نظریه منطق فازی و اصل امتناع اجتماع و ارتفاع نقیضین: تبیین و تعدیل

حامد شکوری گنجوی
استادیار
دانشکده فنی - مهندسی، دانشگاه شاهد

مهدی نساجی
دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

با وجود پژوهش های علمی و عملی زیادی که در زمینه های مختلف «نظریه فازی» صورت گرفته است، کمتر به مبانی منطقی و فلسفی آن پرداخته شده است. از آنجا که به کارگیری یک نظریه بدون توجه به مبانی آن می تواند به نتایج نادرستی منجر شود، این مقاله در تلاش برای تبیین بخشی از آن مبانی تدوین شده است. علاوه بر عدم دقت کافی به مفهوم «امتناع اجتماع و ارتفاع نقیضین» یکی از مهمترین نکاتی که برخی از اندیشمندان در این مقوله را دچار شبهه در این اصل مسلم نموده است، حوزه صدق مفاهیم فازی و سپس چگونگی فازی سازی است. در این مقاله با رجوع به تقسیم مفاهیم به «بسیط و مرکب» و نیز «متواطی و مشکّک» امکان فازی سازی برای چهار دسته حاصل بررسی شده و شبهه مزبور پاسخ داده شده است.

کلمات کلیدی

منطق فازی، منطق چند مقداری، اصل عدم تناقض، منطق ارسطویی و اسلامی

Fuzzy Logic and The Law of Non-Contradiction: Demonstration and Adjustment

H. Shakouri G.
Assistant Professor
Engineering Faculty,
Shahed University

M. Nassaji
MSc Student
Electrical Engineering Department,
Amirkabir University of Technology

Abstract

It is more than two decades that the theory of Fuzzy Logic has widely penetrated science as well as technology. Despite of this influence that has caused various benefits in practice, its fundamental concepts and philosophical view has not been investigated much. As a side effect of such a weakness, many scientists may think by mistake that the theory of fuzzy logic is an inherent contradiction and disapproves the law of non-contradiction. This paper is an attept to show how this theory adopts the evidence of that well-known law of existance. Although we believe that the law is a self-evident principle, the paper explaines what has led to such a mistake. Misunderstanding the meaning of the principle, the range of concepts that the idea of fuzzy thinking can be employed to, and misinterpreting of fuzziness due to ambiguty or vagueness of concepts are discussed as basic reasons. This may adjust our perception of both the law of non-contradiction and the fuzzy logic.

Keywords

Fuzzy Logic, Multi-valued Logic, Aristotlian Logic, Islamic Logic, Non-Contradiction Law

مقدمه

اکنون بیش از سه دهه است که پروفسور ل.ع.زاده با طرح نظریه مجموعه های فازی باب تازه ای را در روش های برخورد علمی انسان با حقایق جهان هستی گشوده است [15][14]. ظهور نظریه منطق چند مقداری و در دامنه ای وسیع تر منطق فازی، با آنکه بشر را دردیدگاه فراتری نسبت به گستره معرفت قرار می دهد، ممکن است دقت او را نسبت به ظرائف و دقائق هستی کاهش داده و اگر از تکیه گاه محکمی از مبانی معرفتی برخوردارنباشد، جایگاه او را در اوج متزلزل سازد.

اگر چه این نظریه در زمینه های علمی کاربردی سریع داشته است و توفیقات بسیاری را در حل مسایل علمی بشر بدست آورده [8]، اما به نظر میرسد عملگرایی انسان امروز، کمتر فرصت پرداختن به موضوعات مبنایی در این نظریه را برای وی فراهم آورده است. افرادی که در ریشه های فلسفی یا منطقی این نظریه به کنکاش پرداخته و از حد کلی گویی فراتر رفته باشند بسیار اندک و انگشت شمارند [12][10][7].

عدم توجه جدی به مسایل مبنایی این نظریه و شاید درک غیرعمیق از اصول این نظریه گاه تعارضاتی را نیز میان این نظریه و نظریه منطق ارسطویی (کلاسیک) که از یک جهت حالت خاصی از همین نظریه تعمیم یافته به شمار می آید، موجب گشته بطوریکه برخی دانشمندان عصر جدید معتقدند، این نظریه اصول مسلم منطق کلاسیک را با جدیت تمام رد کرده است [10] و البته برخی آن را تجلّی نوین از جدالی دیرین بین تفکر اشراقی شرق و تفکر غیر منعطف غرب می‌شمارند [10] [12]. از بدیهی ترین بدیهیات و اساسی ترین این اصول که در واقع مبنای اولیه تمام مباحث فلسفی و منطقی در یونان قدیم و میان دانشمندان اسلامی به شمارمی‌آید، اصل عدم امکان اجتماع و ارتفاع نقیضین یا به طور خلاصه، اصل «امتناع تناقض» است [۱][۲][۳][۴]؛ اصلی که بعضی دانشمندان جدید تا انکار کامل آن پیشرفته و گفته‌اند:

" ... حالت فازی زمانی آغاز می شود که این تناقض ها شروع می شود، هنگامی که $notA$ و A تا هر درجه ای صادق هستند" [10].

این بیان صورت جدیدی از عقاید مادیگرایان قرن گذشته است که اعتقاد داشتند [۱]:

" قانون تناقض در چیزها، که قانون وحدت متضادها است، قانون اساسی ماتریالیسم دیالکتیک است."

از نظر این مقاله، ورود شبهه براین اصل در دایره تصورات شکننده تر از آن است که تنها در دایره تصدیقات وارد شود. تنها به این اندیشه که امکان تناقض را از دایره تصدیقات مبرّا کنیم نمی‌توان اکتفا کرد و از هجمه شبهه به قلّه یقین مصون ماند. این مقاله قصد آن را دارد که با ابرام بر صحت اصل امتناع تناقض که بدون آن، هستی معنا نمی‌یابد و با نیستی تفاوتی نخواهد داشت [۱]، به تبیین نکاتی بپردازد که عدم دقت کافی به آنها، مانع درک صحیح نظریه مجموعه های فازی و در پی آن منطق فازی گشته و در نتیجه باعث نقض برخی مفاهیم اساسی همچون اصل امتناع تناقض می شود.

باید گفت، آنچه که هست از آن جهت که هست، هرگز با نیستی متحد و مخلوط نمی تواند باشد و در اثبات یک محمول برای یک موضوع - در عین اثبات - نمی توان آن را با همان مفهوم نفی کرد. بر همین اساس است که هرکس در تبیین یک موضوع علمی دست به قلم برده نوشتاری را تدوین و موجودیت می بخشد و یا حتی لب به سخن گشوده و قصد بیان مطلبی را دارد، بدون اعتقاد به اصل امتناع تناقض هرگز دست به چنین اقدامی نخواهد زد. شاید از همین نقطه نظر است که برخی محققان و نویسندگان صاحب نظر در فازی نیز اعتراف دارند : "فازی فازی نیست" [10] و یا آنکه "فازی ترد[1] است" [12]. آنگاه که در موضوعاتی مانند پردازش تصاویر روش های فازی منجر به نتایج بسیار *ترد* و *شفاف* می شوند، شنیدن یا خواندن عباراتی از این دست به هیچ وجه عجیب نمی نماید.

۱- مفاهیم اساسی[۲]

از نظر این مقاله آنچه که باعث شبهاتی از این دست شده، عدم توجه کافی به مبانی نظریه مجموعه های فازی است و اگر در مبانی و مفاهیم اولیه اساسی مجموعه ها و منطق فازی اندکی بیشتر تامل شود، درک و تفاهم بهتر و درنتیجه حل مسائل آسان تر خواهد شد. در این بخش به برخی از اصول و تعاریف که به درک دقیق تر مبانی فازی کمک می کند، پرداخته می‌شود.

۱-۱- چند اصل موضوعه

در اینجا نه قصد و نه مجال ورود گسترده به مباحث ابتدایی منطق وجود دارد. از آنجا که پی ریزی هر مبحثی بر داشتن یک قاموس مشترک بین افراد متکی است، بیان مقدماتی برخی مفاهیم اجتناب ناپذیر است. بدون وجود مشترکاتی که طرفین بی اتکا به هیچ استدلال پیشین آن ها پذیرا باشند نمی‌توان گفتگویی را آغاز کرد. این، خود یک پیش فرض برای ورود به تبادل افکار است.

هرچه در تعریف الفاظی چون «مفهوم» و «مجموعه» و مانند آن تلاش کنیم [۵] به بیراهه رفته و جز به *شرح الاسم* به چیز دیگری دست نیافته ایم. پذیرش دسته ای از بدیهیات بطور مشترک بین انسان ها ضرورت اولیه برای تفاهم است. اگرچه در پاره ای از مناقشات میان انسان ها سوء تفاهم هست، اما بیشتر گفتگوهای روزمره انسانی نیز بدون هیچ شبهه و مشکلی جریان دارد.

با این توجه، همچنان که در دنیای الفاظ میان دو مفهوم «معرفه» و «نکره» تفاوت قائل می شویم، می توانیم میان مفاهیم «مفهوم» و «مصداق» نیز تمایزی *بالبداهه* درک کنیم. از این روی برای آنکه بتوانیم قدم های بعدی را برداریم، اصول زیر را عنوان می کنیم:

۱-«مجموعه» یک «مفهوم» انتزاعی برخاسته از یک یا چند ویژگی مشترک قابل تشخیص در میان «مصادیق» مختلف یا همان «اعضاء» است.

۲- مصادیق یک مفهوم در عین آن که در آن مفهوم با هم مشترک اند، می توانند وجوه امتیازی نیز با هم داشته باشند. همچنین ممکن است ویژگی های دیگری یافت شوند که بین مصادیق یک مفهوم و مصادیق مفهوم دیگر مشترک باشند اما در ویژگی مورد نظر اشتراکی نداشته باشند.

۳- هر ویژگی می تواند به صورت یک گزاره ساده شرطی یا غیر شرطی بیان شود.

۴-«مجموعه مرجع»[۳] یک مفهوم انتزاعی دیگر است که مصادیق آن می توانند برخی از ویژگی های مصادیق مجموعه را داشته و برخی دیگر را نداشته باشند.

۵- آنچه از «یک مصداق» به ذهن متبادر می شود یک «مفهوم جزیی» است و در مقابل آن «مفهوم کلی» قرار دارد که می تواند مصادیق بسیاری داشته باشد.

۶- یک گزاره غیر شرطی ساده تنها یک محمول و یک گزاره شرطی ساده، تنها یک تالی دارد.

ناگفته نماند، در تکمیل نظریه مجموعه ها و یا پاسخ به پارادکس های القاء شده درآن، اصول موضوعه متعددی بیان شده و به کار رفته اند [۵] که این مقاله متعرض آنها نشده و تنها در بیان مقصود خود به اصول فوق اکتفا می‌کند.

با توجه به اصول فوق بیان های ریاضی زیر مرور می شوند:

مجموعه X مجموعه مرجع است که می تواند شامل کل موجودات یا هر زیرمجموعه ای از آن باشد.

مجموعه A در میان اعضاء مجموعه X چنین تعریف می‌شود:

$$A=\{x\in X \mid \varphi_x\} \tag{۱}$$

که در آن φ_x یک گزاره ساده بوده و بیانگر تنها یک ویژگی معین خواهد بود که قابل إجزاء به ویژگی ساده تر (جزئی تر) نیست.

بنابراین، اگر صحت گزاره ای را با $V(\varphi_x)$ نشان دهیم، طبق تعریف خواهیم داشت:

$$\mu_A(x)\equiv V(\varphi_x)=\begin{cases}1: x\in A\\ 0: x\notin A\end{cases} \tag{۲}$$

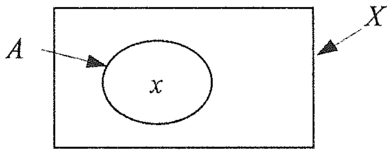
همچنین، با توجه به اصل ۲ می توان نوشت:

$$\exists\, x, y \in A, V(\psi_x \wedge \neg \psi_y) = 1 \qquad (۳)$$

و: $\exists\, x \in A,\ z \notin A,\ V(\psi_x) = V(\psi_z),\ V(\varphi_x) \neq V(\varphi_z) = 0$ که درآن ψ_x بیانگر یک ویژگی غیر از φ_x است.

بدین ترتیب، مفاهیم مختلف که الفاظ نیز برای انتقال ذهن به آنها وضع (قرار داد) شده اند براساس تفاوت گزاره های φ_x از یکدیگر تمایز یافته و قابل تشخیص خواهند بود.

بطور نمادین مجموعه A را در میان اعضای X بصورت زیر نمایش می دهند:



شکل (۱) نمودار ‹ون› برای نمایش مجموعه و مجموعه مرجع.

مجموعه های فازی

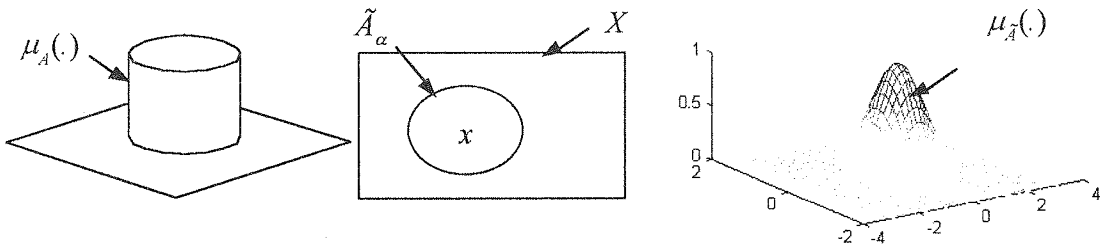
براساس تعریف، مجموعه فازی $\tilde{A}$ به هریک از اعضای مجموعه مرجع X درجه ای از عضویت را که توسط تابعی مانند $\mu_{\tilde{A}}(.)$ مشخص می شود، نسبت می دهد. به این ترتیب، برای هرعضو x از مجموعه مرجع، $\mu_{\tilde{A}}(x)$ میزان عضویت x درمجموعه فازی $\tilde{A}$ را تعیین می کند که می تواند هرعدد حقیقی بین صفر و یک باشد [16].

بعنوان مثال، اگر ویژگی شجاعت را با گزاره ς_x به مفهوم « x شجاع است» نمایش دهیم، صدق این گزاره بر افراد شجاع در مجموعه مرجع (انسان ها) بطور یکسان نخواهد بود و *می توانند تا هر درجه ای صادق باشد*:

$$\tilde{A} = \{x \in X \mid \varsigma_x\} \qquad (۴)$$

تفاوت بین تعاریف (۱) و (۴) تنها درمفهوم دو گزارهٔ φ_x و ς_x و درواقع در مفاهیم محمول های آن هاست.

در بیان ریاضی یک مجموعه فازی بوسیله زوج های مرتب $\{x, \mu_{\tilde{A}}(.)\}$ نمایش داده می شود. در اینحال، منحنی بسته در شکل (۱) دیگر قابل رسم نخواهد بود. در یک نمایش کلی تر می توان مجموعه فازی $\tilde{A}$ را بصورت یک سطح که ارتفاع آن را اندازه تابع $\mu_{\tilde{A}}(.)$ تعیین می کند، نمادسازی کرده و آنگاه با درنظر گرفتن یک سطح معین از عضویت، مانند: $\mu_{\tilde{A}}(.) > \alpha$ (برش α)[۴]، یک منحنی بسته را مانند شکل (۱) رسم نمود.



شکل (۲) نمایش توابع عضویت مجموعه فازی و مجموعه کلاسیک.

۱-۲- بسیط و مرکب

یک نکته مهم این است که اذعان به گزاره φ_x در ذهن بطور صریح اتفاق نمی افتد. به عنوان مثال در تصور مفهوم درخت، وجود شاخه و برگ، ریشه و تنه و ارتفاع معمولا به طور مجزا مورد ملاحظه و تصدیق قرار نمی گیرد (مانند محاورات روزمره) و تنها درصورت شک و تردید در وجود هر یک از این ویژگی‌ها است که ذهن دقیق شده و به سراغ تصدیق یا تکذیب آن گزاره

می‌رود. درصورت اول، مفهوم بین گوینده و مخاطب بطور بدیهی معروف و پذیرفته شده است، تقریبا مانند تمام موارد استعمال عادی این لفظ. اما درصورت مواجهه با یک مبحث دقیق تر توجه به جزئیات ضروری خواهد بود.

بدین ترتیب در تعریف مفهومی مانند درخت به بیان ریاضی و با نامگذاری ویژگی های یادشده به $\lambda_x, \rho_x, \beta_x, \psi_x, \varphi_x$ خواهیم داشت :

$$T = \{x \in X | \lambda_x \wedge \rho_x \wedge \beta_x \wedge \psi_x \wedge \varphi_x\}$$

بی درنگ، آنچه از بیان فوق نتیجه می‌شود، تقسیم مفاهیم به دو نوع «بسیط و مرکب» است. مفهوم «بسیط» به مفهومی گفته می شود که برای تبیین (تعریف) آن مطابق با (۱) تنها یک گزاره ساده (شرطی یا غیرشرطی) φ_x بکار رفته باشد.

در مقابل، مفاهیم «مرکب» مفاهیمی هستند که با ترکیب های عطفی (یا فصلی) چند گزاره (ویژگی) تعریف شده باشند:

$$T = \{x \in X | \varphi_x \wedge (\vee)\ \psi_x \wedge (\vee) \ldots\} \qquad (۵)$$

روشن است که شک و تردید در صدق φ_x برای یک مفهوم، معادل با تردید در درک خود مفهوم است و منجر به ابهام درآن می شود.

باردیگرتوجه شود که نمایش یک مجموعه با یک گزاره که خود متکی به حداقل دو مفهوم دیگر (موضوع و محمول) است، با تعریف حقیقی مفهوم مربوط به آن مجموعه معادل نیست و ممکن است تنها یک *شرح الاسم* یا یک توضیح عادی باشد و مفهوم مزبور به طور بدیهی بین مخاطب و گوینده پذیرفته شود. با بازگشت به مثال «درخت»، یک مفهوم ممکن است در یک گفتگو بعنوان «بسیط» پذیرفته شود اما در یک محاوره دیگر، ویژگی های جزئی تر آن مانند «داشتن تنه و شاخه و ... » مورد توجه باشند.

درهرحال، به منظور اجتناب از تسلسل در تعریف مفاهیم، از پذیرش برخی مفاهیم بدیهی به عنوان ساده ترین مجموعه ها ناچارخواهیم بود مفاهیمی مانند «موجودات» و «اشیاء» و گاه «درخت» ، «سیب» و مانند آن به طور شهودی و تنها با مشاهده و حس میان انسان ها به اتفاق پذیرفته شده و مشخص هستند. در برخی از متون از مجموعه هایی از این قبیل با اصطلاح «خوش تعریف»[5] یاد می شود [۶] که البته خاصیت ‹ ذاتی› آن ها نخواهد بود.

۲- انواع مفاهیم کلّی

در بخش قبل برخی مقدمات مهم منطقی مرور شدند. در این بخش نیز به تبیین یکی دیگر از مقدمات که نقش کلیدی در مباحث بعدی دارد اشاره نموده و به دلیل اهمیت، در بخشی جداگانه به آن پرداخته می شود. ابتدا توجه شود که تقسیم بندی حاضر تنها از بعد نحوه انعکاس عالم خارج در ذهن و ادراکات انسان از واقعیات صورت می گیرد.

۲-۱- مفاهیم کلی متواطی و مشکّک

درپی تقسیم مفاهیم به دو دسته کلی و جزئی، در یک تقسیم بندی دیگر مفاهیم کلی، خود به دو نوع مفهوم متواطی و مشکّک تقسیم می شوند. این تقسیم بندی در منطق وفلسفه اسلامی به وضوح تبیین شده است [۳][۴].

مفاهیم کلی متواطی

وقتی یک مفهوم مانند سیب، درخت، خودرو، انسان، اسب و مانند آن را به کار می‌بریم، از لحاظ صدق هر یک از این مفاهیم بر مصادیق خود تفاوتی بین آنها نخواهیم یافت. حسن و حسین و سایر افراد انسان، از جهت «انسان بودن» (در تقابل با اسب یا سیب و...) فرقی با هم ندارند؛ یعنی انسان بودن یکی از آنها دارای مرتبه‌ای بالاتر از «انسانیت» افراد دیگر، یا شدیدتر یا بیشتر از انسان بودن افراد دیگر نیست. بلکه تفادت آنها از جهتی غیر از جهت انسان بودن آنها است. تفاوت هایی از قبیل

کوتاهی و بلندی قد، رنگ چهره، نیرو، صحت و سلامت و نیروی اندیشه، مهربانی و غیره است که در اصطلاح ‹ عرضیات › [۳] نامیده می‌شوند. روشن است که در اینجا منظور از «انسانیت» صفات باطنی یا اخلاقی انسان مانند مروّت و نوع دوستی و مانند آن نیست و تنها آنچه انسان را در قبال سایر موجودات (از «موجودات» که دورترین مجموعه مرجع است تا «حیوان» که نزدیکترین مجموعه مرجع است) متمایز می‌نماید (وآن ویژگی به اصطلاح ‹ فصل› نامیده می‌شود [۴]) مد نظراست.

با توجه به بیان فوق می‌توان تعریف ریاضی مفهوم متواطی را این چنین ارائه کرد:

بیان ریاضی مجموعه A در (۱) یک مفهوم متواطی را به ذهن متبادر می‌سازد تنها اگر :

$$\forall\ x \in A, V(\varphi_x) = 1$$

درصورتیکه مفهوم مرکب باشد، کافی است که عبارت فوق حداقل برای یکی از ویژگی های بکار رفته در تعریف آن صدق کند تابتوان آن را متواطی دانست.

مفاهیم کلی مشکّک

با جستجویی ساده در ادراکات خود بعضی مفاهیم کلی مثل نور، وجود و برخی صفات مانند شجاع را می‌یابیم که وقتی با مصادیق خود، انطباق داده شوند برخلاف قسم قبل از لحاظ صدق مفهوم بر آنها متفاوت‌اند. این تفاوت ممکن است در چیزی مانند شدت یاکثرت و یا اولویت و مانند آن باشد. مثلا سفیدی برف از سفیدی کاغذ شدیدتر است، درحالی که هر دو سفید هستند. همچنین وجودِ علّت بر وجودِ معلول مقدّم است و این تقدم یا به تعبیری اولویت به نفس وجود است نه به چیز دیگری، در حالیکه هر دو آنها وجود هستند. این قبیل مفاهیم کلی که میزان صدق آن بر افراد «متفاوت» باشد، «مفهوم کلّی مشکّک» نامیده می‌شود.

نکته بسیار حائز اهمیتی که باید مورد توجه قرار گیرد آن است که مبحث متواطی و مشکک در هر دو وادی فلسفه و منطق قابل طرح و بحث است، اما آنچه در این مقاله مدنظر است (از عنوان بالا نیز پیداست) تنها به دایره مفاهیم و منطق محدود می شود و تشکیک در حقایق که موضوع مباحث فلسفی اند مورد بحث نیست. اینکه آیا در جهان خارج حقیقت مشککی جز «وجود» را می توان یافت یا نه موضوع بسیار مهمی است که درجای خود جای تأمل دارد. در مباحث برخی منادیان تفکر فازی نیز گاه این موضوع دچار خلط مبحث می‌شود و در طول استدلال یا در نتایج آن، ادراک ما از حقیقت جایگزین حقیقت هستی می شود.

با توجه به بیان فوق می‌توان تعریف ریاضی مفهوم مشکک را چنین بیان کرد:

مجموعه A یک مفهوم مشکک را به ذهن متبادر می‌سازد تنها اگر:

$$\exists\ x, y \in A, 0 < V(\varphi_x) < V(\varphi_y) \leq 1 \quad (۶)$$

بنابراین در مورد مفاهیم مشکک داریم :

$$\forall\ x \in A,\ 0 < \mu_A(x) = V(\varphi_x) \leq 1 \quad (۷)$$

و:

$$\mu_A(x) = 0 \Rightarrow x \notin A$$

۲-۲- مفاهیم فازی

پس از توضیحی که در مورد کلیات متواطی و مشکّک گذشت، روشن است که مجموعه های فازی بیان ریاضی مجموعه های مشکک اند؛ بطوریکه تابع $\mu(x)$ میزان عضویت شیء x از مجموعه مرجع را دریک مجموعه نشان می دهد. مثلا

نور شمع، به عنوان یک مصداق از مفهوم نور به اندازه ۰/۰۱ عضو مجموعه نورها اســت و نــور خورشــید هــم ۰/۹۹ و همچنیــن است در مورد سایر مفاهیم مشکک. بنابراین مفاهیم کلّی (یا مجموعه هایی) که افــراد آن تــابع درجــات تشــکیکی هســتند، بــه صورت مجموعه های فازی بیان می‌شوند. در نتیجه ملاحظه می‌شود که نظریه مجموعه های فازی در واقــع نمادســازی ریــاضی برای همان مفاهیم مشکک است. تأکید می شود که در اینجا آنچه معیار تشکیک مفهوم نور است احساس ما از نــور و روشــنایی بوده و واقعیت فیزیکی آن (که ممکن است واقعیتی گسسته باشد) مدنظر نیست.

چنانکه در معرفی مجموعه های فازی آمد، هرعضو از چنین مجموعه هایی با یک عدد $\mu_A(x)$ متناظر است که به نام درجــه عضویت و تابع $\mu_A(.)$ به نام تابع عضویت شناخته می‌شود. بر اساس تعریف مفاهیم مشکک با توجه به (۷) برای هــر مصــداق x داریم :

$$\mu_A(x) = V(\varphi_x) \tag{۸}$$

شاید به نظر می‌رسد که انطباق مجموعه های فازی با مفاهیم مشکک در واقع حرکتی به سمت محدود ساختن ایــن نظریــه است، چرا که مثال های فازی بسیاری نیز وجود دارند که به ظاهر ارتباطی با مفاهیم مشکک ندارند. در بخش بعد ایــن موضــوع مورد دقت قرار خواهد گرفت.

فازی سازی مفاهیم متواطی

با این توجه که فازی سازی تنها مختص مفاهیم مشکک است، فازی بودن مفاهیم متواطی بســیط از اســاس منتفــی اســت. بنابراین مفهومی مانند «سیب» اگر به عنوان یک مفهوم بسیط در نظرگرفته شود که درآن تنها «سیب بودن» شرط اســت و نــه مفاهیم دیگری مانند «قرمز» ، «رسیده» ، «درشت» ، «سالم» و از این قبیل، هرگز امکان فازی سازی آن وجود نخواهد داشــت. در این معنا، به هر حال یک چیز یا سیب هست و یا نیست:

$$\forall x \in X;\ V\left(x \in A \vee x \notin A\right) = 1 \tag{۹}$$

اما مفاهیم متواطی هنگامیکه بصورت ترکیبی ازمفاهیم بسیط و صفات (ویژگی های) مشکّک مورد نظر بــوده و بکــارگرفتــه شوند قابل فازی سازی خواهند بود؛ بنابراین مفهوم سیب یک مفهوم متواطی است و مصادیق آن از هر نوع و اندازه و رنگــی کــه باشند از حیث سیب بودن با هم تفاوتی ندارند و از این رو نمی‌توان سیب بــودن آنــها را تــابع درجــات دانســت و تــابع تعلّــق بــا مقادیری بین صفر و یک برای آن در نظر گرفت. اما می‌توان رنگ سیب یا انــدازه آن را (کــه مفــاهیمی مشــکک هســتند) تــابع درجات دانست و از این حیث آن مفهوم را فازی نمود.

نتیجه آنکه: اگر مفهوم متواطی یک مفهوم مرکّب با ویژگی های مختلف φ_x ، ψ_x و ... شناخته شده باشد، تنــها در صورتــی قابل فازی سازی است که دست کم یکی از ویژگی های آن مشکک باشد.

چنانچه گذشت، مجموعه سیب ها را می‌توان به صورت رابطه زیر تعریف کرد که در آن φ_x تنها ویژگی سیب بودن است.

$$A = \left\{x \in X \,\middle|\, \varphi_x\right\}$$

در این صورت A یک مجموعه متواطی است و داریم :

$$\mu_A(x) = V(\varphi_x) = \begin{cases} 1: x \in A \\ 0: x \notin A \end{cases}$$

توجه شود که در رابطه فوق تعریف مجموعه A با مفهوم بسیط سیب بودن (φ_x) صورت گرفته است.

اما در صورتی که مجموعه سیب ها را به صورت اشتراک چند ویژگی که برخی از آن ها متواطی و برخــی مشــکّک هســتند تعریف کنیم، خواهیم داشت:

$$\widetilde{A}=\left\{x\in X \,\middle|\, \bigcap_i \varphi_x^i\right\} \qquad (۱۰)$$

که در آن علامت ‹طاق› نماد ترکیب عطفی گزاره ها است و حداقل یک i وجود دارد به طوری که ویژگی ψ_x^i مشکّک بوده و به عبارت دیگر فازی است. بیان ریاضی مطالب فوق در نظریه منطق فازی چنین است:

$$\forall x\in\widetilde{A}, 0<\mu_{\widetilde{A}}(x)=V(\varphi_x)\leq 1 \qquad (۱۱)$$

مجموعه $\widetilde{A}$ که اعضای آن دارای ویژگی‌های $\psi^1,\psi^2,\ldots,\psi^k,\ldots,\psi^m$ می‌باشند، می‌تواند به صورت مجموعه فازی تعریف شود، تنها اگر:

$$\exists x\in\widetilde{A}, \exists\, \psi_x^k, 0<V(\psi_x^k)\leq 1 \qquad (۱۲)$$

در صورتی که تنها یک ویژگی ψ_x^k دارای چنین خصوصیتی باشد، تابع عضویت برای این مجموعه فازی مشابه با (۸) خواهد بود که عبارت است از:

$$\mu_A(x)=V(\psi_x^k)$$

و درصورتی که ψ_x^k به ازای $k=1,\ldots,m$ در (۱۲) صدق کند، تابع عضویت بسته به نحوه ترکیب گزاره های مزبور محاسبه خواهد شد.

۳- شبهه در اصل امتناع تناقض

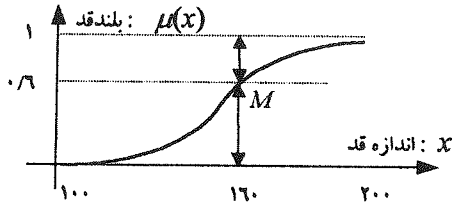
پس از توضیحاتی که در بخش های قبلی ارائه شد، اینک هدف اصلی این مقاله دنبال می شود که همان دفع شبهه «رد اصل امتناع تناقض» است. اجازه دهید ابتدا به تشریح مسأله بپردازیم.

۳-۱- تشریح مساله

ممکن است در تفسیر مجموعه های فازی (که مجموعه های مشکک هستند) گفته شود که مثلا تفاوت نور صددرصدی یا نور مطلق ($\mu(x)=1$) با نور شمع درآن است که: نور شمع، ترکیبی از نور و ظلمت (تاریکی یا عدم نور) است. به این ترتیب در مجموعه فازی نور، برای هرعضو که $\mu(x)<1$ باشد، ترکیبی از نور و ظلمت وجود دارد و به عبارت دیگر وجود و عدم، و در این مثال نور و عدم نور ($A\wedge\neg A$) با هم جمع شده‌اند.

هرمجموعه مشکک دیگری هم مثال زده شود در آن مجموعه حقایق ترکیبی ازیک امر وجودی و یک امر عدمی هستند؛ مانند بلند قدی و کوتاه قدی، سیاهی و عدم سیاهی، قدرت و ضعف و از این قبیل. اینجاست که اجتماع نقیضین صورت گرفته است.

مثال دانه های شن، تپه و کوه مشهور است [10]. اجازه دهید دراینجا قد انسان را مثال بزنیم. فرض می‌کنیم مفهوم بلندی قد انسان به عنوان یک مفهوم مشکک بوسیله مجموعه های فازی بیان شده باشد، دراین صورت نمودار شکل (۳) می‌تواند بیانگر $\mu_A(x)$ باشد.



شکل (۳) تابع عضویت یک مجموعه فازی مربوط به یک مفهوم مشکک.

دراین حال، بطور مثال برای $x_1 = ۱۶۰$ داریم :

$$\mu_A(x_1)=0.6 \;\to\; V(\varphi_{x_1})=0.6 \quad (۱۳)$$

$$V(\neg\varphi_{x_1})=0.4 \quad (۱۴)$$

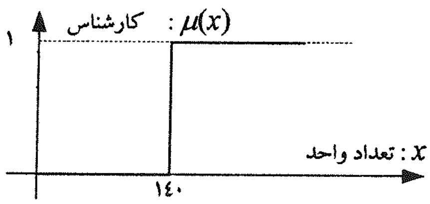
در نتیجه، هنگامیکه رابطه های (۱۳) و (۱۴) با هم در نظر گرفته شوند، اصل امتناع تناقض مخدوش است. چرا که دو امر نقیض هرکدام درجه‌ای از صحت را دارا می‌باشند.

۳-۱-۱- تقسیم بندی مسأله

اجازه دهید برای تبیین دقیق تر مسأله و حل آن، ابتدا دو حالت مفاهیم بسیط و مرکب را از هم تفکیک کنیم. پس، فازی سازی ممکن است برای مفاهیم بسیط یا مرکب صورت گیرد.

مفاهیم بسیط

اگر فازی سازی در مورد مفاهیم بسیط صورت گرفته باشد، مفهوم مورد نظر یا متواطی است و یامشکک؛ اگر مفهوم مورد نظر متواطی باشد که اصلا نمی‌توان آن را فازی نمود و هیچ نمودار پیوسته‌ای را نمی‌توان بعنوان تابع عضویت آن رسم کرد که در این صورت اساسا شبهه تناقض مطرح نمی شود (شکل (۴)).



شکل (٤) تابع عضویت یک مجموعه غیرفازی مربوط به یک مفهوم متواطی.

در این حال پذیرفته شده‌است که اجمالا مفاهیمی از واقعیات در ذهن شکل می‌گیرند که امکان فازی سازی نداشته و درباره آنها تصور اجتماع و ارتفاع نقیضین محال است؛ مانند پدر بودن. مثال مربوط به نمودار بالا بیان می کند که یک فرد یا کارشناس (به معنی خاص[۶]) هست و یا نیست و حد وسطی متصور نیست. پس شبهه تناقض در حالتی که مفاهیم بسیط‌اند فقط در مورد مفاهیم مشکک مطرح می‌شود و مفاهیم متواطی (چه در دایره اعتباریات و چه در حوزه واقعیات) از گزند این شبهه در امان اند.

تبیین با یک مثال

برای توضیح بیشتر مثال عینی صادرات سیب را درنظر بگیرید. شما می توانید در صادرات سیب آنها را به درجات مختلف (توابع عضویت فازی) با عنوان «سیب صادراتی» تقسیم بندی کنید و به هرسیب هر درجه از عضویت را (بسته به اندازه، رسیده بودن، رنگ و ... که ویژگی های مشکک اند) نسبت دهید و از این تابع برای نحوه بسته بندی، قیمت گذاری، تعیین زمان صدور و ... در یک فرایند محاسبات نرم[۷] استفاده کنید. اما آیا هرگز اجازه خواهید داشت که تعدادی «پرتقال» مرغوب را نیز با یک درجه عضویت، مثلا ۰/۲، در بسته بندی ها جای دهید و به خریدار بفروشید؟ روشن است که ازنظر منطق انسانی چنین عملی پذیرفته نیست و بین سیب و پرتقال از این نظر هیچ وجه اشتراکی نیست. درچنین مواردی است که منطق کلاسیک جایگاه مستحکم خود را همچنان حفظ کرده است.

مفاهیم مرکب

در مورد مفاهیم مرکب نیز می‌توان گفت: اگر تمامی ویژگی‌های مفهوم مرکب متواطی باشند، باز هم فازی سازی غیرممکن است و بازهم هیچ نمودار پیوسته‌ای را برای توابع عضویت نمی‌توان رسم نمود و لذا شبهه تناقض پیش نمی‌آید. حال اگر برخی ویژگی های مفهوم مرکب مشکّک باشند، در اینصورت برای هریک از ویژگی های مشکک (که بسیط نیز هستند) می‌توان یک نمودار پیوسته رسم نمود و بعبارت دیگر، آن را بصورت مجموعه ای فازی تعریف کرده و شبهه تناقض را مطرح نمود. پس بخاطر می سپاریم که در اینجا هم فازی سازی در مورد یک ویژگی مشکک صورت گرفته است.

بنابراین، از چهار حالت فوق در دو حالت اساسا شبهه تناقض مطرح نیست و حالت چهارم هم مانند حالت دوم است. در نتیجه اگر شبهه تناقض در مورد مفاهیم بسیط مشکک دفع شود، مساله برای تمام مجموعه های فازی حل شده است.

۳-۱-۲- یک پاسخ نقضی ساده

از عنوان این پاسخ پیدا است، خودِ پاسخ متکی به اصل عدم تناقض است. در مقدمه این مقاله گذشت که دراساس اصل امتناع اجتماع و ارتفاع نقیضین پایه جمیع علوم و ادراکات است و اگر از این اصل علمی صرف نظر شود، هیچ علمی استقرار پیدا نخواهد کرد و هیچ حقیقتی را نمی‌توان اثبات نمود [۱]. بیان اصول موضوعه در بخش ۱-۱- از این مقاله و انتظار پذیرش آن ها از سوی مخاطب، خود حاکی از همین حقیقت است.

محتوای این پاسخ نقضی این است که : عبارت «منطق فازی ناقض اصل امتناع تناقض است» یا صادق است یا کاذب و یا هم صادق و هم کاذب است (معادل اینکه نه صادق و نه کاذب باشد) در حالی که بر اساس خودِ این تفکر، می‌تواند هم صادق باشد هم کاذب. بنابراین آنچه می‌توان نتیجه گرفت این است که اجمالا قضایایی خواهیم داشت که نمی‌توانند در عین صدق، کاذب هم باشند و این پذیرش اصل امتناع تناقض را حداقل برای برخی قضایا و به عبارت دیگر برخی تصدیقات اثبات می‌نماید. بلافاصله پذیرش این اصل در مورد تصورات مربوط به موضوع و محمول این قبیل قضایا نیز غیر قابل اجتناب خواهد بود.

دریک جمله: هر اثباتی خود با فرض صدق اصل امتناع تناقض کار خود را آغاز می کند و تمام استدلال ها مبتنی بر این اصل است؛ پس آنچه در ادامه می آید در واقع نه اثبات بلکه توضیح این اصل است.

۳-۲- حل شبهه

باید گفت اصل این شبهه که دراساس یک شبهه فلسفی در مورد واقعیت های مشکک است در کتاب های فلسفی مطرح شده و در همانجا نیز پاسخ داده شده است [۱][۲][۳]. این مقاله نیز با مقدماتی که مطرح کرد، نشان داد: شبهه امتناع تناقض در منطق فازی به شبهه امتناع تناقض در حقیقت های بسیطِ مشکک باز می‌گردد و بنابراین همان پاسخ که در کتب فلسفی مطرح شده، در دفع اشکال امتناع تناقض در منطق فازی یا چندمقداری کافی است. می شود گفت که از این نظر مقاله حاضر چندان حاوی مطلب جدیدی نیست، اینک جا دارد پاسخ این شبهه از کتاب «ترجمه و شرح نهایة الحکمة» مطرح شود:

«... از مجموع مطالب گذشته روشن شد که همه مراتب وجود [یا هر حقیقت مشکک دیگر] دارای حدود و قیودی هستند [و هرچه یک مرتبه ضعیف‌تر باشد، حدودش کمتر است] غیر از بالاترین مرتبه وجود [یا هر حقیقت مشکک دیگر] که هیچ حدی جز بی‌حدی ندارد. کاملا واضح است که اثبات این حدود و قیود، که ملازم با نداری‌ها و نیستی‌ها و سبب پاره‌ای کمالات می‌باشد، در مراتب وجود که اصیل و بسیط اند، از باب مسامحه و ضیق تعبییر است [پس اینکه می‌گوییم: هر یک از مراتب یک حقیقت مشکک حدود و قیودی دارند، یا مرکب از وجود و عدم هستند، همه مجاز و مسامحه است] زیرا عدم نقیض وجود است و محال است با وجود، که نقیض آن است درآمیزد و لابلای مراتبش وارد شود [به طور کلی عدم، نیستی و بطلان محض است و سهمی از واقعیت ندارد تا بخواهد با وجود ترکیب شود]» [۲].

توضیح بیان علامه طباطبایی آن است که اگر می‌گوییم مثلا نور اتاق که نور مطلق نیست، عضوی بنام x_1 با درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$ در مجموعه نورها است، یعنی در درون اتاق هم نور هست و هم نور نیست. بعبارت دیگر شاید به نظر برسد که نور اتاق ترکیبی از نور و عدم نور (تاریکی) است؛ اما این ترکیب، یک ترکیب حقیقی به معنای واقعی کلمه نیست بلکه به مسامحه گفته می‌شود که نور با تاریکی (ظلمت یا عدم نور) ترکیب شده‌است. چون عدم، یعنی نیستی و نیستی اصلا نیست که بخواهد با هستی ترکیب شود. بنابر این اساسا اجتماع نقیضین صورت نگرفته‌است.

در تکمیل پاسخ بار دیگر شکل (۳) را در نظر بگیرید. برخلاف آنچه دربرخی منابع مطرح می‌شود [10]، درنقطه $x_1 =$ ۱۶۰ ترکیب حقیقی بین وجود و عدم و به عبارت دیگر دو امر نقیض کوتاه و بلند بودن صورت نگرفته‌است. معنای دوعبارت (۱۳) و (۱۴) آن است که یک عضو مجموعه، یعنی $x_1 =$ ۱۶۰، به اندازه ۶۰ درصد خاصیت بلندی را دارا است و به اندازه ۴۰ درصد خاصیت مورد نظر را ندارد. پس همانطور که در شکل نشان داده شده است؛ منحنی، مرز بین بود و نبود یک ویژگی است. در این شکل پیکان زیرین نشان دهنده میزان دارایی x_1 از ویژگی مورد نظر است و پیکان واقع در بالای منحنی میزان نداشتن x_1 از خاصیت مورد نظر را نشان می‌دهد. اگر داشتن و نداشتن که دو امر متناقض هستند، قابل جمع بودند، دو پیکان مزبور می‌توانستند فصل مشترک داشته‌باشند و نقطه M دیگر قابل نمایش نبود. به این ترتیب اگر مرزی بین هستی و نیستی نبود و به عبارت دیگر اجتماع نقیضین محال نبود، نمی‌توانستیم منحنی را رسم کنیم.

اندکی توجه و دقت و داشتن تصوری صحیح و درعین حال بسیار ساده از نقیضین کافی است تا تصدیق کنیم که: با نادیده انگاشتن «اصل امتناع تناقض» هیچ نمودار تابع عضویتی نمی توان رسم نمود، نه گسسته و نه پیوسته.

یک نکته: ارجاع به بدیهی بودن اصل امتناع تناقض

در مباحث منطقی تناُقض، مشروط بودن اصل مذکور به تحقق وحدت طرفین تناقض در هشت شرط مشهور است: «در تناقض هشت وحدت شرط دان- وحدت موضوع و محمول و مکان ...» [۱]. نکته باریکی است که اغلب درایجاد شبهه نسبت به صحت این اصل بدیهی، عدم توجه کافی به وحدت های هشتگانه مذکور نقش اساسی دارد. به واقع، پاسخ منفی این سؤال برای هر انسانی بسیار واضح و بدیهی است اگر پرسیده شود که: «آیا ‹الف› در *همان* شرایط و از *همان* حیث و به *همان* درجه و با *همان* ... که ‹ب› است می تواند *درعین حال* ‹ب› نباشد؟».

ارزیابی منطقی گزاره های اجتماع نقیضین

اگرچه حل حقیقی شبهه همان است که در بالا گذشت، درعین حال ارزیابی منطقی گزاره های حاوی اجتماع نقیضین براساس قانون «تفاضل محدود» نیز خالی از لطف نیست. این قضیه از آنجا جالب توجه است که نشان می‌دهد با همان روش پذیرفته شده فازی نیز می‌توان - به نحوی و حداقل براساس برخی تعاریف - امتناع تناقض را اثبات کرد!

ترکیب عطفی دو گزاره φ_x و ψ_x طبق قانون «تفاضل محدود (*Bounded Difference*)» چنین ارزیابی می شود [16]:

$$V(\varphi_x \wedge \psi_x) = \boldsymbol{max}\{0, V(\varphi_x) + V(\psi_x) - 1\}$$

بنابراین، اگرداشته باشیم : $\psi_x = \neg\varphi_x$ ، از آنجا که : $V(\neg\varphi_x) = 1 - V(\varphi_x)$ ، پس:

$$
\begin{aligned}
&V(\varphi_x \wedge \neg\varphi_x) \\
&\quad = \boldsymbol{max}\{0, V(\varphi_x)+1-V(\neg\varphi_x)-1\} \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

که دلالت بر بی ارزش بودن گزاره A *and not*(A) (حتی درمورد مفاهیم فازی) می کند. بار دیگر یادآور می شود که ترکیب عطفی دو گزاره محدود به قانون مورد استفاده نیست.

۳-۲-۱- مجموعه‌های فازی مرتبه nام[۸]

مفهوم فازی بودن قابل گسترش به خودِ توابع عضویت نیز هست. به این ترتیب تابع عضویت خود یک تابع فازی خواهد بود، یعنی $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نیز درهر نقطهٔ x به صورت فازی تعریف شده و دارای یک تابع عضویت است. با تعمیم این مفهوم به تعریف زیر می رسیم: یک مجموعه فازی از مرتبه n یک مجموعه فازی است که برخی از مقادیر تابع عضویت آن اعدادی فازی از مرتبه n - 1 ($n>1$) باشند [16].

پس ممکن است در نمودار شکل (۳)، نقطه M نیز به شکل فازی تعریف شده‌باشد (فازی سازی از مرتبه ۲). بدون هیچ مشکلی، در این صورت تمام مباحث فوق به نمودار دوم (مربوط به هریک از نقاط توابع عضویت اول) باز می‌گردد. به همین ترتیب اگر فازی سازی از مرتبه ۳ و ۴ و ... برخوردار باشد، باز هم در نهایت باید این روند قطع شود و باز کلیه مباحث فوق در مورد آخرین نمودار تابع عضویت در مرتبه nام مطرح می شوند.

در پژوهش های انجام شده نه به دلایل نظری و نه در عمل، بخاطر پیچیدگی و کثرت محاسبات و بیفایدگی آن، فازی سازی حتی از مرتبه ۲ فراتر نرفته است. باید گفت اگر فازی سازی تا مرتبه بی‌نهایت ادامه داشته باشد، بدلیل تسلسل بی انتهایی که وجود خواهد داشت، اساسا هیچ مفهومی به ذهن متبادر نمی‌شود. آری، به فرض امکان، اصل امتناع تناقض تنها در صورتی مورد تهاجم جدی واقع خواهد شد که تصوری فازی از مرتبه بی‌نهایت میسر شده معنا پیدا کند. در اینجا نیز بدیهی بودن عدم امکان چنین تصوری، مفهوم نبودن آن و نفی امکان شکل گیری آن در ذهن و یا تطبیق آن با مصداقی معین از واقعیات، تبیین کننده موضوع است.

خلاصه و نتیجه

بی نیاز به هیچ تفصیلی، اصل عدم امکان اجتماع و ارتفاع نقیضین مقدمه هر مبحث علمی به شمار می‌رود و بی اعتقاد به آن هیچ علمی حاصل نمی شود. اصل فازی بودن در عین اینکه در درون خود حاوی مفهوم نقض خود نیز هست، نمی‌تواند ناقض اصل امتناع تناقض باشد. این مقاله ضمن تأکید بر بدیهی بودن این اصل، براساس تفکیک مفاهیم به متواطی و مشکک محدوده صدق مفاهیم فازی را تبیین کرده و شبهه فازی بودن را از کل موضوعات و محمولات مرتفع نمود. به این ترتیب روشن شد که اجمالا برخی از مفاهیم، بلکه نقطه اتکاء آنها، باید برای انسان یقین آور و غیرقابل فازی سازی باشند. تشریح مفهوم فازی سازی نیز به درک صحیح از آن و تبیین عدم تنافی آن با صدق امتناع تناقض منجر شد.

همچنین این مقاله بر تمرکز این بحث در مقوله مفاهیم ذهنی که تصویری از واقعیات را برای شناخت آدمی منعکس می‌کنند، تأکید نموده از صدور حکم درباره حقیقت جهان هستی *کما هو* (آنچنان که هست) خودداری ورزید.

زیرنویس ها

1- Crisp
2- Basic Concepts
3- Universe
4- α - cut
5- Well-defined
6- Graduated
7- Soft Computing
8- Type m fuzzy sets

مراجع

[۱] مرتضی مطهری، مجموعه آثار: پاورقی های اصول فلسفه و روش رئالیسم نوشته علامه طباطبایی، انتشارات حکمت، ۱۳۴۶.
[۲] علی شیروانی هرندی، ترجمه و شرح نهایة الحکمة، انتشارات الزهراء، ۱۳۷۴.
[۳] حمید پارسانیا، علم و فلسفه، انتشارات پژوهشگاه فرهنگ و اندیشه اسلامی، ۱۳۷۷.
[۴] محمدرضا المظفر، المنطق، انتشارات حکمت، ۱۳۷۵.
[۵] لطف الله نبوی، "مبانی منطق مجموعه ها"، نامه فلسفه، سال اول، شماره اول، ۱۳۷۶.
[۶] ماشاءالله ماشین چی، مجموعه های مشکک، انتشارات دانشگاه شهیدباهنر، ۱۳۷۹.

[7] D. Dubois, H. Prade, "On Fuzzy Syllogism", Comput. Intellig. , vol. 14, pp. 171-174, 1986.
[8] D. Dubois, H. Grahiseh, H. Prade, "Gradual Rules & The Approximation of Control Laws", Theorethical Aspects of Fuzzy Control, pp. 147-180, Wiley Publ. N.Y., 1986.
[9] E.H. Mamdani, S. Assilian, "An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller", Inter. Jour. Man Machine Studies, pp. 701-713, 1975.
[10] B. Kosko, *Fuzzy Thinking*: The New Science of Fuzzy Logic, Prentice Hall Publ., 1994.
[11] B. Kosko, "Fuzzy Systems as Universal Approximators", Proc. IEEE Int. Cont. Fuzzy Systems, pp. 1153-1162, San Diego, 1992.
[12] Sgarro, "Entropy and Information in the Management of the Uncertainty", Capitolo 5, http://mathsun1.univ.trieste.it/~sgarro/research.html, pp. 12, 2000 (Italian).
[13] L.X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall Publ., 1994.
[14] L.A. Zadeh, "Fuzzy Sets", Information & Control, pp. 338-359, 1965.
[15] L.A. Zadeh, "Fuzzy Logic = Computing with Words", IEEE, Trans. on Fuzzy Systems, vol. 4, no. 2, pp. 103-111, 1996.
[16] H.J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Academic Press, 1996.