

# شبیه‌سازی عددی فرآیند شکافت هیدرولیکی و بررسی مشخصات ترک در شرایط مختلف تنش‌های برجا

محمدجواد ناصحی<sup>i</sup>؛ علی مرتضوی<sup>ii</sup>

## چکیده

روش شکافت هیدرولیکی به عنوان یکی از روش‌های تحریک مخزن، کاربرد گسترده‌ای در صنایع نفت و گاز دارد. طراحی عملیات شکافت هیدرولیکی به دلیل فراوانی عوامل دخیل در این فرآیند، همواره با مشکلات و پیچیدگی‌های فراوانی روبرو بوده است. مشکلات اجرایی از یک سو و هزینه‌های بالای عملیات از سوی دیگر، ضرورت استفاده از روش‌های مختلف شبیه‌سازی در بررسی این فرآیند را آشکار می‌سازد. در این تحقیق با استفاده از نرم‌افزار UDEC 4.0 که بر پایه روش عددی اجزای مجزا به تحلیل مسایل می‌پردازد، فرآیند شکافت هیدرولیکی در یک چاه نفتی، در شرایط مختلف تنش‌های برجا شبیه‌سازی شده است. عملیات شبیه‌سازی با استفاده از روش تحلیل جریان گذرا برای جریان سیال و در سه حالت مختلف تنش‌های برجا انجام شده است. نتایج بدست آمده به خوبی تشکیل و توسعه ترک در امتداد عمود بر راستای تنش بر جای حداقل را نشان می‌دهد ضمن اینکه نتایج حاصله نشان می‌دهد که با افزایش اختلاف بین مقادیر تنش‌های برجا، مشخصات هندسی و هیدرولیکی ترک بهبود می‌یابد.

## کلمات کلیدی

شکافت هیدرولیکی، شبیه‌سازی عددی، تحلیل جریان گذرا، تنش‌های برجا.

## *Numerical Simulation of Hydraulic Fracturing and Investigation of Frac properties in Various Condition of Insitu Stress*

M.J. Nasehi, A. Mortazavi

### ABSTRACT

Hydraulic fracturing is a widely used method for enhancing oil extraction in the petroleum industry. Because of complications associated with this process, it is beneficial to use numerical methods in the design of fracturing process. This research describes the results of numerical simulation of hydraulic fracturing process in an oil-well carried out using the UDEC (Universal Distinct Element) code. Simulations were performed for various boundary conditions with considering a transient flow algorithm for fluid flow. Numerical simulation with UDEC showed that the fracture is initiated and propagated in the direction perpendicular to the minimum principal stress. In addition, it showed that if the difference between the minimum and maximum principal stresses is increased, the hydraulic properties of the fracture will be improved.

### KEYWORDS

Hydraulic fracturing, Numerical simulation, Transient flow algorithm, Insitu stress.

<sup>i</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک سنگ، دانشکده معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر: nasehi61@yahoo.com

<sup>ii</sup> دانشیار دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر: ali.mortazavi@aut.ac.ir

تغییر شکل پلاستیک در سنگ می‌شود. پس از اینکه به مقدار کافی بالشتک<sup>۱</sup> همراه سیال برای باز نگه داشتن ترک در عرض مناسب، به داخل آن ارسال شد، ماسه به عنوان معمول‌ترین پروپانت<sup>۲</sup> به سیال اضافه می‌شود تا داخل شکستگی قرار گرفته و آن را پس از خاتمه‌ی عملیات باز نگه دارد [۱].

اندازه‌گیری تنش‌های برجا در پوسته زمین، ایجاد شکافت در مخازن آب زیرزمینی برای استحصال انرژی زمین گرمایی و تخریب سنگ در برخی از روش‌های معدن‌کاری از دیگر کاربردهای روش شکافت هیدرولیکی هستند [۲].

از آنجا که در این فرآیند عوامل مختلفی تاثیر گذار هستند، بنابراین شبیه‌سازی این فرآیند با پیچیدگی‌ها و ملاحظات خاصی روبرو است. توام سازی فرآیندهای مکانیکی، هیدرولیکی و حرارتی و میزان تاثیر هر یک از این عوامل بر طراحی و اجرا از جمله مشکلاتی هستند که در فرآیند شبیه‌سازی باید مورد توجه قرار گیرند.

مدل‌سازی فرآیند شکافت هیدرولیکی حتی در ساده‌ترین حالت نیازمند توام‌سازی حداقل سه فرآیند است که عبارتند از [۳]:

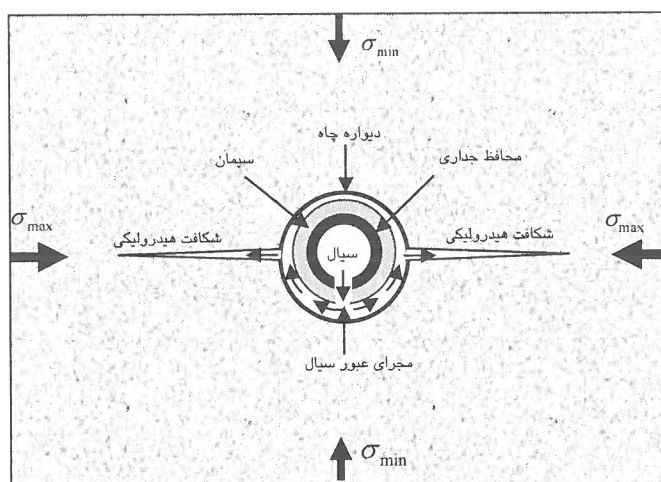
- ۱- تغییر شکل مکانیکی سنگ که ناشی از فشار سیال وارد بر سطح ناپیوستگی است،
- ۲- جریان سیال در میان ناپیوستگی،
- ۳- توسعه و پیشروی ترک.

فرآیند مدل‌سازی به دلیل محدودیت‌های موجود در اغلب روش‌های مدل‌سازی و همچنین با در نظر گرفتن شرایطی که شکافت هیدرولیکی واقعی رخ می‌دهد، با مشکلات و محدودیت‌های فراوان دیگری هم روبرو است. به عنوان مثال وجود لایه‌هایی از انواع مختلف سنگ که موجب

پایین بودن نفوذپذیری سنگ مخزن از جمله محدودیت‌های طبیعی است که جریان سیال به سمت چاه را با مشکل مواجه می‌کند. به عبارت دیگر به دلیل نفوذپذیری پایین سنگ مخزن و نبود مسیرهای مناسب برای عبور سیال، این امکان برای سیال فراهم نیست که بتواند به راحتی از میان تشکیلات سنگی حرکت کرده و به سمت چاه جریان یابد. در این حالت موضوع تحریک مخزن مورد توجه قرار می‌گیرد. به طور کلی هدف از فرآیند تحریک در مخازن هیدروکربنی، افزایش نفوذپذیری سنگ مخزن در اطراف چاه و ایجاد مسیرهای جدید برای عبور سیال می‌باشد [۱].

شکافت هیدرولیکی یکی از معمول‌ترین روش‌های تحریک مخازن هیدروکربنی است که از آن برای ایجاد و گسترش شکستگی در سنگ برای افزایش تولید مخازن استفاده می‌شود. در این روش از طریق ارسال سیالی با فشار بالا به درون طبقات زمین، به ایجاد و توسعه مسیرهایی با تراوایی بالا در سنگ مخزن برای انتقال سیال مخزن به درون چاه پرداخته می‌شود (شکل ۱). پمپاژ سیال در این روش باید به گونه‌ای انجام شود که نرخ ورود سیال به داخل سنگ بیشتر از نرخ نفوذ آن در سنگ باشد. در این صورت تنش ناشی از فشار سیال بر سنگ، می‌تواند بر تنش فشاری زمین که موجب قرار گرفتن قطعات سنگی در کنار یکدیگر شده است، غلبه کند. در این شرایط سنگ در صفحه‌ای عمود بر امتداد تنش فشاری حداقل دچار گسیختگی می‌شود [۱].

تا زمانی‌که پمپاژ سیال به داخل زمین ادامه داشته باشد، گسیختگی ایجاد شده در سنگ گسترش می‌یابد، زیرا فشار سیالی که روی سطوح گسیختگی اعمال می‌شود، باعث



شکل (۱): نمایش قسمت‌های مختلف چاه و چگونگی ایجاد ترک در اثر عملیات شکافت هیدرولیکی

تغییر در مقدار و جهت تنش‌های برجا می‌شوند، نشت سیال شکست از سطح ترک به داخل سنگ دربرگیرنده یا نفوذ سیال مخزن از سنگ به درون ترک که یک فرآیند وابسته به زمان است، تاثیر تنش‌های برشی و دما بر روی جریان سیال در داخل ترک، انتقال و حرکت پروپانت معلق در سیال (که در تحریک مخازن هیدروکربنی اهمیت زیادی دارد) و مدل کردن بسته شدن ترک در اثر توقف پمپاژ، جریان برگشتی یا تغییرات ناگهانی ژئومتری در یک ناحیه از ترک که در منطقه‌ای با تنش کمتر قرار دارد، همگی از مشکلاتی هستند که می‌توانند عملیات را به شدت تحت تاثیر قرار داده و نتایج مدل‌سازی را به مخاطره اندازند [۳].

از آنجایی که بیشترین کاربرد این روش در تحریک مخازن هیدروکربنی است، بنابراین در این تحقیق تلاش شده است تا مدل‌سازی بر روی فرآیند شکافت هیدرولیکی در مخازن هیدروکربنی متمرکز شود. بدین منظور نرم‌افزار UDEC 4.0 که بر اساس روش عددی اجزای مجزای دوبعدی به تحلیل مسایل می‌پردازد، جهت شبیه‌سازی به کار گرفته شده است. بدین ترتیب با ساخت مدلی از یک مخزن هیدروکربنی در اطراف یک چاه نفتی، تلاش شده تا فرآیند شکافت هیدرولیکی در شرایط مرزی مختلف، شبیه‌سازی شود. شرایط مرزی مورد استفاده عبارتند از سه حالت مختلف تنش‌های برجا که با نسبت‌های ۰/۵، ۱/۵ و ۲ در مدل آورده شده‌اند. برای شبیه‌سازی جریان سیال در فرآیند شکافت هیدرولیکی، جریان سیال با نرخ ثابتی به درون چاه وارد شده و تغییرات پارامترهایی نظیر فشار سیال، بازشدگی ترک و نرخ جریان سیال در داخل ترک از لحظه شروع پمپاژ تا زمان تشکیل ترک، مورد بررسی قرار گرفته است. در بررسی رفتار هیدرولیکی مدل از الگوریتم جریان گذرا استفاده شده است و بدین ترتیب زمان محاسبات سیالی به صورت زمان واقعی مدل شده است.

## ۲- مدل‌سازی عددی

در این تحقیق، برای شبیه‌سازی عددی، از روش عددی اجزای مجزای دوبعدی استفاده شده است. روش اجزای مجزا یکی از روش‌های اصلی از مجموعه روش‌های المان گسسته است که برای تحلیل مسایل در محیط‌های ناپیوسته استفاده می‌شود. به طور کلی یک محیط ناپیوسته توسط ناپیوستگی‌ها یا سطوح تماسی که در محیط وجود دارد، از محیط پیوسته متمایز می‌شود [۴].

در روش اجزای مجزا، توده‌سنگ به صورت مجموعه‌ای از بلوک‌های مجزا نمایش داده می‌شود که این بلوک‌ها می‌توانند تغییر شکل پذیر و یا صلب باشند و ناپیوستگی‌ها به‌عنوان سطوح

جدایش در بین بلوک‌ها عمل می‌کنند. تغییر شکل توده‌سنگ در این روش شامل تغییر شکل الاستیک و تغییر شکل پلاستیک سنگ بکر (بلوک‌ها) به علاوه جابجایی بلوک‌ها در امتداد سطوح تماس است [۵].

در این روش، با در نظر گرفتن تغییر مکان بلوک‌ها، مقادیر نیرو و جابجایی در نقاط یا سطوح تحت تنش بلوک‌ها تعیین می‌شوند. همچنین، برای محاسبات مربوط به بلوک‌ها از قانون دوم نیوتن (رابطه (۱)) استفاده می‌شود [۵].

$$\frac{du}{dt} = \frac{F}{m} \quad (1)$$

که در آن  $u$  سرعت،  $t$  زمان و  $m$  جرم است.

برای محاسبات مربوط به نقاط تماس نیز از قانون نیرو-جابجایی (روابط (۲) و (۳)) استفاده می‌شود [۵].

$$\Delta F_n = K_n \Delta U_n \quad (2)$$

$$\Delta F_s = K_s \Delta U_s \quad (3)$$

در روابط (۲) و (۳) تغییر نیروهای عمودی و برشی بین دو بلوک ( $\Delta F_n$  و  $\Delta F_s$ ) به تغییر جابجایی‌های نسبی عمودی و برشی بین آنها ( $\Delta U_n$  و  $\Delta U_s$ ) مربوط می‌شود.  $K_n$  و  $K_s$  سختی‌های تماس در جهات عمودی و مماس بر سطح تماس هستند.

نرم‌افزار UDEC، قابلیت بررسی و تحلیل جریان سیال در میان ناپیوستگی‌ها را نیز دارد. یک آنالیز توامان هیدرومکانیکی در این نرم‌افزار اجرا می‌شود، به این صورت که قابلیت هدایت هیدرولیکی ناپیوستگی‌ها به تغییر شکل مکانیکی آنها وابسته شده و برعکس فشار سیال، رفتار مکانیکی ناپیوستگی‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد [۵].

برای بررسی جریان سیال در این نرم‌افزار، از یک ساختار ناحیه‌ای استفاده می‌شود. بدین منظور فضاهای بین بلوک‌ها که به عنوان نواحی هیدرولیکی شناخته می‌شوند، تعریف می‌شوند. در این روش فرض می‌شود که هر یک از این نواحی، از سیالی با فشار معین پر شده است و هر ناحیه با ناحیه مجاورش ارتباط دارد. در نبود نیروی جاذبه، فرض می‌شود که فشار سیال یکنواختی در هر ناحیه وجود دارد. در مسائلی که نیروی جاذبه هم تاثیرگذار است، فرض می‌شود که فشار سیال طبق گرادیان هیدرواستاتیکی، به صورت خطی تغییر می‌کند و فشار در هر ناحیه به صورت مقداری در مرکز ناحیه تعریف می‌شود. جریان به وسیله اختلاف فشار بین نواحی مجاور و بر اساس رابطه (۴) کنترل می‌شود [۵]:

$$\Delta p = p_2 - p_1 + \rho_w g (y_2 - y_1) \quad (4)$$

$\rho_w$ : دانسیته سیال

$g$ : شتاب جاذبه

$Y_1, Y_2$ : مختصات مراکز نواحی در جهت محور  $Y$

نواحی هیدرولیکی توسط نقاط تماس، یعنی نقاطی که در آنها نیروهای ناشی از فعل و انفعالات مکانیکی اعمال می‌شود، از یکدیگر جدا می‌شوند. برای تماس‌های نقطه‌ای (تماس رأس به ضلع یا تماس‌های رأس به رأس)، نرخ جریان از یک ناحیه به ناحیه مجاورش در اثر اختلاف فشار  $\Delta p$ ، از رابطه (۵) بدست می‌آید [۵]:

$$q = -k_c \Delta p \quad (5)$$

که  $k_c$  ضریب نفوذپذیری تماس نقطه‌ای می‌باشد. برای محاسبه نرخ جریان در مورد تماس‌های ضلع به ضلع نیز می‌توان از قانون مکعبی جریان در یک ناپیوستگی صفحه‌ای استفاده نمود. بدین ترتیب نرخ جریان توسط رابطه (۶) بدست می‌آید [۵]:

$$q = -k_f a^3 \frac{\Delta p}{l} \quad (6)$$

که در آن:

$k_f$ : ضریب نفوذپذیری ناپیوستگی است که مقدار تئوری

آن برابر است با  $1/12\mu$  و  $\mu$  ویسکوزیته دینامیک سیال است.

$a$ : بازشدگی ناپیوستگی (دهانه هیدرولیکی)

$l$ : طول تماس بین دو ناحیه است.

بازشدگی هیدرولیکی، اغلب از رابطه (۷) محاسبه می‌شود:

$$a = a_0 + u_n \quad (7)$$

در رابطه ذکر شده،  $a_0$ ، بازشدگی ناپیوستگی در تنش عمودی صفر و  $u_n$ ، جابجایی ناپیوستگی در جهت عمودی است (در حالت باز شدن درزه مثبت است) که توسط تنش عمودی وارد بر درزه و خواص سنگ کنترل می‌شود.

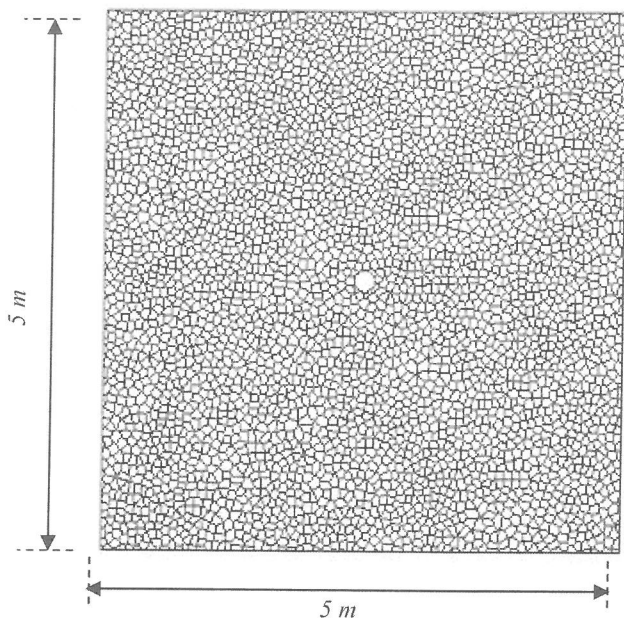
فرض می‌شود حداقل مقدار بازشدگی ( $a_{res}$ )، مقداری باشد که بسته شدن ناپیوستگی اثری بر نفوذپذیری آن نداشته باشد. حداکثر مقدار بازشدگی ( $a_{max}$ ) نیز مقداری فرضی و در اختیار کاربر است که برای بالا بردن بازدهی روش حل و محاسبات استفاده می‌شود (به صورت پیش فرض پنج برابر  $a_{res}$  است اما توسط کاربر قابل تغییر است) [۵].

## ۲-۱- هندسه مدل

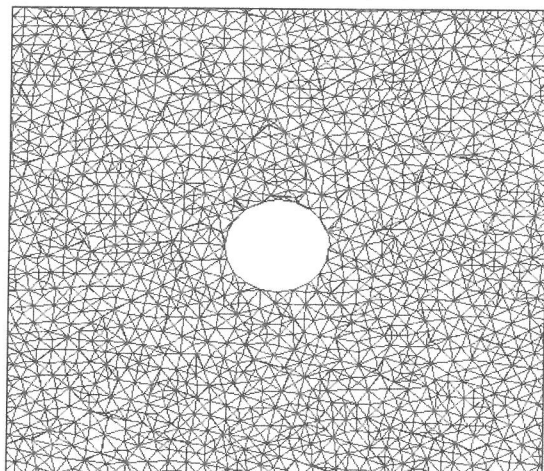
یک مخزن هیدروکربنی محیطی است محتوی مواد هیدروکربنی (نفت و گاز) به مقدار اقتصادی و آب که این سیالات با نسبت‌های مختلف در فضاهای خالی مخزن (بین دانه‌های ماسه‌سنگ و یا در منافذ موجود در سنگ‌های کربناته) قرار گرفته‌اند. اتصال و ارتباط حفره‌های موجود در محیط متخلخل به گونه‌ای است که امکان جریان سیال در مخزن را فراهم می‌کند [۶]. مخازن هیدروکربنی در شکل‌های مختلف و با مشخصات هندسی متفاوت در طبیعت وجود دارند. همچنین وجود برخی ساختارهای زمین‌شناسی مانند چین‌خوردگی، گسل و سطوح لایه‌بندی نیز موجب پیچیده‌تر شدن وضعیت هندسی مخازن می‌شود. پیچیدگی وضعیت هندسی مخزن از یک سو و ماهیت سه‌بعدی مساله شکافت هیدرولیکی از سوی دیگر، ضرورت استفاده از مدل‌های سه‌بعدی برای شبیه‌سازی این فرآیند را آشکار می‌سازد، اما در این زمینه مشکلاتی وجود دارد که از جمله‌ی آنها محدودیت‌های مربوط به ابزارهای محاسباتی و نرم‌افزارهای شبیه‌سازی می‌باشد. ابزارهای محاسباتی موجود و نرم‌افزارهای عددی که برای شبیه‌سازی استفاده می‌شوند اغلب از نظر حافظه و سرعت محاسباتی محدودیت دارند و قادر به شبیه‌سازی مدل‌های بزرگ با شرایط هندسی پیچیده نیستند. بنابراین با توجه به محدودیت‌های موجود، استفاده از فرضیات ساده کننده و بررسی موضوع در حالت دوبعدی ضروری است.

در این تحقیق برای ساخت مدلی از یک مخزن هیدروکربنی، یک مقطع افقی دوبعدی به ابعاد  $5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$  عمود بر محور چاه قائمی به قطر  $0.2 \text{ m}$  در نظر گرفته شده است (شکل ۲) تا با استفاده از فرضیات تحلیل کرنش صفحه‌ای، به تحلیل مساله پرداخته شود.

یکی از محدودیت‌های UDEC، عدم امکان مدل کردن گسیختگی در محیط، توسط این نرم‌افزار است، یعنی برای رسیدن به این هدف، بلوک اصلی با استفاده از تعداد زیادی درزه‌ی مصنوعی و با جهت‌گیری اتفاقی، به بلوک‌های بسیار کوچکی به ابعاد میانگین ۸ سانتی‌متر تقسیم شده است (شکل ۳). مشخصات درزه‌های مصنوعی به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که حتی‌الامکان به مشخصات سنگ بکر (بلوک‌ها) نزدیک باشند تا بدین ترتیب هم بتوان رفتار مدل را معادل با رفتار محیط پیوسته در نظر گرفت و هم با اعمال فشار سیال در میان درزه‌ها و باز شدن آنها، هدف مورد نظر که تشکیل ترک در اثر فشار سیال است، برآورده شود.

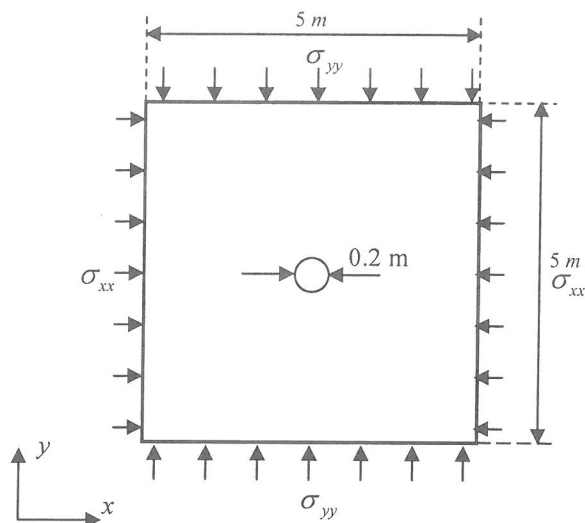


شکل (۳): نمایش الگوی درزه‌داری موزاییکی در مدل که به منظور اعمال فشار سیال در بین بلوک‌ها ایجاد شده است



شکل (۴): نمایشی از مش‌بندی بلوک‌ها توسط المان‌های مثلثی تفاضل متناهی

از آنجا که درزه‌های به کار رفته در مدل مورد بررسی درزه‌های مصنوعی بوده و به دلیل ملاحظات مدل‌سازی ایجاد شده‌اند، بنابراین ضرایب مربوط به سختی آنها بسیار بالا در نظر گرفته شده‌اند ( $j_{kn} = 500 GPa/m$  و  $j_{ks} = 200 GPa/m$ ) تا بدینوسیله از جابجایی آنها جلوگیری شود. همچنین تلاش شده است تا پارامترهای مربوط به خواص مقاومتی درزه‌ها نزدیک به پارامترهای مقاومتی ماده سنگ باشند تا رفتار مجموعه مدل نمایانگر رفتار سنگ پیوسته باشد. پارامترهای مربوط به ماده سنگ و ناپیوستگی‌هایی که در مدل استفاده شده‌اند، در جدول (۱) آورده شده‌است.



شکل (۲): نمایشی از هندسه مدل و شرایط مرزی اعمالی

## ۲-۲- انتخاب مدل دگرشکلی محیط با توجه به شرایط

### مرزی حاکم بر مساله

با توجه به اینکه مدل مورد بررسی، نمایانگر رفتار سنگ در عمق تقریبی ۱۰۰۰ متر بوده و تنش‌های محصور کننده در این عمق، تاثیر زیادی بر روی رفتار سنگ دارند، بنابراین برای بررسی رفتار بلوک‌ها در این مساله، از بلوک‌های تغییرشکل‌پذیر استفاده شده است. بدین منظور بلوک‌ها با استفاده از المان‌های مثلثی کرنش ثابت به ضلع ۴ سانتی‌متر و به صورت یکنواخت مش‌بندی شده‌اند. در شکل (۴) نمایشی از مدل که توسط المان‌های مثلثی مش‌بندی شده است، دیده می‌شود.

## ۲-۳- مشخصات مواد و ناپیوستگی‌ها و تعیین مدل

### رفتاری آنها

با توجه به اینکه عملیات شکافت هیدرولیکی معمولاً در مخازن ماسه‌سنگی انجام می‌شود، مشخصات فیزیکی سنگ بکر و ناپیوستگی‌های مورد استفاده در مدل، بر اساس مشخصات ماسه‌سنگ با مقاومت و استحکام بالا در نظر گرفته شده‌اند. برای بررسی رفتار سنگ بکر در شرایط مختلف تنش، از مدل رفتاری موهر-کولمب<sup>۲</sup> استفاده شده است. در مدل موهر-کولمب، تنش تسلیم به مقادیر تنش‌های اصلی حداقل و حداکثر وارد بر سنگ بستگی دارد. در بررسی رفتار ناپیوستگی‌ها نیز از مدل لغزش کولمب استفاده شده است [۵].

جدول (۱): مشخصات مواد بکار رفته در مدل‌ها

پارامتر	مقدار	واحد
دانشیته	۲۵۰۰	$\text{Kg.m}^{-3}$
مدول بالک	۱۳/۹	GPa
مدول برشی	۹/۱	Gpa
مقاومت کششی	۸/۳	MPa
چسبندگی	۲۴/۸	MPa
زاویه اصطکاک داخلی	۳۲/۵	Degree

جدول (۲): مشخصات ناپیوستگی‌های به کار رفته در مدل‌ها

پارامتر	مقدار	واحد
سختی عمودی ( $J_{kn}$ )	۵۰۰	$\text{GPa.m}^{-1}$
سختی برشی ( $J_{ks}$ )	۲۰۰	$\text{GPa.m}^{-1}$
چسبندگی	۲۴/۸	MPa
زاویه اصطکاک داخلی	۳۲/۵	degree
بازشدگی هیدرولیکی باقیمانده	۰/۱	mm
بازشدگی در تنش عمودی صفر	۰/۵	mm

## ۲-۴- شرایط مرزی

از جمله اهداف این تحقیق بررسی اثر تغییر در شرایط مرزی بر روی فرآیند شکافت هیدرولیکی است. از آنجا که تنش‌های برجا عامل اصلی در تعیین راستای ترک هستند، بنابراین برای مشخص کردن نقش این عامل، سه مدل با شرایط تنش متفاوت و نسبت تنش‌های برجای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در هر سه مدل، تنش عمودی موثر وارد بر سنگ برابر با ۲۵ مگاپاسکال در نظر گرفته شده ( $\sigma_v = \sigma_1 = 25\text{MPa}$ ) و تنش‌های افقی موثر نیز در شرایط و مقادیر مختلفی اعمال شده‌اند. به کارگیری تنش موثر به این معنی است که نقش فشار حفره‌ای در کاهش تنش‌های برجا در این مرحله منظور شده است. حالت‌های مختلف تنش‌های افقی، در جدول ۳ آورده شده است.

یکی دیگر از شرایط مرزی اعمال شده در مدل، فشار سیال است که در هر سه مدل یاد شده به صورت یکسان و از طریق پمپاژ جریان با نرخ ثابت ۰/۱ مترمکعب بر ثانیه به داخل چاه اعمال می‌شود. این موضوع در بررسی رفتار هیدرولیکی مدل دقیق‌تر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

## ۳- بررسی رفتار مکانیکی مدل در شرایط مرزی

### مختلف

### ۳-۱- بررسی وضعیت تنش

برای بررسی رفتار مدل، می‌توان وضعیت تنش در نقاط مختلف آن از جمله در نواحی اطراف چاه را بررسی نمود. مقادیر تنش‌های مماسی و شعاعی در اطراف چاه به تفاضل تنش‌های برجا و مقدار آنها بستگی دارد، به طوری که با افزایش مقادیر تنش‌های برجا و همچنین افزایش اختلاف بین آنها، تمرکز تنش در دیواره چاه افزایش می‌یابد [۲]. در شکل ۵ وضعیت تنش در منطقه اطراف چاه و تا فاصله ۰/۵ متر از مرکز چاه برای شرایط مختلف تنش دیده می‌شود. همانطور که از شکل ۵ درمی‌یابیم، با افزایش اختلاف بین تنش‌های برجا، تمرکز تنش فشاری و کششی در دیواره چاه افزایش می‌یابد به نحوی که حداکثر مقدار تنش فشاری و کششی تولیدی در اطراف چاه، مربوط به مدل‌های با حالت تنش  $K=0.5$  و  $K=2$  است که در آنها حداکثر تنش فشاری به  $48/7$  مگاپاسکال و حداکثر تنش کششی به ترتیب به  $5/2$  و  $5/4$  مگاپاسکال می‌رسد. همچنین حداکثر مقدار تنش‌های فشاری و کششی در مدل با نسبت  $K=1/5$  به ترتیب برابر با  $35/8$  و  $3/8$  مگاپاسکال است. همچنین در شکل ۶، نمودار تنش‌های مماسی محاسبه شده از روش عددی بر روی امتدادهایی موازی با امتدادهای تنش‌برجای حداقل و حداکثر و در فاصله بین دیواره چاه تا مرزهای مدل، برای حالت‌های مختلف تنش رسم شده است

جدول (۳): تنش‌های افقی مختلف بکار رفته در مدل‌ها

نسبت تنش‌های افقی	تنش افقی موثر در جهت $y$ (MPa)	تنش افقی موثر در جهت $x$ (MPa)	حالت مرزی
$(K = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}})$			
$K=0.5$	$\sigma_{yy}=20$	$\sigma_{xx}=10$	۱
$K=1/5$	$\sigma_{yy}=15$	$\sigma_{xx}=15$	۲
$K=2$	$\sigma_{yy}=10$	$\sigma_{xx}=20$	۳

حداکثر مقدار تنش در هر راستا روی نمودار مربوط به آن نوشته شده است. با دقت در نمودار تنش‌های مماسی در اطراف چاه و با توجه به اینکه حداکثر مقدار تنش مماسی در مجاورت دیواره‌ی چاه وجود دارد، مقدار فشار لازم برای شروع ترک در دیواره‌ی چاه در عملیات شکافت هیدرولیکی را می‌توان

خط واصل مرکز چاه به نقطه موردنظر است. همچنین  $\sigma_H$  و  $\sigma_h$  به ترتیب برابر با تنش‌های افقی اصلی و حداقل موجود در منطقه و  $P_f$  نیز فشار سیال منفذی است.

برای مقایسه تنش‌های بدست آمده از روش عددی با روش تحلیلی کرش، دو خط A و B در دو راستای x و y، طبق شکل ۷ در همه مدل‌ها در نظر گرفته شده است و مقادیر تنش مماسی و شعاعی در این دو راستا از هر دو روش عددی و تحلیلی کرش، بدست آمده‌اند. نتایج بدست آمده، در شکل‌های (۸)، (۹) و (۱۰) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل‌ها مشخص است، نتایج بدست آمده از هر دو روش بسیار به هم نزدیک هستند.

#### ۴- بررسی رفتار هیدرولیکی مدل

پس از بررسی رفتار مکانیکی مدل و اطمینان از درستی پاسخ‌های بدست آمده، شرایط هیدرولیکی در مدل‌ها اعمال شده است. همانطور که قبلاً هم اشاره شد، یکی از قابلیت‌های مهم نرم‌افزار UDEC امکان تحلیل فرآیندهای توامان هیدرولیکی-مکانیکی است. در این نرم‌افزار برای تحلیل عددی جریان سیال از ساختار ناحیه‌ای استفاده می‌شود. در ساختار ناحیه‌ای، شبکه ناپیوستگی‌ها به وسیله نقاط تماس به ناحیه‌های کوچکی تقسیم شده و جریان سیال در میان این نواحی مورد بررسی قرار می‌گیرد. دو نوع الگوریتم برای بررسی جریان پایا و جریان گذرا در این نرم‌افزار در نظر گرفته شده است. جریان پایا به جریانی گفته می‌شود که در آن مشخصات جریان مانند سرعت، نرخ جریان و فشار در هر نقطه از مسیر در طول زمان ثابت باشند ولی در جریان گذرا این مشخصات با گذشت زمان تغییر می‌کنند. در تحلیل جریان گذرا، امکان مدل کردن رفتار دو نوع سیال تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر وجود دارد. همچنین اثر تغییرات دما روی رفتار سیال را نیز می‌توان در این حالت بررسی کرد. در الگوریتم تحلیل جریان گذرا با سیال تراکم‌ناپذیر، فرض می‌شود که سیال مورد استفاده تراکم‌ناپذیر بوده و با استفاده از یک فرآیند تکراری در هر گام زمانی سیالی، فشار سیال موجود در درزه بر حجم نواحی منطبق می‌شود تا بدینوسیله از پیوستگی جریان اطمینان حاصل شود [۵].

پیش‌بینی نمود. همچنین با دانستن این مطلب که راستای تشکیل ترک در عملیات شکافت هیدرولیکی عمود بر راستای تنش برجای حداقل است، راستای تشکیل ترک نیز با توجه به این نمودارها قابل پیش‌بینی است. برای مثال در شکل ۶ (الف) که نمودار تنش‌های مماسی در حالت تنش  $K=0/5$  رسم شده است، مقدار حداقل تنش مماسی در دیواره چاه برابر با  $12/5 \text{ MPa}$  است که در راستای عمود بر تنش برجای حداقل (موازی با محور y) قرار دارد. بنابراین می‌توان پیش‌بینی کرد که راستای تشکیل ترک در این مدل موازی با محور y یعنی عمود بر راستای تنش برجای حداقل بوده و فشار لازم برای شروع ترک هم برابر با  $12/5 \text{ MPa}$  است. به همین ترتیب می‌توان برای سایر مدل‌ها، راستای تشکیل ترک و مقدار فشار لازم برای شروع ترک را پیش‌بینی نمود.

با توجه به مطالب گفته شده و نتایج بدست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که هر چند افزایش اختلاف در مقادیر تنش‌های برجا موجب افزایش تمرکز تنش در قسمت‌هایی از دیواره چاه می‌شود، اما در عوض کاهش تنش مماسی حداقل موجود در دیواره را نیز در پی دارد که این موضوع برای عملیات شکافت هیدرولیکی می‌تواند مناسب باشد.

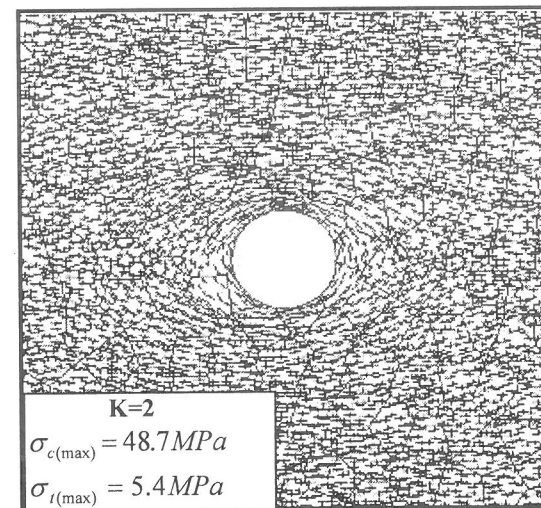
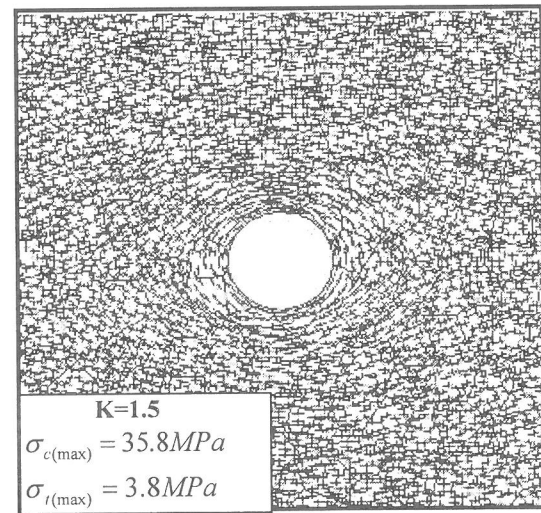
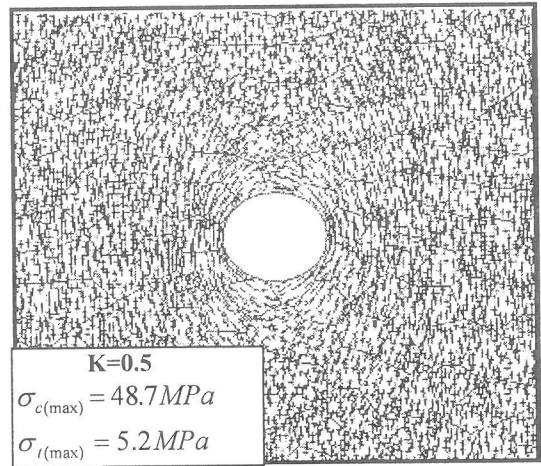
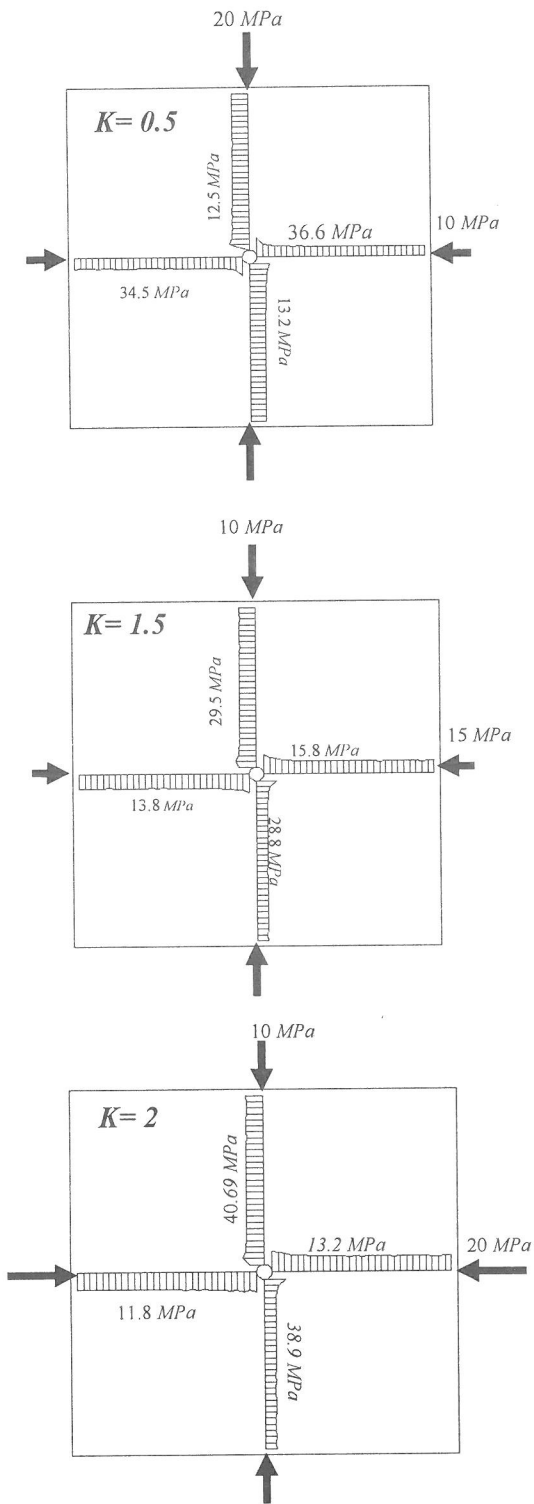
به منظور اعتبارسنجی پاسخ‌های بدست آمده از روش عددی، می‌توان مقادیر تنش بدست آمده از مدل‌ها را با مقادیر محاسبه شده از روابط تحلیلی کرش<sup>۴</sup> مقایسه نمود. بر اساس روابط کرش، برای یک چاه دایره‌ای در محیط بیکران الاستیک ایزوتروپ و تحت شرایط کرنش صفحه‌ای، توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی در مختصات قطبی  $(r, \theta)$ ، طبق روابط (۸)، (۹) و (۱۰) است [۲]:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_h + \sigma_H)(1 - a^2/r^2) + \frac{1}{2}(\sigma_h - \sigma_H)(1 - 4a^2/r^2 + 3a^4/r^4) \cos 2\theta + P_f a^2/r^2 \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_h + \sigma_H)(1 + a^2/r^2) - \frac{1}{2}(\sigma_h - \sigma_H)(1 + 3a^4/r^4) \cos 2\theta - P_f a^2/r^2 \quad (9)$$

$$\tau_{r,\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_h + \sigma_H)(1 + 2a^2/r^2 - 3a^4/r^4) \sin 2\theta \quad (10)$$

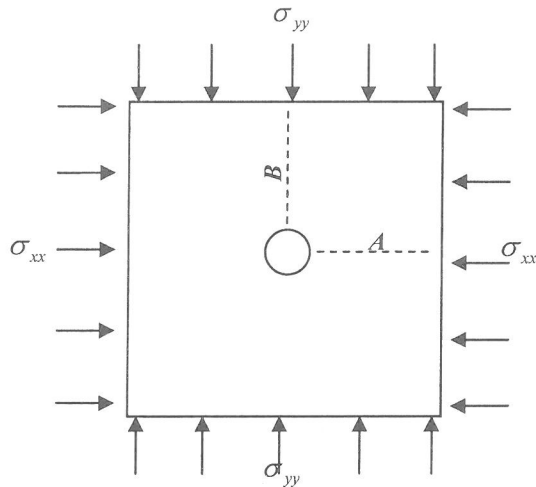
در روابط آورده شده، a شعاع چاه، r فاصله شعاعی نقطه موردنظر از مرکز چاه، و  $\theta$  زاویه بین امتداد  $\sigma_H$  و امتداد



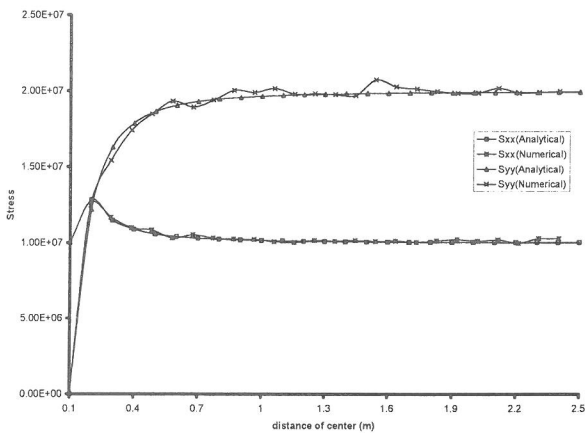
شکل (۶): نمودار تنش‌های مماسی در اطراف چاه در شرایط مختلف تنش برجا

شکل (۵): نمایش وضعیت مولفه‌های تنش در اطراف چاه در شرایط تنش‌های بر جای مختلف

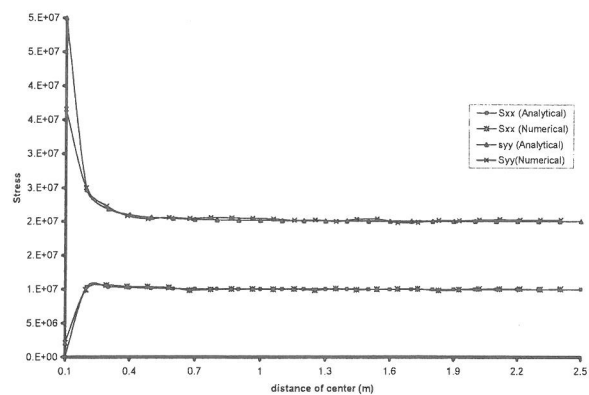




شکل (۷): نمایش خطوط A و B برای مقایسه تنش‌های بدست آمده از روش عددی با روش تحلیلی کرش

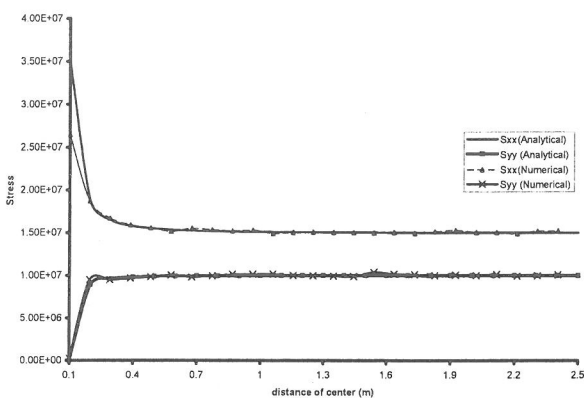


ب- خط B

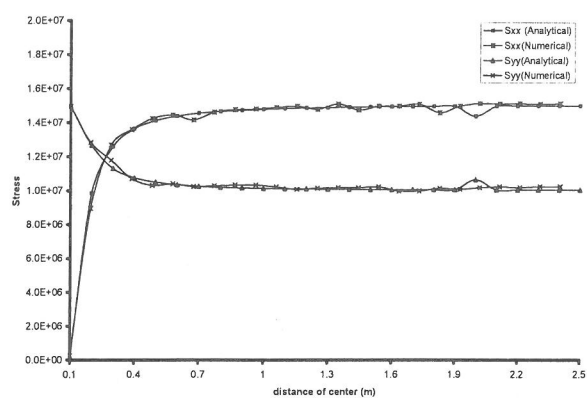


الف- خط A

شکل (۸): مقایسه تنش‌های بدست آمده از روش عددی با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی کرش در حالت تنش  $K=0/5$  بر روی الف- خط موازی محور x و ب- خط B موازی محور y

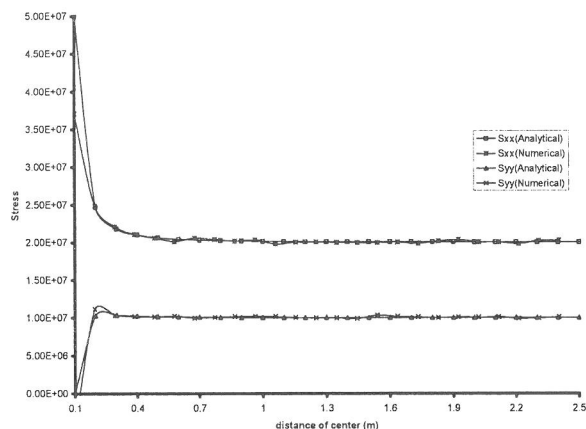


ب- خط B

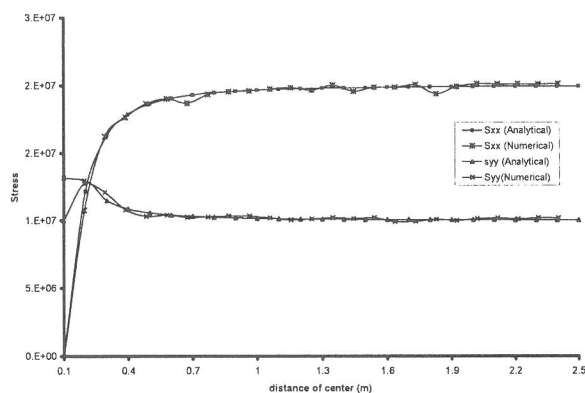


الف- خط A

شکل (۹): مقایسه تنش‌های بدست آمده از روش عددی با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی کرش در حالت تنش  $K=1/5$  بر روی الف- خط موازی محور x و ب- خط B موازی محور y



ب- خط B



الف- خط A

شکل (۱۰): مقایسه تنش‌های بدست آمده از روش عددی با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی کرش در حالت تنش  $K=2$ ، روی الف- خط A موازی محور x و ب- خط B موازی محور y

جدول (۴): مشخصات سیال شکست

مشخصات سیال شکست	مقدار	واحد
دانسیته	۱۰۰۰	$\text{Kg} / \text{m}^3$
ویسکوزیته دینامیک	۰/۰۰۱	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
ضریب نفوذپذیری	۸۲/۳	$\text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
نرخ جریان	۰/۱	$\text{m}^3/\text{s}$

### روند تشکیل ترک

روند تشکیل ترک در مدل‌ها به این ترتیب است که سیال پس از ورود به داخل چاه، با انتشار در شبکه ناپیوستگی‌های موجود در مدل، موجب بالا رفتن فشار حفره‌ای و تغییر شکل مکانیکی درزه‌ها و بلوک‌ها می‌شود. تغییرات فشار در درزه‌ها با عواملی همچون بازشدگی درزه، نرخ جریان، مدت زمان پمپاژ و فاکتور نفوذپذیری سیال کنترل می‌شود. بازشدگی درزه‌ها نیز تحت تاثیر فشار سیال و میزان و جهت تنش‌های برجا است به طوری که هر چه تنش نرمال وارد بر درزه بزرگتر باشد، میزان بازشدگی آن کمتر خواهد بود. در نتیجه جریان سیال در درزه‌هایی که راستای آنها عمود بر راستای تنش حداکثر است کمتر و برعکس در درزه‌های با راستای عمود بر تنش بر جای حداقل (موازی با تنش حداکثر) بیشتر خواهد بود. بنابراین فشار سیال در درزه‌های عمود بر تنش حداقل، با سرعت بیشتری افزایش یافته و در نتیجه جدایش بلوک‌ها و یا به عبارت دیگر ایجاد ترک در این راستا (راستای عمود بر تنش حداقل) رخ می‌دهد.

با توجه به اینکه در فرآیند شکافت هیدرولیکی، سیال با نرخ مشخصی به داخل طبقات سنگی پمپاژ می‌شود و سپس با ثبت و بررسی منحنی فشار- زمان، مشخصات ترک ایجاد شده مورد بررسی قرار می‌گیرد، در این تحقیق نیز تلاش شد تا شرایط حتی‌الامکان مشابه با واقعیت شبیه‌سازی شوند.

برای استفاده از قابلیت روش تحلیل جریان گذرا در مدل کردن زمان واقعی در تحلیل مساله، نرخ جریان ثابتی به درون چاه اعمال شده و سپس تغییرات فشار در نقاط مختلف مدل و در طول زمان پمپاژ، مورد بررسی قرار گرفته است تا زمانی‌که ترک در مدل تشکیل شده و به طور کامل دیده شود.

معمولاً در آغاز عملیات شکافت هیدرولیکی، از سیالی با ویسکوزیته کم تحت عنوان سیال پیش‌تزریق، جهت ایجاد ترک استفاده می‌شود. آب متداول‌ترین سیالی است که بدین منظور استفاده می‌شود زیرا هم از نظر مشخصات هیدرولیکی دارای ویژگی‌های مناسبی بوده و هم در همه‌جا به مقدار فراوان و اقتصادی در دسترس می‌باشد [۹]. در این تحقیق نیز ضمن استفاده از الگوریتم جریان گذرا با سیال تراکم‌ناپذیر، از آب به عنوان سیال شکست استفاده شده است. برخی از مشخصات آب مورد استفاده در مدل‌سازی، در جدول ۴ آورده شده است. عملیات شبیه‌سازی، با پمپاژ آب با نرخ ثابت  $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$  به داخل چاه و با گام‌های زمانی سیالی برابر با ۳۰ ثانیه تا زمان تشکیل ترک ادامه یافته و تغییرات فشار حفره‌ای و نرخ جریان در مدل‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

شده است (جدول ۲)، بازشدگی  $0/5$  میلی‌متر برابر با بازشدگی درزه در حالت تنش نرمال صفر است. به عبارت دیگر زمانی درزه‌ها به بازشدگی  $0/5$  میلی‌متر می‌رسند که فشار سیال موجود در آنها با تنش نرمال وارد بر سطوح درزه برابر شده باشد.

چگونگی تشکیل و توسعه ترک برای حالت تنش  $K=0/5$  در شکل (۱۱) نشان داده شده است. در این شکل بازشدگی درزه‌ها (حداقل برابر با  $0/5$  میلی‌متر) پس از گذشت مدت زمان‌هایی برابر با  $540$ ،  $1020$ ،  $1500$  و  $1770$  ثانیه پس از شروع تزریق سیال، به نمایش در آمده‌است. همانگونه که در شکل (۱۱) الف دیده می‌شود، پس از گذشت  $540$  ثانیه از زمان پمپاژ، تشکیل ترک در دیواره چاه و در راستای عمود بر تنش حداقل، آغاز شده و با گذشت زمان، هم بر بازشدگی آن افزوده می‌شود و هم به سمت جلو گسترش می‌یابد به‌طوری‌که پس از گذشت  $1770$  ثانیه (شکل (۱۰) ب) بازشدگی ترک به مقدار  $2/6$  میلی‌متر رسیده و تا فاصله  $2$  متری از لبه چاه و در هر دو طرف آن گسترش یافته است. برای سایر حالات تنش نیز روند مشابهی وجود دارد با این تفاوت که بسته به وضعیت تنش‌های برجا، راستای تشکیل ترک و سرعت گسترش آن در هر مدل متفاوت است.

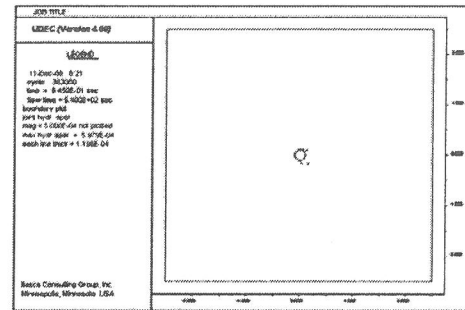
#### ع-۱- راستای تشکیل ترک

در شکل (۱۲)، راستای تشکیل ترک در شرایط مختلف تنش برجا نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، نتایج بدست آمده از مدل‌سازی به خوبی نشان می‌دهند که راستای تشکیل ترک از وضعیت تنش‌های برجا تبعیت می‌کند به این صورت که پیشروی ترک در جهت عمود بر راستای تنش بر جای حداقل می‌باشد.

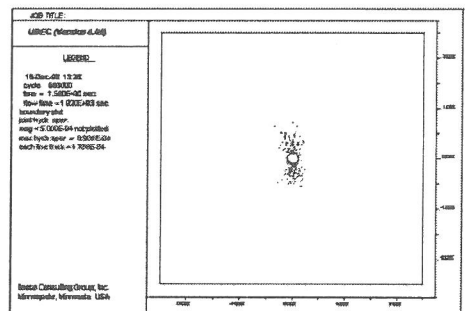
در شکل (۱۳) نیز با استفاده از بردارهای جابجایی، راستای ترک در سه حالت تنش بر جای مورد بررسی، نشان داده شده است.

#### ع-۲- مشخصات ترک

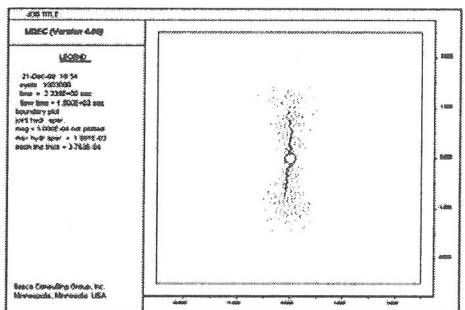
برای مقایسه مشخصات ترک در شرایط مختلف تنش برجا، می‌توان وضعیت بازشدگی ترک، فشار حفره‌ای و نرخ جریان در مدل‌ها را پس از پمپاژ سیال به مدت زمان معینی مورد بررسی قرار داد. بدین منظور، این پارامترها پس از پمپاژ سیال به مدت  $1920$  ثانیه بررسی شده‌اند. با توجه به اینکه حداکثر بازشدگی درزه در مدل‌ها مربوط به ترک بوده و حداکثر فشار حفره‌ای و حداکثر نرخ جریان هم مربوط به سیال داخل ترک است، لذا با مقایسه این پارامترها می‌توان وضعیت ترک در سه



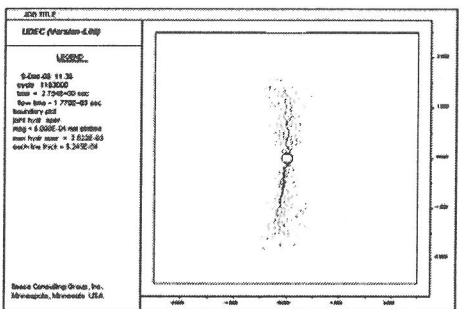
الف- زمان جریان سیال برابر با  $540$  ثانیه



ب- زمان جریان سیال برابر با  $1020$  ثانیه



ج- زمان جریان سیال برابر با  $1500$  ثانیه



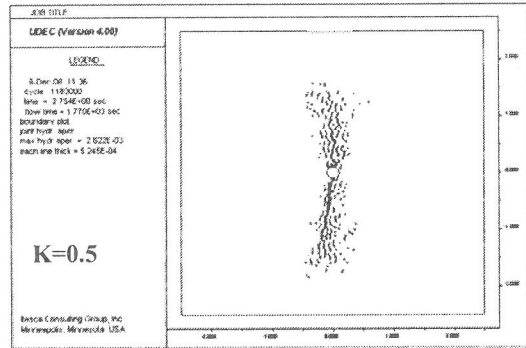
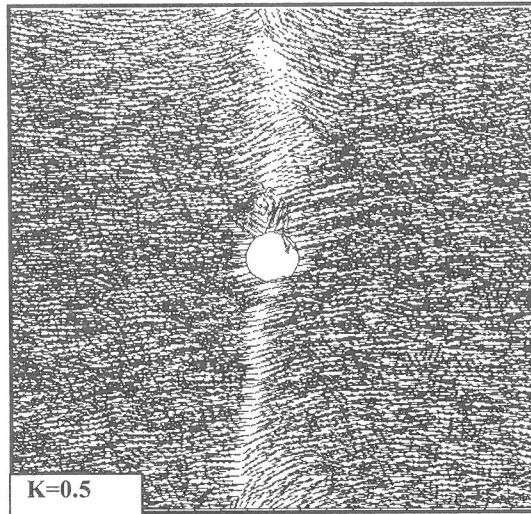
د- زمان جریان سیال برابر با  $1770$  ثانیه

شکل (۱۱): نمایش روند ایجاد و توسعه ترک در مدل با حالت تنش  $K=0/5$  در مدت زمان‌های مختلف پس از پمپاژ سیال: (الف) پس از  $540$  ثانیه، (ب) پس از  $1020$  ثانیه، (ج) پس از  $1500$  ثانیه و (د) پس از  $1770$  ثانیه

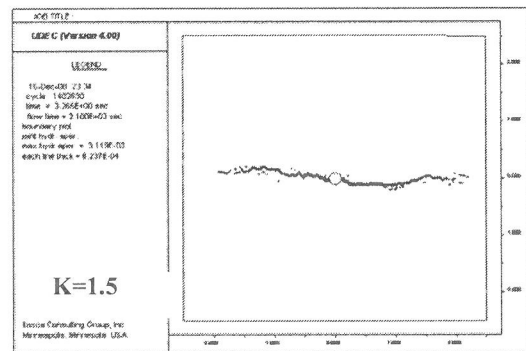
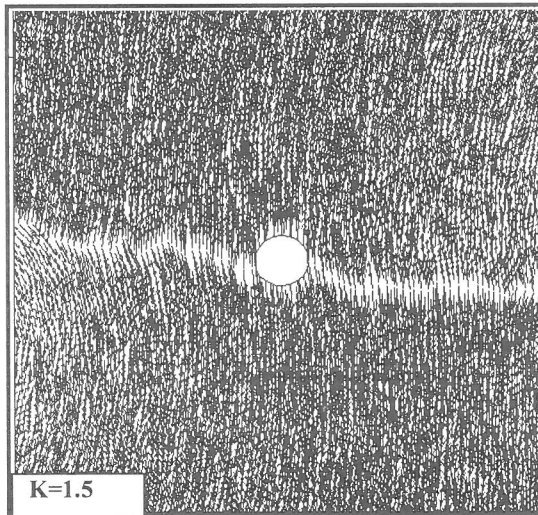
معیار تشکیل ترک در مدل‌های مورد بررسی، بازشدگی درزه‌ها به مقدار حداقل  $0/5$  میلی‌متر در نظر گرفته شده است زیرا با توجه به مشخصاتی که در مدل‌ها برای درزه‌ها تعریف



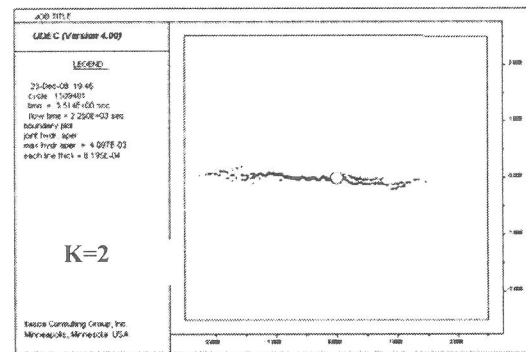
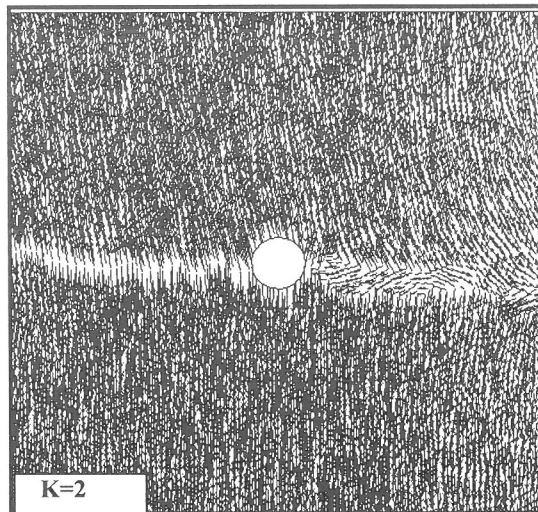
مدل مورد بررسی را با یکدیگر مقایسه نمود. نتایج این سه مدل در جدول ۵ آمده است.



(الف)



(ب)



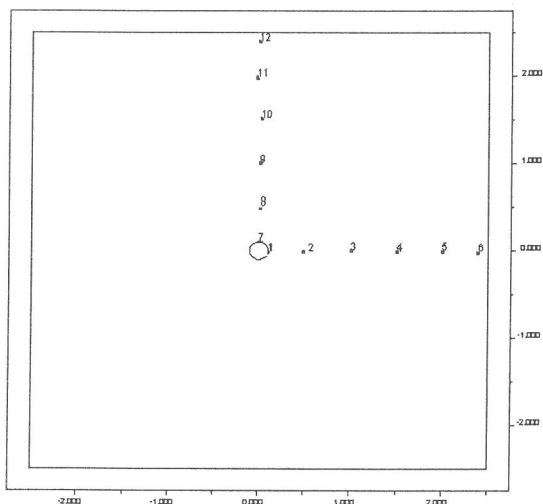
(ج)

شکل (۱۲): نمایش امتداد ترک در شرایط مختلف تنش برجا

شکل (۱۳): نمایش امتداد ترک در شرایط مختلف تنش برجا با استفاده از بردارهای جابجایی

در شکل (۱۴) که در سه حالت تنش مورد بررسی در امتداد ترک قرار می‌گیرند، در شکل‌های (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) نمایش داده شده است. همان‌گونه که در این شکل‌ها دیده می‌شود، با افزایش زمان پمپاژ، فشار سیال در این نقاط بالا می‌رود. این روند نشان دهنده توسعه ترک و افزایش طول آن است، زیرا انتظار می‌رود با افزایش طول ترک، فشار لازم برای گسترش آن افزایش یابد.

همچنین، فشار سیال در نقاط مختلف با فاصله گرفتن از دیواره چاه کاهش می‌یابد.



شکل (۱۴): نمایش محل قرارگیری نقاط رفتارنگاری فشار سیال در طول زمان

با مقایسه این نتایج، دیده می‌شود که با افزایش اختلاف بین تنش‌های برجا، مشخصات ترک مانند بازشدگی و نرخ جریان عبوری از آن ارتقاء می‌یابد. بدترین وضعیت ترک مربوط به حالت تنش  $K=1/5$  است که حداکثر بازشدگی ترک در این مدل برابر با  $2/376$  میلی‌متر و حداکثر نرخ جریان عبوری از ترک برابر با  $2/703 \text{ m}^3/\text{s}$  است. در مقابل بهترین وضعیت هم مربوط به ترک‌های تشکیل شده در حالت‌های تنش  $K=0/5$  و  $K=2$  است که بازشدگی آنها به ترتیب برابر با  $2/086$  و  $2/957$  میلی‌متر و حداکثر نرخ جریان عبوری از آنها نیز به ترتیب برابر با  $3/035 \text{ m}^3/\text{s}$  و  $3/45 \text{ m}^3/\text{s}$  است.

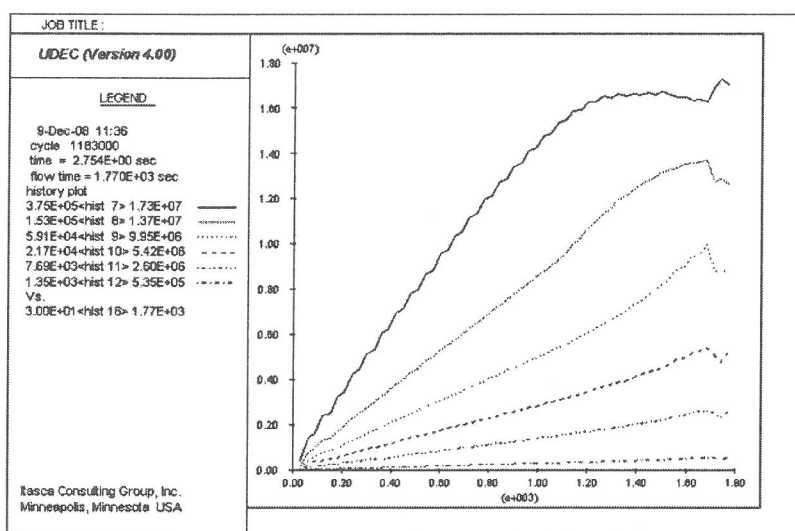
جدول (۵): مشخصات ترک در شرایط مختلف تنش برجا

حالت تنش	زمان پمپاژ (S)	حداکثر بازشدگی (mm)	حداکثر نرخ جریان (m <sup>3</sup> /s)	حداکثر فشار حفره‌ای (MPa)
$K=0/5$	۱۹۲۰	۲/۰۸۶	۲/۴۵	۱۶/۴۴
$K=1/5$	۱۹۲۰	۲/۳۷۶	۲/۷۰۳	۱۶/۰۱
$K=2$	۱۹۲۰	۲/۹۵۷	۳/۰۳۵	۱۶/۲۱

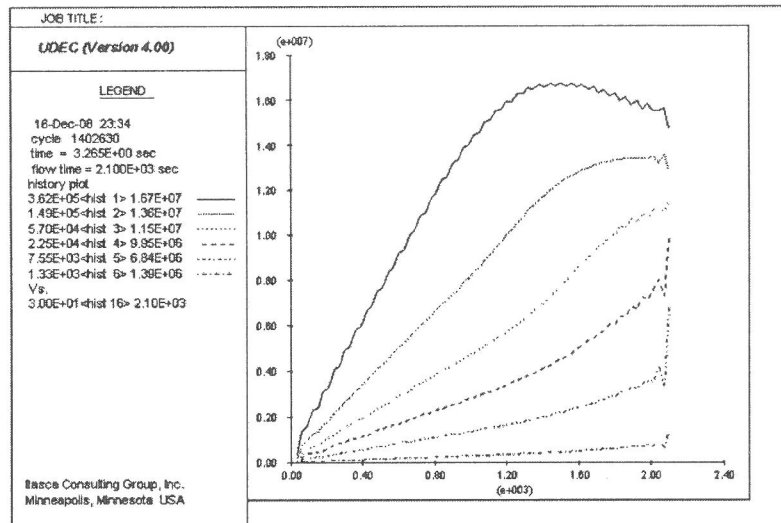
### ۳-۴- منحنی فشار- زمان سیال

برای بررسی دقیق‌تر رفتار سیال، تغییرات فشار سیال در برخی نقاط مدل در طول زمان پمپاژ، مطالعه شده است. برای این منظور ۱۲ نقطه در مدل انتخاب شده که منحنی فشار- زمان آنها در طول زمان پمپاژ رسم شده است. این نقاط که در شکل (۱۴) دیده می‌شوند به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که در شرایط مختلف تنش مورد مطالعه، در راستای ترک و راستای عمود بر آن قرار گیرند.

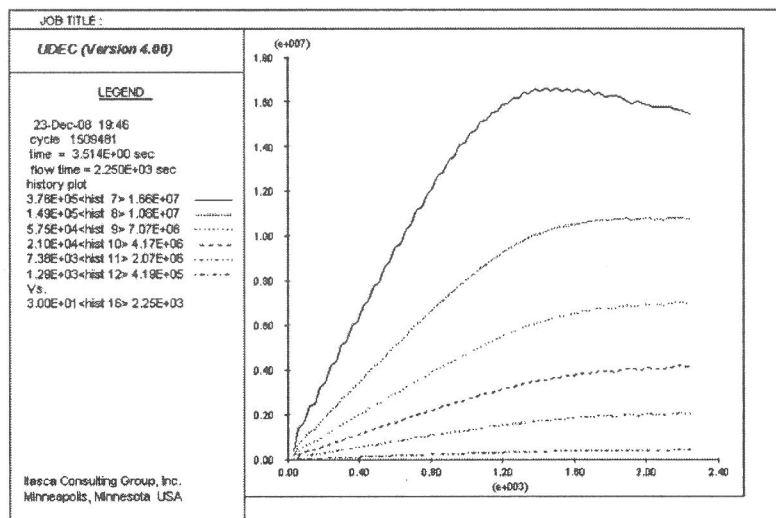
منحنی فشار- زمان برای آن دسته از نقاط مشخص شده



شکل (۱۵): روند تغییرات فشار به عنوان تابعی از زمان برای حالت تنش  $K=0/5$  در نقاط ۷ تا ۱۲.



شکل (۱۶): روند تغییرات فشار به عنوان تابعی از زمان برای حالت تنش  $K=1/5$  در نقاط ۱ تا ۶



شکل (۱۷): روند تغییرات فشار به عنوان تابعی از زمان برای حالت تنش  $K=2$  در نقاط ۱ تا ۶

## ۵- نتیجه

در این تحقیق از قابلیت‌های نرم‌افزار UDEC 4.0 در تحلیل هیدرومکانیکی و بررسی اندرکنش بین جریان سیال و سنگ، برای شبیه‌سازی فرآیند شکافت هیدرولیکی استفاده شد.

نتایج بدست آمده از عملیات شبیه‌سازی عددی، تشکیل ترک در امتداد عمود بر تنش بر جای حداقل را به خوبی نشان داد به گونه‌ای که در حالت‌های تنش  $K=0/5$ ،  $K=1/5$  و  $K=2$  ترک در امتداد عمود بر تنش بر جای حداقل تشکیل شد.

از نتایج بدست آمده در حالت‌های مختلف تنش برجا، مشخص شد که با افزایش اختلاف بین مقدار تنش‌های برجا، مشخصات هیدرولیکی ترک مانند بازشدگی و نرخ جریان

عبوری از آن بهبود می‌یابند و بر عکس هرچه مقدار تنش‌های برجا به هم نزدیک‌تر باشند، تشکیل ترک مشکل‌تر و مشخصات هیدرولیکی مربوط به آن ضعیف‌تر می‌شوند.

## ۶- تقدیر و تشکر

تهیه‌کنندگان این مقاله بدینوسیله تشکر و سپاس فراوان خود را از مسئولین محترم مرکز محاسبات سریع دانشگاه تهران بویژه جناب آقای دکتر سهیل محمدی ریاست آن مرکز که با همکاری صمیمانه‌شان کمک شایانی در انجام این تحقیق داشتند، اعلام می‌دارند.

## ۷- مراجع

- Baker Hughes INTEQ, "Petroleum geology", Houston, 1999. [۶]
- Allen A., Thomas O., "Production operation" Vol. 2, Oil & Gas Consultants International, 1993. [۱]
- Stephen D., "Discontinuity analysis for rock engineering", Chapman & Hall, 1993. [۷]
- Amadei B., Stephansson O., "Rock stress and its measurement", Chapman & Hall, 1997. [۲]
- Zhang X., Last N., Powrie W., Harkness R., "Numerical modelling of wellbore behaviour in fractured rock masses", Journal of Petroleum Science and Engineering, 23, 1999: PP 95-115. [۸]
- Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J., "Computer simulation of hydraulic fractures", International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences 44, 2007: PP 739-757. [۳]
- Howard G.C., Fast C. R., "Hydraulic fracturing", Volume 2, SPE, 1970. [۹]
- Zhang X., David J., "Numerical modeling and analysis of fluid and deformation of fractured rock mass", Elsevier Science, 2002. [۴]
- UDEC Theory Manual, Version 4.0 ocumentation. [۵]

## ۸- زیر نویس ها

- ۱ Pad
- ۲ Propant
- ۳ Mohr-coulomb
- ۴ Kirsch

