# کنترل نقص روش رونگ_کوتا با استفاده از درونیابی

سید محمد حسینی[i]؛ محبوبه صمصامی[ii]

## چکیده

جستجوی روشی معتبر برای حل مسائل مقدار اولیه از معادلات دیفرانسیل معمولی یکی از مسائل مهم و پرکاربرد در آنالیز عددی به شمار می‌رود. نداشتن روش، عاملی برای محدود شدن مسائل مقدار اولیه مرتبه یک می‌شود. هر معادله دیفرانسیل مرتبه m را به راحتی می‌توان به یک دستگاه معادلات مرتبه یک تبدیل نمود. روشی که در این مقاله برای حل اینگونه مسائل مورد تحلیل قرار می‌گیرد، روش رونگ_کوتای پیوسته می‌باشد، به طوری که تلفیق روش گسسته رونگ_کوتا همراه با درونیاب هرمیت بیرکهف عامل نیل به جواب تقریبی پیوسته می‌باشد. همچنین استفاده از کنترل خطای نقص (defect) و اندکی تغییر در به کارگیری درونیاب ها، دستیابی به روشی که تقریبا مستقل از مسأله عمل می‌کند را آسان می‌نماید. همین امر این امکان را فراهم می سازد که مستقل از نوع معادله مورد بحث بتوان تخمین معتبر و موضعی از خطا را محاسبه نموده و از آن در تعیین طول گام متغیر در روش های تطبیقی (adaptive) استفاده نمود. تحلیل خطا در بخش نتایج عددی جزئیات بحث یاد شده را روشن می‌سازد.

## کلمات کلیدی

مسئله مقدار اولیه، روش رونگ_کوتا، درونیاب هرمیت بیرکف، کنترل خطا، روش انطباقی

# *Defect Control for RK-methods using Computed Interpolation*

S. M. Hosseini; M. Samsami

***ABSTRACT***

The quest for reliable integration of initial value problems (IVPs) for ordinary differential equations (ODEs) is an important and popular topic in numerical analysis. We limit ourselves to the first order initial value problems because we can change each $m^{th}$ order differential equation to a system of first order differential equations. The class of methods we address in this paper is the class of continuous Runge-Kutta methods (CRKs), that combines discrete Runge-Kutta methods with Hermite-Birkhoff interpolation and gives us the continuous approximate solution. In this situation, by using the defect error to control error and some changes in the base of interpolations, we can derive a method that is almost independent of the problem integrated. This makes it possible for us to have an accurate and local estimation of the error independent of the equation, when we can further use it in determining variable step-size in adaptive methods. The error analysis in numerical results clarifies the details of this issue.

***KEYWORDS***

Initial value problems, Runge–Kutta methods, Hermite-Birkhoff interpolation, Defect Error Control, Adaptive Methods

[i] استاد بخش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، کد پستی ۱۷۵ - ۱۴۱۱۵ : hossei_m@modares.ac.ir.

[ii] کارشناسی ارشد، دانشکده علوم پایه، بخش ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس: m0samsami@yahoo.com.

## ۱- مقدمه

با توجه به پیشرفت ابزارهای محاسباتی و افزایش دقت در محاسبات، می‌توان استفاده از روش های گسسته سازی را در حل مسائل مقدار اولیه به فرم:

$$y' = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

بسیار موفق شمرد. در این میان استفاده از روش های رونگ_کوتای صریح بخصوص از مراتب همگرایی بالا مورد توجه قرار گرفته است. اما در بسیاری از کاربردها مانند اقتصاد، هواشناسی و مهندسی، یافتن یک تقریب پیوستهٔ عددی مورد نیاز است. بدین منظور ایده استفاده از درونیابی روی مقادیر گسسته روش رونگ_کوتا برای اولین بار در سال ۱۹۸۶ توسط انرایت (Enright) مطرح شد و از آن به بعد گسترش روش‌های رونگ_کوتای پیوسته مورد توجه قرار گرفت. استفاده از درونیاب های هرمیت و هرمیت بیرکف به صورت قطعه ای در هر زیر بازهٔ روش رونگ_کوتا موجب می‌شود که تنها با اضافه کردن چند ارزیابی اضافی برای f به یک تقریب پیوسته و همرتبه با مقادیر گسسته دست یافت که در بخش دوم به چگونگی روند این محاسبات پرداخته می‌شود. در بسیاری از روش ها کنترل خطا به یکی از دو طریقِ تغییر مرتبه و یا تغییر طول گام امکان پذیر است اما به سادگی می‌توان نشان داد که در بعضی مواقع این راهبرد فریب دهنده خواهد بود، پس به منظور رفع چنین مشکلی، کنترل خطای نقص در بخش سوم مطرح و بررسی می‌شود. از طرف دیگر در این بخش با اضافه کردن تغییرات پایانی در محاسبه درونیاب، روشی که به میزان نزدیک مستقل از مسأله است پیدا می‌شود. برتری این استقلال نسبی در به کارگیری و کنترل خطای روش‌های انطباقی دیده می‌شود، (به طوری که روشِ مطرح شده در کل به صورت یک روش پویا و انطباقی بررسی می‌شود) که در کارآمد نمودن برنامه های موجود یاری می‌نماید، به طوری که هر کاربر بدون داشتن اطلاعات دقیق از مسأله و روش می‌تواند با انتخاب حداکثر کران خطا (tolerance) به حل مسأله خود بپردازد. تمامی نتایج عددی نشان داده شده در بخش چهارم با نرم افزار Matlab پیاده سازی شده اند.

## ۲- روش رونگ_کوتا

### ۲-۱- روش رونگ_کوتای گسسته

در این تحقیق از روش رونگ_کوتای صریح به عنوان پایهٔ روش استفاده می‌شود به طوری که روش s مرحله ای (stage) مرتبه p رونگ_کوتا دارای ساختار رابطه ۱ می‌باشد:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i, \\ f_i &= f\Big(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f_j\Big). \qquad (1) \\ i &= 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

در رابطه ۱ ، ضرایب $a_{ij}, b_i, c_i$ اعداد ثابتی هستند که با توجه به مرتبهٔ روش و کارایی آن اختیار می‌شوند. بوچر (Butcher) و هیرر (Hairer) با توجه به ارتباط بین دیفرانسیل های مقدماتی و درخت های ریشه، روشی بسیار کارآمد و ساده برای بدست آوردن این ضرایب ارائه داده اند. حال اگر از روش رونگ_کوتا با طول گام ثابت (h) استفاده شود محاسبات بسیار عالی و سریع صورت می گیرد اما در کل روش های معتبری نخواهند بود، چون استفاده کننده از روش، باید اطلاعات و جزئیات زیادی از مسأله و روش بدست آورد تا به دقت مطلوب در جواب گسسته دست یابد. از طرفی این امکان وجود دارد که طول گام ثابت آنقدر کوچک اختیار شود که از سرعت همگرایی بکاهد و یا حتی طول گام ثابت طوری بزرگ اختیار شود که محاسبات غیر پایداری بدست آمده و نتیجه مطلوب بدست نیاید که برای رفع این مشکل پس از اینکه روش-های پویا مطرح شدند، در سال ۱۹۷۸ ایدهٔ استفاده از طول گام متغیر در روش های رونگ_کوتا به ذهن رسید. در این حالت باید در هر مرحله، تخمینی مجانبی و معتبر از خطا را بدست آورد و با توجه به کنترل آن، طول گام جدید را مشخص نمود.

اگر فرض شود $y_i(x)$ جواب دقیق موضعی معادله دیفرانسیل در گام i ام باشد یعنی:

$$y_i'(x) = f(x, y_i(x)) \qquad y_i(x_i) = y_i \qquad (۲)$$

که $y_i$ جواب تقریبی در گام i ام است، در آن صورت خطای موضعی (local) به فرم رابطه ۳ تعریف می‌گردد:

$$l_{e_i} = y_i(x_{i+1}) - y_{i+1} \qquad (۳)$$

از طرف دیگر اگر فرض شود $y(x)$ جواب واقعی مسألهٔ مقدار اولیه باشد، خطای سراسری (global) مربوط به آن تا مرحله i ام هم به فرم رابطه ۴ نمایش داده می‌شود:

$$g_{e_{i+1}} = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_i(x_{i+1}) + l_{e_i} \qquad (۴)$$

حال با توجه به اینکه جواب دقیق در طول مسیر انتگرال گیری در دسترس نیست و همچنین از آنجا که طبق ارتباط نشان داده شده بین خطای موضعی و سراسری در رابطه (۴) کنترل خطای موضعی نیز موجب کنترل خطای سراسری خواهد شد، به کنترل خطای موضعی پرداخته می‌شود. در مورد

استفاده از خانواده رونگ_کوتا، از یک جفت فرمول با دو مرتبه مختلف استفاده کرده و بدین وسیله خطای موضعی را تخمین می‌زنند. در این میان به منظور افزایش کارایی روش رونگ_کوتا، برای اولین بار مرسن (Merson) ایده استفاده روش های درهم نشانده شده (embedded) را مطرح کرد.

روش های درهم نشانده شده بر این اساس هستند که یک روش رونگ_کوتای مرتبه $q$ را از روی یک روش رونگ_کوتای مرتبه $p$ با فرض $q>p$ طوری استخراج می‌شوند که با استفاده از دو تقریب $y_i$ (از مرتبه $p$) و $\widetilde{y}_i$ (از مرتبه $q$) برای جواب گام i ام، تخمینی موضعی از خطای فرمول مرتبه پایین حساب گردد. در بیشتر فرمول های متداول $q=p+1$ می‌باشد. در این حالت بسیاری از ضرایب دو روش مشترک خواهد بود، در نتیجه برتری استفاده از فرمول های درهم نشانده شده این است که مشترک گرفتن $f_i$ها محاسبات را در هر گام کاهش داده و حتی ذخیره اطلاعات را نیز آسان می‌سازد. در ادامه از فرمول های درهم نشانده شده استفاده می‌شود.

همان طور که گفته شد، راه کلی روش‌های انطباقی این است که با یک طول گام اولیه شروع کرده، سپس در هر گام تخمین دقیقی از خطا (مانند $\Delta$) را محاسبه نموده، سپس با توجه به $p$، مرتبه روش $s$ مرحله ای رونگ_کوتا و با توجه به دقت خواسته شده کاربر، $h$ جدید را تخمین می‌زند:

$$h_{new}=h_{old}\left(\nu\frac{tol}{\Delta}\right)^{\frac{1}{p+1}} \qquad (۵)$$

$\nu$ ضریب ثابتی است که همواره $1>\nu>0$ بوده و به منظور کاهش احتمال بازگشت $h_{new}$ در نظر گرفته می‌شود.

طبق رابطه (۵) دیده می‌شود که تعیین دقیق $\Delta$ در هر زیر بازه بسیار مهم است. در حالت گسسته از خطای موضعی ای که از فرمول های درهم نشانده شده بدست آورده می‌شود استفاده می‌شود اما وقتی از درونیاب استفاده می‌شود، کنترل خطا متفاوت خواهد بود که در حالت پیوسته، بیشتر به آن پرداخته می‌شود.

## ۲-۲- روش رونگ_کوتای پیوسته

با توجه به بخش قبل و طبق روش گسسته رونگ_کوتا می‌توان مقادیر تابع را در تعداد متناهی نقطه بدست آورد که استفاده از درونیابی روی مقادیر گسسته یکی از روش های موجود در بدست آوردن تقریب پیوسته است، اما از آنجا که محاسبه خطای سراسری برای درونیابی سراسری در انتهای بازه انتگرال گیری چندان مطلوب نیست پس تلاش می‌شود از درونیاب های قطعه ای و کنترل خطای موضعی طوری استفاده گردد که در پایان یک توسیع پیوسته و از دسته $C^1[a,b]$ همراه با دقت مطلوب داشت. در طول این بخش فرض بر این است که از فرمول های درهم نشانده شدهٔ رونگ_کوتا از مرتبه $(p,p+1)$ استفاده می‌شود.

هدف، بدست آوردن یک روند کلی برای ساختن دنباله ای از چندجمله های هموار و از مرتبه $p$ و $p+1$ مانند $z_n^p$ و $z_n^{p+1}$ در گام n ام است که مقادیر $y_n$ در $x_n$ و همچنین $y_{n+1}$ در $x_{n+1}$ را درونیابی کنند و تقریبی برای $y_n(x)$ در طول بازه $[x_n,x_{n+1}]$ باشند. در نتیجه، این دنباله از درونیاب های قطعه ای و مشتق پذیر یک تقریب پیوسته در کل بازه $[a,b]$ را تشکیل می‌دهند.

### ۲-۲-۱ الگوریتم یافتن درونیاب

**گام اول:** در آغاز تنها از مقادیر $y_n$ و $y_{n+1}$ و همچنین $f_1^{n+1},f_s,...,f_1$ استفاده می‌گردد تا یک درونیاب مانند $u_0$ از بالاترین مرتبه ممکن مثلا $q$ بدست آورد. ( $f_1^{n+1}$ همان مقدار $f(x_{n+1},y_{n+1})$ است) البته می‌توان از مقادیر اضافی $y$ در نقاط میانی بازه $[x_n,x_{n+1}]$ که از ترکیب خطی اطلاعات موجود بدست می‌آیند هم، استفاده کرد. با وجود اینکه می‌توان از درونیاب های مختلف استفاده کرد، اما چون از چندجمله ای هرمیت مکعبی $\vartheta$ که در شرایط

$$\begin{aligned} \vartheta(x_n) &= y_n & \vartheta(x_{n+1}) &= y_{n+1}, \\ \vartheta'(x_n) &= f_1 & \vartheta'(x_{n+1}) &= f_1^{n+1}. \end{aligned} \qquad (۶)$$

صدق می‌کند برای آغاز کار استفاده می‌شوند پس $q=\min(3,p+1)$ خواهد بود. اگر $q=p+1$ آنگاه کار تمام شده است و می‌توان هردوی $z_n^p$ و $z_n^{p+1}$ را برابر با $u_0$ در نظر گرفت. اگر $p=q$ آنگاه $z_n^p:=u_0$ و به گام سوم رفته، در غیر این صورت به گام دوم بازگشت داده می‌شود.

**گام دوم:** برای $i=1,...,p-q$ مقادیر $\tau_{ij}\in(0,1)$ را به ازای $j=1,...,q+i-4$ طوری انتخاب می‌شود که چندجمله ای منحصربفرد $u_i$ از درجه $q+i-1$ وجود داشته باشد و در شرایط درونیابی هرمیت بیرکهف، طبق رابطه ۷ صدق کند:

$$\begin{aligned} &u_i(x_n) = y_n \qquad u_i(x_{n+1}) = y_{n+1}, \\ &u_i'(x_n) = f_1 \qquad u_i'(x_{n+1}) = f_1^{n+1}, \\ &u_i'(x_n+\tau_{ij}h_n) = f_{ij} = f(x_n+\tau_{ij}h_n, u_{i-1}(x_n+\tau_{ij}h_n)). \end{aligned} \qquad (۷)$$

می‌توان با استقراء روی $i$ نشان داد که $u_i$ تقریبی از مرتبه $q+i$ برای $y_n(x)$ خواهد بود. بنابراین قرار داده می‌شود $z_n^p := u_{p-q}$ و پس از تعیین $z_n^p$ به گام سوم برگشت داده می‌شود.

**گام سوم:** اگر $p=q$ با $u_0$ از گام اول و یا اگر $p>q$ باشد با $u_{p-q}$ که از گام دوم بدست آمده است، گام سوم آغاز می‌گردد. حال نقاط $\tau_{p-q+ij}$ را به ازای $j=1,...,p-3$ انتخاب کرده و تنها یکبار قسمت دوم الگوریتم تکرار می‌شود تا به چندجمله ای هرمیت بیرکف $u_{p-q+1}$ و از درجه $p$ که مقدار $y_n(x)$ را در طول بازه $[x_n,x_{n+1}]$ تا مرتبه $p+1$ تقریب می‌زند رسید. در پایان قرار داده می‌شود $z_n^{p+1} := u_{p-q+1}$ .

طبق الگوریتم روشن است که با توجه به اینکه در تشکیل درونیاب هرمیت و هرمیت بیرکف از مقادیر مشتق در نقاط ابتدایی و انتهایی هر زیر بازه استفاده می‌شود، در کل درونیاب بدست آمده که حاصل از ترکیب تمام قطعه درونیاب هاست، از دسته $C^1[a,b]$ می‌باشد.

حال اگر فرم لاگرانژ درونیاب های عنوان شده بیان شود، به ازای درونیاب مرتبه $p$:

$$u(x_n+\tau h_n) = y_n + h_n \sum_{j=1}^{\tilde{s}} b_j(\tau) f_j \qquad (۸)$$

که در واقع $s-\tilde{s}$ تعداد ارزیابی های اضافی f (اضافه بر حالت گسسته) به منظور افزایش مرتبه درونیابی است و همچنین $b_j$ ها نیز چند جمله ای های به فرم:

$$b_j(\tau)=\sum_{k=1}^{p+1}\beta_{jk}\tau^k, \qquad \tau\in[0,1]. \qquad (۹)$$

می‌باشند. گفتنی است که وقتی درونیاب $u$ از مرتبه $p$ را در نظر بگیرید، ضرایب $\beta_{jp+1}$ صفر هستند و به ازای $\tilde{u}$ (درونیاب مرتبه $p+1$) لزوماً صفر نخواهند بود.

اگر چه درجه چندجمله ای های $u$ و $\tilde{u}$ به انتخاب $\{\tau_{ij}\}$ ها بستگی ندارد، اما با توجه به اندازه جمله اصلی خطا در هر دو درونیاب دیده می‌شود که اندازه خطا، معمولا به چگونگی انتخاب این پارامترها بستگی دارد. پس باید آنها را به گونه ای اختیار کرد که هردوی جملات اصلی خطای موضعی در مورد مرتبه‌های $p$ و $p+1$ در کنار هم بهترین نتیجه (کمترین خطای ممکن) را داشته باشند. بعد از بررسی چگونگی انتخاب $\{\tau_{ij}\}$ ها به دنبال معیاری برای تخمین هرچه دقیق تر خطای موضعی به ازای تقریب پیوسته بوده تا از آن به عنوان $(\Delta)$ در محاسبه $h$ متغیر استفاده شود. همین امر موضوع بخش بعد را تشکیل می‌دهد.

## ۳- کنترل خطای defect و بهتر کردن تقریب درونیاب

وقتی از تقریب پیوسته در هر زیر بازه استفاده می‌شود دیگر نمی‌توان از راه قبلی به کنترل خطای موضعی پرداخت، پس به کنترل مستقیم و دقیق خطای نقص (defect) پرداخته می‌شود. تابع خطای نقص ($\delta(t)$) به ازای هر تقریب پیوسته $\tilde{y}(x)$ به فرم رابطه ۱۰ تعریف می‌شود:

$$\delta(x) \doteq \tilde{y}'(x) - f(x,\tilde{y}'(x)) \qquad (۱۰)$$

که در آن $\delta(x)$ تابعی با بعد $n$ و هم بعد با $f$ می‌باشد. ایده استفاده از خطای نقص به منظور کنترل خطا اولین بار در سال ۱۹۸۹ پیشنهاد شد. در حالت کلی $\delta(x)$ تابعی پیچیده از مسأله و الگوریتم عددی می‌باشد و نیز محاسبه ماکسیمم مقدار آن به عنوان معیاری از خطای موضعی، در طول یک گام نوعی سخت و پر هزینه است. به منظور رفع این مشکل، انرایت در مقاله دوم خود در سال ۱۹۸۹ پیشنهاد کرد که برآورد خطا فقط در یک نقطه خاص مانند $\tau^*$ محاسبه گردد. با این ایده، هزینه محاسبه خطا به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد، اما انتخاب چنین نقطه ای که بتواند برآورد دقیقی از ماکسیمم خطا را در یک طول گام نوعی نشان دهد، مدتها مورد توجه بوده است و حتی هنوز هم مورد توجه می‌باشد. می‌توان نشان داد که فرم بسته خطای نقص به ازای هر تقریب پیوستهٔ مرتبه $p$ و هر $x\in[x_n,x_n+h_n]$ و هر $\tau\in[0,1]$ به طوری که $\tau=\frac{x-x_n}{h_n}$ در رابطه ۱۱ صدق می‌کند:

$$\delta(x)=G(\tau)h_n^p+O(h_n^{p+1}), \qquad (۱۱)$$

که در آن:

$$G(\tau)=r_1(\tau)F_1+...+r_k(\tau)F_k.$$

هر $r_j(\tau)$ چند جمله ای از درجه حداکثر $p+1$ است که فقط به روش بستگی دارد و هر $F_j$ دیفرانسیل مقدماتی است که به هر دوی روش و مسأله بستگی دارد.

چون چند جمله ای $G(\tau)$ به ازای گام های مختلف، مسائل و روش های مختلف متفاوت است، انتخاب نقطه ای مانند $\tau^*$ به عنوان یک نقطه ثابت که در آن ماکسیمم خطا اتفاق می‌افتد کار ساده ای نیست. البته بهتر است $\tau^*$ به گونه ای اختیار شود که اثر هر یک از دیفرانسیل های مقدماتی از بین نرود و نیز هیچ کدام از $\|r_j(\tau^*)\|$ ها به طور نسبی از ماکسیمم مقدار خود زیاد

فاصله نگیرند. با توجه به تحلیل بیشتر در نتایج عددی دیده می‌شود که هنوز انتخاب $\tau^*$ با این روش هم نتیجه مطلوب را به ازای برخی مسائل نخواهد داد و بعضی مواقع میزان خطای واقعی بیشتر از آن است که از محاسبه خطا در نقطه $\tau^*$ بدست می‌آید. اما می‌توان با اندکی تغییر در چگونگی محاسبه درونیاب، تابع $\delta(x)$ را طوری بدست آورد که به ازای تمامی مسائل به وسیله مضرب کوچکی از حداکثر کران خطا، کراندار شود و مقدار آن تنها وابسته به روش باشد و تا اندازه ای مستقل از مسأله آغازین گردد. پس به دنبال چنین پیشنهادی، خواهان بهتر کردن درونیابیم.

### ۳-۱- دقیق تر کردن درونیاب

به منظور رفع مشکل موجود در اندازه گیری ماکسیمم خطا و انتخاب $\tau^*$ مناسب و حتی دقیق تر کردن تقریب پیوسته، کافی است یک مرحله به الگوریتم قبل اضافه کنید و گام چهارم را در نظر بگیرید:

**گام چهارم:** پس از اینکه در هر گام، درونیاب بهینه $\widetilde{u}(x)$ را که از مرتبه $p+1$ بوده و دارای خطای نقص مرتبه $p$ است بدست آوردید، می‌توان آن را با درونیاب جدید $V(x)$ (البته با صرف کمی هزینه محاسباتی بیشتر) اصلاح کرد. روند این اصلاح به این صورت است که در گام چهارم تعدادی از $f_j$ ها را با $\widetilde{f}_j$ ها که به فرم:

$$\widetilde{f}_j = f(x_n + \tau_j h_n, \widetilde{u}(x_n + \tau_j h_n))$$

نشان داده می‌شوند، جایگزین گردد.

در این حالت خطای نقص از همان مرتبه $O(h^p)$ خواهد بود اما شکل آن به سمت مضربی از چند جمله ای ثابت میل می‌کند. در واقع درونیاب اصلاح شده جزء دسته خاصی از مقادیر تقریبی است که به ازای آنها رابطه ۱۲ بدست می‌آید:

$$\delta(x) = r_1(\tau) F_1 h_n^p + O(h_n^{p+1}) \tag{۱۲}$$

در حالی که $F_1 h_n^p$ همان جمله اصلی در بسط خطای موضعی روش گسستهٔ محاسبه شده در نقطه $x_{n+1}$ می‌باشد. همین امر ارتباط مجانبی و مستقیم بین خطای موضعی روش گسسته و خطای نقص روش تقریبی پیوسته را مشخص می‌سازد. از طرف دیگر وقتی از درونیاب اصلاح شده استفاده می‌شود، چون $r_1(\tau)$ مستقل از مسأله است، وقتی $h_n \to 0$ میل می‌کند شکل $\delta(x)$ که بوسیله چند جمله ای ثابت $r_1$ تعیین می‌شود، مستقل از مسأله و موقعیت گام روش گسسته می‌گردد، پس کافی است $\tau^*$ را همان مکانی قرار داد که $\|r_1(\tau)\|$ به ازای $\tau \in [0,1]$ ماکسیمم می‌شود. به این ترتیب تنها با گذاشتن یک محدودیت کوچک در اندازه ماکسیمم $h_n$ می‌توان به کراندار بودن خطا در طول بازه انتگرال گیری مطمئن بود.

## ٤- نتایج عددی

در این بخش به پیاده سازی مطالب عنوان شده پرداخته می‌شود. وقتی از کنترل خطای نقص و درونیاب اصلاح شده استفاده می‌گردد، دیگر گفته نمی‌شود روش مرتبه (۴,5) و(۵,۶)و(۷,8)، زیرا هیچ گاه از فرمول مرتبه پایین برای تخمین استفاده نمی‌شود. در واقع سه روش از مرتبه ۵ و ۶ و ۸ بررسی می‌گردد. به منظور بررسی درستی هر کدام از روش ها می‌توان از ۲۵ مثال موجود در مقاله [۷] استفاده کرد، اما در این تحقیق، از مسائل مقدار اولیه یک بعدی استفاده می‌گردد، چراکه هر کدام دارای جواب دقیق به فرم بسته می‌باشند که محاسبه و مقایسه خطا را آسان می‌سازد:

$$\begin{aligned}
A2:&\quad y' = -\frac{y^3}{2} && y(0)=1,\\
A3:&\quad y' = (\cos x)y && y(0)=1,\\
A4:&\quad y' = \frac{y}{4}(1-\frac{y}{20}) && y(0)=1,
\end{aligned}$$

و همچنین از بین مسائل اُربیت، از مسأله چهارتایی کپلر که در کاربرد بیشتر دیده می‌شود، در پیاده سازی ها استفاده می‌شود:

$$D3:\ y' = [y_3, y_4, \frac{-y_3}{r^3}, \frac{-y_2}{r^3}] \qquad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

$$y(0) = [1-\varepsilon, 0, 0, \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}] \qquad \varepsilon = 0.5.$$

با افزودن مسئلهٔ غیر خطی به فرم:

$$NL: y' = \frac{1 - y\sin(xy)}{1 + x\sin(xy)}, \qquad y(0) = 0,$$

به مجموعهٔ مسائل مورد بررسی، کارائی الگوریتم تخمین خطا برای یک مسئله به نسبت پیچیده تر نشان داده می‌شود.

در کلیهٔ مسائل یاد شده، سمت راست معادله تابعی لیپشیتز نسبت به متغیر $y$ است و این تنها شرط لازم برای درستی الگوریتم گفته شده می‌باشد.

در ادامه در هر یک از روش ها و مثال های یاد شده اثر چند تغییر را بررسی و همگی در جدول شماره ۱ خلاصه شده‌اند:

جدول (۱): نمادگذاری نمودارها

| | |
|---|---|
| Bb | محاسبه مقدار دقیق $b_j(\tau)$ ها و مشتقاتشان در نقطه $\tau=\tau^*$؟ بلی=B وگرنه=b |
| Ss | ارزیابی خطا تنها در $\tau^*$ [S] و یا ماکسیمم گیری روی $\tau\in[0,1]$ [s] |
| Qq | استفاده از دقت QUAD در محاسبه ضرایب درونیاب و مشتقاتش؟ بلی=Q وگرنه=q |

در روش گسسته (۴،5) از ضرایب جدول درمند (Dormand) و پرینس (Prince) استفاده می‌شود که برای روش مرتبه ۴، یک روش ۶ مرحله ای است و برای مرتبه 5، یک روش ۷ مرحله ای می‌باشد. چندجمله ای درونیاب (غیر بهینه) استاندارد $u(x)$ از مرتبه $O(h^5)$ همراه با خطای نقص $O(h^4)$ به فرم (۸) است. با توجه به اینکه در ابتدا فقط مقادیر تابع و مشتق آن را به ازای $\tau=0,1$ داشته، پس طبق روشی که هرن (Horn) ارائه کرده از مقدار تابع در نقطه $\tau=0.6$ به عنوان شرط پنجم درونیابی استفاده می‌شود. زیرا این نقطه تنها نقطه ای است که مقدارش با توجه به اطلاعات قبلی (روش گسسته) بدست می‌آید:

$$y_{n+6}=y_n+h_n\left\{\frac{1559}{12500}f_1+\frac{153856}{296875}f_2+\frac{68107}{2612500}f_4-\frac{243}{31250}f_5-\frac{2106}{34375}f_6\right\}$$

حال برای رسیدن به درونیاب $\widetilde{u}(x)$ از مرتبه $O(h^6)$ همراه با خطای نقص $O(h^5)$ دو مرحله رابطه ۱۳ اضافه می‌گردد:

$$f_8=f(x_n+.86h_n,u(x_n+.86h_n)),\qquad (۱۳)$$
$$f_9=f(x_n+.93h_n,u(x_n+.93h_n)).$$

در آن صورت درونیاب $\widetilde{u}(x)$ ۹ مرحله دارد. در نهایت برای رسیدن به درونیاب اصلاح شده $V(x)$ طبق گام چهارم $f_8$ , $f_9$ به فرم رابطه ۱۴ اصلاح می‌گردد:

$$\widetilde{f}_8=f(x_n+.86h_n,\widetilde{u}(x_n+.86h_n)),\qquad (۱۴)$$
$$\widetilde{f}_9=f(x_n+.93h_n,\widetilde{u}(x_n+.93h_n)).$$

و بدست می‌آید:

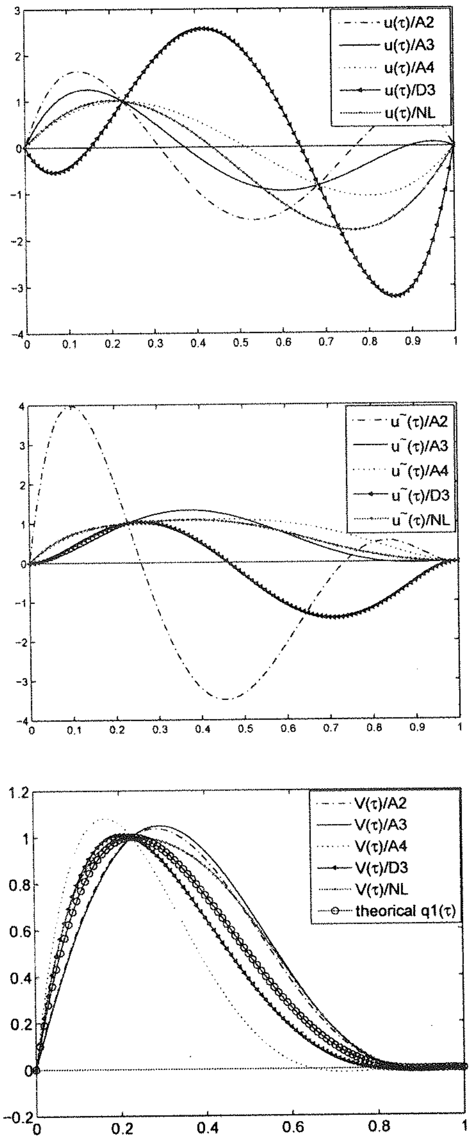
$$V(x_n+\tau h_n)=y_n+h_n\sum_{j=1}^{9}b_j(\tau)\widetilde{f}_j$$

اگر $r_1(\tau)$ برای $\delta(x)$ بدست آید چندجمله ای زیر حاصل می‌گردد

$$r_1(\tau)=\frac{1875}{64}\tau^4-\frac{20925}{256}\tau^3+\frac{38847}{512}\tau^2-\frac{11997}{512}\tau$$

که ماکسیمم آن در بازه $[0,1]$ همان $\tau^*=0.23$ است. در شکل ۱ خطای نقص که به صورت نرمال شده می‌باشد در فاصله یک طول گام دلخواه نشان داده شده است. البته برای اینکه بتوان خطای هر چهار مثال را روی یک محور کشیده و با هم مقایسه کرد، میزان خطا را در طول $\tau\in[0,1]$ بر میزان خطای نقطه $\tau^*=0.23$ تقسیم کرده تا منحنی، نرمال شده گردد.

نمودار سمت راست به ازای درونیاب $u(x)$ و سمت چپ به ازای درونیاب $\widetilde{u}(x)$ است. اگر خوب دقت کنید میزان ماکسیمم خطا، به ازای هر چهار مثال و هر دو درونیاب در مکان های مختلفی صورت می‌گیرد و حتی در چند نقطه، بیشتر از خطا در نقطه $\tau^*$ می‌باشد. اما اگر به رفتار خطا در نمودار پایینی که مربوط به درونیاب اصلاح شده $V(x)$ است دقت کنید در کل طول گام، خطای هر چهار مثال مشابه و حتی ماکسیمم آن، نزدیک به نقطه $\tau^*$ است.

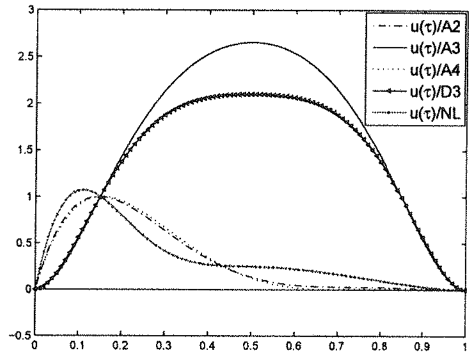


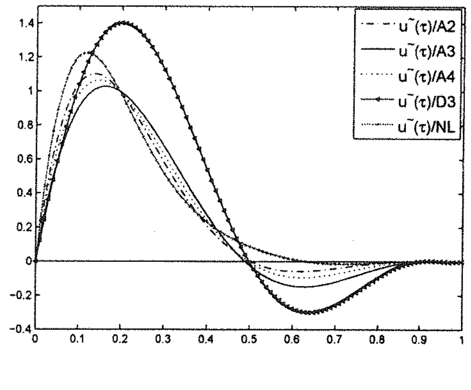

شکل (۱): خطای نقص نرمال شده در طول یک گام دلخواه، به ازای هر پنج مثال و هر سه درونیاب در روش های مرتبه ۴ و ۵

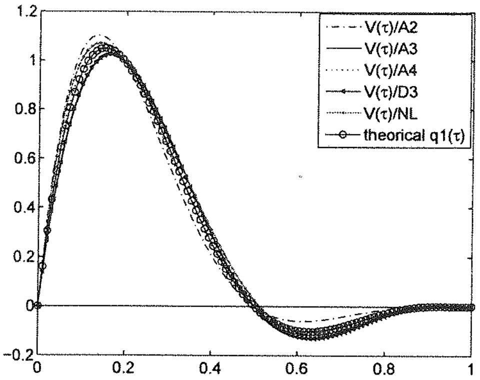
در حالت بعدی جدول ضرایب روش گسستهٔ (۶،۵) که توسط انرایت با نامCRK6N استفاده شده است، به کار گرفته می‌شود. این روش در مرتبه پایین ۸ مرحله دارد و به ازای مرتبه ۶ دارای ۹ مرحله است. در ابتدا برای رسیدن به درونیاب $u(x)$ $(O(h^6))$ علاوه بر $f_1,...,f_8,f_1^{n+1}$ به دو داده دیگر نیاز است. با همان استدلال قبل از $y, f$ در نقطه $\tau = 0.5$ استفاده می‌شود. پس از آن محاسبهٔ $f_{12}$ ، $f_{11}$ در نقاط میانی

$$f_{11} = f(x_n + .9h_n, u(x_n + .9h_n)), \qquad (۱۵)$$
$$f_{12} = f(x_n + .95h_n, u(x_n + .95h_n)).$$

درونیاب $\widetilde{u}(x)$ از مرتبه $O(h^7)$ را نتیجه می‌دهد. درونیاب $V(x)$ نیز با تکرار $\widetilde{f}_{12}$ ، $\widetilde{f}_{11}$ ، $\widetilde{f}_{10}$ در گام آخر درونیابی حاصل می‌شود. نمودارهای موجود در شکل (۲) طبق شکل قبلی بیان شده اند که دیده می‌شود به ازای درونیاب $u(x)$ رفتار خطا در مثال های مختلف متفاوت است اما در درونیاب مرتبه بالاتر، $(\widetilde{u}(x))$ رفتار خطا به ازای برخی از مثال ها مشابه شده است و حتی در نمودار چندجمله ای $V(x)$ رفتار خطا به ازای هر چهار مثال نزدیک به هم و مشابه اند.



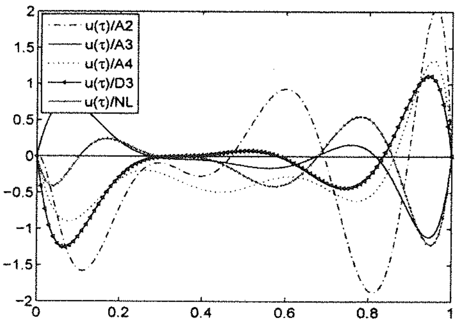

**شکل (۲): خطای نقص نرمال شده در طول یک گام دلخواه، به ازای هر پنج مثال و هر سه درونیاب در روش های مرتبه ۵ و ۶**

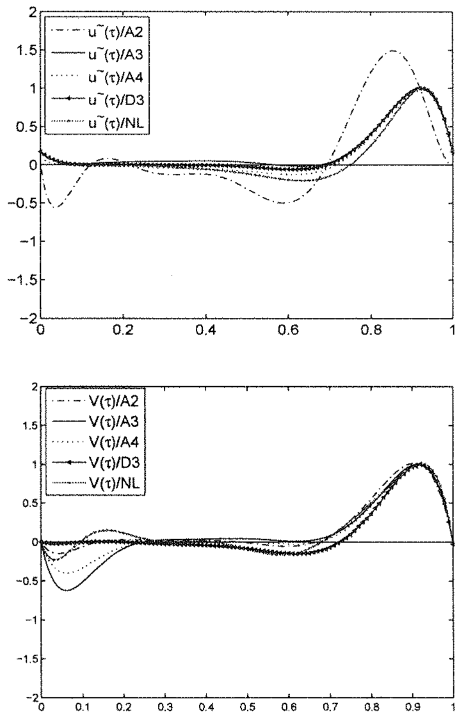
نکته دیگر اینکه $\tau^* = 0.15$ می‌باشد.

یکی از مزایای مهم روش ارائه شده در این مقاله این است که نتایج برای روش های با مراتب بالا هم مشابه و قابل پذیرش است، به طوری که درونیابی همرتبه با حالت گسسته بدست می‌آید. در روش گسستهٔ (۸،۷) از ضرایب بدست آمده توسط ورنر(CVSS8) استفاده می‌شود. این روش در هر گام ۱۳ مرحله دارد و روند کار مشابه قبل است اما نقاط بازبینی در این درونیاب، نقاط میانی

$$\tau = \frac{103}{1000}, \frac{41}{125}, \frac{41}{100}, \frac{313}{1000}, \frac{681}{1000}$$

می‌باشند و طرف دیگر $\tau^* = 0.92$ بدست آمده است. شایان گفتن است که در روش مرتبه ۸ به دلیل بزرگ بودن ضرایب بدست آمده، اثر خطای roundoff در نتایج دیده می‌شود.






**شکل (۳): خطای نقص نرمال شده در طول یک گام دلخواه، به ازای هر پنج مثال و هر سه درونیاب در روش های مرتبه ۷ و ۸**

بررسی نمودارها نیز همانطور که پیشتر تحلیل شده بود، این اجازه را می‌دهد که تخمین معتبری از ماکسیمم خطای نقص را تنها با یک ارزیابی $f$ در $\tau^*$ بدست آوریم و از آن در تعیین طول گام جدید روش انطباقی بهره گرفت.

در انتها، گفتن این نکته ضروری است که طبق بررسی های انجام شده با کنترل خطای نقص، خطای موضعی هم کنترل شده و کراندار می‌ماند.

## ۵- نتیجه

در این مقاله، یک تقریب پیوسته به منظور حل مسائل مقدار اولیه، همراه با کنترل خطای نقص ارائه شد که خطای آن تا اندازه ای مستقل از مساله عمل می‌کند. همین برتری باعث می‌شود که هزینه محاسبهٔ روش کاهش یابد و از طرفی با تطبیق آن با روش انطباقی به الگوریتمی کاراتر رسید که هر کابر تنها با انتخاب کران خطا، قادر به حل مسأله خود با دقت و مرتبه خواسته شده باشد.

## ۶- مراجع

[۱] Butcher, J. C.; Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, 2003.

[۲] Dormand, J. R.; Prince, P. J.; "A family of embedded Runge-Kutta formulas", J. Comput. Appl. Math., vol. 6, p.p. 19-26, 1980.

[۳] Enright, W. H.; Jackson, K. J.; Norsett, S. P.; Thomsen, P. G.; "Interpolation for Runge-Kutta formulas", ACM Trans. Math. Soft., vol. 12, p.p. 193-218, 1986.

[٤] Enright, W. H.; Hayes, W. B.; "Robust defect control for RK-methods using efficiently computed optimal-order interpolants", University of Toronto, Preprint, p.p. 1-18, 2005.

[٥] Enright, W. H.; "Analysis of error control strategies for continuous Runge-Kutta methods", SIAM J. Numer. Anal., vol. 26, p.p. 588-599, 1989.

[٦] Enright, W. H.; "A new error-control for initial value solvers", J. Appl. Math. Comp., vol. 31, p.p. 288-301, 1989.

[٧] Enright, W. H.; Pryce, J. D.; "Two FORTRAN packages for assessing initial value methods", ACM Trans. Math. Soft., vol. 13, p.p. 1-27, 1987.