$

در این صورت از قضایای (۱-۳) و (۲-۳) نتیجه می‌شود که پاسخ معادله پفافی (۲-۵) همان $u_1(x_1,x_2)=c_1$ است و سیستم (۱-۳) پایدار مجانبی می‌باشد.

نکته: هرگاه در شرط اول (〉) را با (≥) جایگزین کنیم، نتیجه پایداری سیستم را ارائه خواهد کرد.

هرگاه برای سیستم کمکی (۱-۵) را بگونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{vmatrix} g_{11}(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2) \\ g_{12}(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) \end{vmatrix} \rangle 0$$

۲) مبدأ (نقطه تعادل) توسط جواب معادله پفافی (۲-۵) احاطه شده باشد.

در این صورت از قضایای (۱-۳) و (۲-۳) نتیجه می‌شود کـه پاسخ معادلـه پفـافی (۲-۵) همـان $u_2(x_1,x_2)=c_2$ اسـت و سیستم (۱-۳) نا پایدار می‌باشد.

برای تعیین وجود یک سیکل حدی در سیستم غیرخطی از نوع (۱-۳) مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ـ سیستم‌های مرتبه دوم کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_{21}(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = g_{22}(x_1,x_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = g_{11}(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = g_{12}(x_1,x_2) \end{cases}$$

۲ـ اینک $g_{11}(x_1,x_2)$ و $g_{12}(x_1,x_2)$ را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} g_{11}(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2) \\ g_{12}(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) \end{vmatrix} \rangle 0$$

و نیز مبدأ توسط جواب معادله پفافی زیر احاطه شده باشد:

$$g_{12}(x_1,x_2)dx_1 - g_{11}(x_1,x_2)dx_2 = 0 \qquad (۵-۳)$$

۳ـ جواب معادله (۳-۵) همان منحنی تراز $u_1(x_1,x_2)=c_1$ است.

۴ـ اینک $g_{21}(x_1,x_2)$ و $g_{22}(x_1,x_2)$ را طوری تعیین می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} g_{21}(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2) \\ g_{22}(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) \end{vmatrix} \langle 0$$

و نیز مبدأ توسط جواب معادله پفافی زیر احاطه شده باشد:

$$g_{22}(x_1,x_2)dx_1 - g_{21}(x_1,x_2)dx_2 = 0 \qquad (۵-۴)$$

۵ـ جواب معادله (۴-۵) منحنی تراز $u_2(x_1,x_2)=c_2$ می‌باشد.

نکتـه: اگـر مراحـل (۲) تـا (۵) بـا موفقیـت انجـام شـود در ایـن صـورت وجود یـک سـیکل حـدی پـایدار مجـانبی $L\subset\Omega(c_1,c_2)$ بطوریکه $\Omega(c_1,c_2)$ ناحیه بین منحنی‌های تراز $u_1(x_1,x_2)=c_1$ و $u_2(x_1,x_2)=c_2$ اسـت، تضمیـن می‌شـود. همچنین $\Omega=\Omega(c_1,c_2)$ یک مجموعه تغییرناپذیر است. از این روش با موفقیت در پایدارسازی و کنترل سیکل حـدی اسـتفاده شده است [۳۱]. با توجه به اینکه تحلیل وجود یک سیکل حدی در واقع مجموعه‌ای از تحلیـل نـاپـایداری و پـایداری سیسـتم می‌باشد، در زیر مثالهایی را برای تحلیل پایداری، ناپایداری و سیکل حدی با استفاده از روش جدید ارائه می‌دهیم.

مثال (۱): سیستم غیر خطی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) \end{cases}$$

در این روش g_{ij} را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که جمله با توان فرد از دترمینان حذف شود. بنابراین با انتخاب:

$$\begin{cases} g_{11}(x_1, x_2) = x_2 \\ g_{12}(x_1, x_2) = -x_1 \end{cases} \tag{۵-۵}$$

داریم:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ -x_1 & 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) \end{vmatrix} = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

که نتیجه به شرطی اکیدأ منفی است که: $x_1^2 + x_2^2 \langle 2$

از روابط (۲-۵) و (۵-۵) نتیجه می‌شود: $u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = c_1$

این منحنی بسته است و مبدأ را احاطه کرده است. بنابراین از قضیه (۱-۳) نتیجه می‌شود که سیستم در نقطه تعادل (مبدأ) پایدار مجانبی است.

از روش‌های دیگر با انتخاب تابع لیاپونف به شکل $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ پایداری مجانبی نقطه تعادل محرز می‌شود و یا مثلأ ز روش خطی سازی، ماتریس ژاکوبی حاصل از خطی شدن در نقطه تعادل (مبدأ) عبارتست از:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

که بوضوح نتیجه بدست آمده در بالا را تائید می‌کند.

مثال (۲): سیستم غیر خطی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - 3x_2^2(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \end{cases}$$

g_{ij} را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که جمله با توان فرد از دترمینان حذف شود. بنابراین با انتخاب:

$$\begin{cases} g_{11}(x_1, x_2) = x_2 \\ g_{12}(x_1, x_2) = -x_1^3 \end{cases} \tag{۵-۶}$$

داریم:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ -x_1^3 & -x_1^3 - 3x_2^2(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \end{vmatrix} = -(x_1^{10} + 3x_2^8)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$$

که نتیجه به شرطی مثبت است که:

$$x_1^4 + 2x_2^2 \langle 1$$

از رابطه (۲-۵) و (۶-۵) نتیجه می‌شود:

$$u_2(x_1,x_2)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^2=c_2\ .$$

این منحنی بسته است و مبدأ را احاطه کرده است. بنابراین از قضیه (۲-۳) نتیجه می‌شود که سیستم ناپایدار است. از روش دیگر با انتخاب تابع انرژی به شکل $V(x_1,x_2)=x_1^4+2x_2^2$ ناپایداری محرز می‌شود.

مثال (۳): سیستم غیر خطی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2-x_1^7(x_1^4+2x_2^2-10)\\ \dot{x}_2=-x_1^3-3x_2^2(x_1^4+2x_2^2-10)\end{cases}$$

با انتخاب:

$$\begin{cases}g_{11}(x_1,x_2)=x_2\\ g_{12}(x_1,x_2)=-x_1^3\end{cases}\qquad(۵-۷)$$

داریم:

$$\begin{vmatrix}x_2 & x_2-x_1^7(x_1^4+2x_2^2-10)\\ -x_1^3 & -x_1^3-3x_2^2(x_1^4+2x_2^2-10)\end{vmatrix}=-(x_1^{10}+3x_2^8)(x_1^4+2x_2^2-10)$$

که نتیجه به شرطی مثبت است که:

$$x_1^4+2x_2^2\ \langle 10\qquad(۵-۸)$$

از رابطه (۳-۵) و (۷-۵) داریم:

$$u_1(x_1,x_2)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^2=c_1\qquad(۵-۹)$$

این منحنی بسته است و مبدأ را احاطه کرده است. از رابطه (۸-۵) و (۹-۵) داریم: $0\ \langle\ c_1\ \langle 2.5$

با انتخاب:

$$\begin{cases}g_{21}(x_1,x_2)=x_2\\ g_{22}(x_1,x_2)=-x_1^3\end{cases}\qquad(۵-۱۰)$$

در این صورت دترمینان به شرطی منفی است که:

$$x_1^4+2x_2^2\ \rangle 10\qquad(۵-۱۱)$$

بنابراین داریم:

$$u_2(x_1,x_2)=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^2=c_2\qquad(۵-۱۲)$$

این منحنی هم بسته است و هم مبدأرا احاطه کرده است.

از رابطه (۱۱-۵) و (۱۲-۵) نتیجه می‌شود که: $c_2\rangle\ 2.5$

بنابراین، مجموعه $\Omega(c_1,c_2)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

بنابراین، مجموعه $\Omega(c_1,c_2)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega(c_1,c_2)=\left\{(x_1,x_2)\middle|c_1\langle\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{2}x_2^2\langle c_2\;\;;\;\;0\langle c_1\langle 2.5\;\;\text{and}\;\;c_2\rangle 2.5\right\}$$

این مجموعه تغییرناپذیر است و داریم (L یک سیکل حدی پایدار مجانبی است):

$$L\subset\Omega(c_1,c_2)$$

لازم به ذکر است که در طی سالهای اخیر کلاً مقالات بر روی حل عددی [۲۸]، تعیین کران پائین [۲۹]، بالای[۳۰] معادله لیاپونف (برای حالت خطی) و ... [۳۱] متمرکز بوده است. روش نوین ارائه شده در این مقاله بسادگی تحلیل پایداری، ناپایداری و سیکل حدی را برای سیستم‌های غیر خطی ارائه می‌نماید.

۵ـ نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش عملی جهت تحلیل پایداری سیستمهای مرتبه دوم ارائه شد. این روش بر مبنای استفاده از یک سیستم کمکی و مفاهیم منحنی‌های هم پتانسیل می‌باشد. تحلیل ناپایداری نیز بر همین اساس انجام شد. همچنین شرایط لازم و کافی جهت وجود یک سیکل حدی در سیستم‌های غیر خطی دینامیکی ارائه شد. روش کاربردی و قابل توسعه برای سایر مسائل نظیر پایدارسازی، طراحی یک سیکل حدی با حوزه جذب مورد نظر، روباتیک و هوا فضا می‌باشد. برتری این روش بر سایر روشها اولاً شرط لازم و کافی بودن تحلیل (بر خلاف بسیاری از روش‌های تحلیلی) و ثانیاً جامع بودن روش بخاطر تحلیل همزمان پایداری، ناپایداری و وجود سیکل حدی است.

مراجع

[1] J. J. E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.
[2] M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis. 2 nd Ed., Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
[3] Pascal Bigras, Maarouf Saad and Jules O'Shea, Robust trajectory control in the workspace of a class of flexible robots, J Robotic Syst, 6 (2001) 275-288.
[4] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, 1983.
[5] H. Nijmerijer and A. J. Van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer-Verlag, 1990.
[6] B. Friedland, Advanced Control System Design. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
[7] K. Ogata, State Space Analysis of Control Systems. Prentice-Hall, 1967.
[8] K. Y. Nikravesh and R. G. Hoft, Survey of Analytical Method of Generating Lyapunov Functions . Electrical Engineering Dept, University of Missouri-Columbia, Nov. 1973.
[۹] حسن فتح‌آ بادی، رساله دکتری "روشی نوین جهت تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی غیرخطی "دانشکده برق ، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تابستان ۱۳۸۱.
[10] G. E. Gibson, Nonlinear Automatic Control. New York, McGraw-Hill, 1963.
[11] O. Gurel and L. Lapidus, "A Giude to the Generation of Lyapunov Functions", Industrial and Engineering Chemistry, Vol. 61, No. 3, March 1969.
[12] E. J. Lefferts, "A Guide of the Application of the Lyapunov Direct Method to Flight Control Systems", Nasa CR-209, 1965.
[13] W. Leighton, "On the Construction of Lyapunov Function for Certain Autonomous Nonlinear Differetial Equations", Contribution to Differential Equation, Vol. 2, No. 1-4, 1963.
[14] Modern Control Principles and Applications, J. C. Hsu, A. V. Meyer, McGraw-Hill, 1968.
[15] Z. V. Rekasius, J. E.Gibson, "Stability Analysis of Nonlinear Control System by the Second Method of Lyapunov", IRE, Jan.1962.
[16] G. P. Szego, "A Contribution to Lyapunov 's Second Method, Nonlinear Autonomous System" , ASME Ser D. Dec.1962.
[17] L. R. Anderson and W. Leighton, "Lyapunov Functions for Autonomous Systems of Second Order", Journal of Mathematical Analysis and Application Vol. 23, No.3,Sept. 1968.
[18] J. Lasalle S. Lefshetz, "Stability by Lyapunov 's Direct Method with Application", Academic Press, 1961.

[15] Z. V. Rekasius, J. E.Gibson, "Stability Analysis of Nonlinear Control System by the Second Method of Lyapunov", IRE, Jan.1962.
[16]G. P. Szego, "A Contribution to Lyapunov 's Second Method, Nonlinear Autonomous System" , ASME Ser D. Dec.1962.
[17] L. R. Anderson and W. Leighton, "Lyapunov Functions for Autonomous Systems of Second Order", Journal of Mathematical Analysis and Application Vol. 23, No.3,Sept. 1968.
[18] J. Lasalle S. Lefshetz, "Stability by Lyapunov 's Direct Method with Application", Academic Press, 1961.
[19] D. R. Ingwerson, "A Modified Lyapunov Method for Nonlinear Stability Problems", Doctoral Dissertation Stanford University, Stanford, California , 1960.
[20] S. Barnett and C. Storey,"Matrix Methods in Stability Theory", Barnes and Noble, Inc., New York, 1970, pp.67-68.
[21] J. J. Roodden, "Applications of Lyapunov Stability Theory", phD Dissertation Stanford University, 1964.
[22] R. Reiss and G.Geiss, " The Construction of Lyapunov Function" IEEE Trans. Automatic Control , Vol. AC-8 , Oct ., 1963, pp. 382-383 .
[23] E.F. Infante and L. G. Clark , "A Method for the Determination of the Domain of Stability of Second-Order Nonlinear Autonomous System", ASME, J. of App. Mech., 1964, pp.315-320.
[24] J. A. Walker and L.G.Clark, "An Integral Method of Lyapunov Function Generation for Nonlinear Autonomous Systems", ASME J. of App. Mech.,1965, pp. 569-575.
[25] E. T. Wall and M.L. Moe, "An Energy Metric Algorithm for the Generation Lyapunov Functions", IEEE Trans. Automatic Control (Correspondence), Vol. Ac-13 February 1968, pp. 121-122.
[26] O. Palosenski and P. Stern, "Comments on An Energy Metric Algorithm for the Generation Lyapunov Functions", IEEE Trans. Automatic Control (Correspondence), Vol. Ac-14 April 1969, pp. 110-111.
[27] S. G. Margolis and W.G. Vogt , " Control Engineering Applications of V.I. Zubov's Construction Procedure for lyapunov Function", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-8, April 1963, pp. 104-113.
[28] M.W. McConley, B.D Applebyand, M.A. Dahlehand and E.Feron, " A computationally efficient Lyapunov-based scheduling procedure for control of nonlinear systems with stability guarantees", Automatic Control, IEEE Transactions on , Vol, 45, Jan. 2000, pp.33 -49 .
[29] T. Mori and H. Kokame, "A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices", IEEE Trrans. Automatic Control, Vol. 45, AC-8, Aug. 2000, pp 1516-1519.
[30] C. H. Lee , "Upper and Lower Matrix Bounds of the Solution for the Discrete Lyapunov Equation", IEEE Trrans. Automatic Control, Vol. 41, AC-9, Sep. 1996, pp. 1338-1342.
[31] D. Angeli, " A lyapunov approach to incremental stability properties" IEEE Trrans. Automatic Control, Vol. 47, AC-3, Mar. 2002, pp. 410-421.