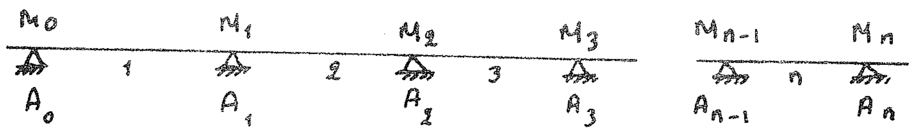
محاسبه لنگرهای هیپر استاتیک حاصله از کابل های پیش تنیده

از : مهندس ابراهیم چینی‌فروش

مقدمه ــ در تیرهای معین، محاسبه نیروی پیش تنیدگی وهمچنین تعیین نقطه اثر آن درمقاطع مختلف با درنظر گرفتن نیروهای خارجی بسادگی انجام میگیرد، درصورتیکه در اسکلت‌های نامعین یا تیرهای سرتاسری، بعلت بوجود آمدن عکس العمل‌های اضافی دراثر پیش‌تنیدگی و لنگرهای حاصله از این عکس العمل‌ها، خط اثر نیروی پیش تنیدگی بامنحنی کابل منطبق نمیباشد. بنابراین برای بررسی کامل خستگی‌های نهائی در هرمقطع باید مقدار و نقطه اثر نیروی پیش‌تنیدگی در آن مقطع معین باشد. برای پیدا کردن لنگرهای حاصله از نیروی پیش‌تنیدگی روش های مختلفی معمول است دراین مقاله چندتا از این روشها را مورد مطالعه قرار میدهیم :

الف ــ روش کلی استفاده از معادلات سه لنگری .

تیرسرتاسری مطابق شکل زیر رادر نظر گرفته اثر نیروی پیش‌تنیدگی برآنرا بررسی میکنیم



شکل ۱

هریک از دهنه‌ها باپنج پارامتر مشخص میشود این پارامترها عبارتند از:

طول دهنه $= Ln$ وممان اینرسی تیر $= In$

a_n و b_n و c_n ضرائب ثابت خمشی بوده مطابق فرمولهای زیر داده شده است

$$a_n=\int_0^{Ln}\frac{(L_n-x)^2}{L^2{}_nEIn}dx$$

$$b_n=\int_0^{Ln}\frac{x(L_n-x)dx}{Ln^2EIn}$$

$$c_n=\int_0^{Ln}\frac{x^2dx}{L_n{}^2EIn}$$

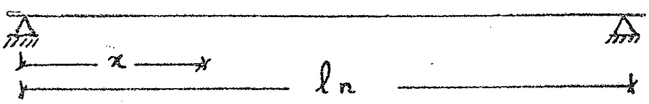
برای پیدا کردن لنگرهای گیرداری حاصله از نیروی پیش‌تنیدگــی در تکیه گاههای مختلف از معادلات سه‌لنگری استفاده میکنیم.

با در نظر گرفتن K_0 و K_n بترتیب ضرائب ارتجاعی چرخشی تکیه گاههای اول و آخر معادلات‌سه لنگری بصورت زیر درمیآید:

$$(A_0)\quad (K_0+a_1)M_0+b_1M_1=+\gamma_1 \qquad (1)$$
$$(A_1)\quad b_1M_0+(c_1+a_2)M_1+b_2M_2=-\delta_1+\gamma_2$$
$$(A_n)\quad b_nM_{n-1}+(K_n+C^n)M_n=-\delta_n$$

دراین معادلات δ_n و γ_n زوایای چرخشی قسمت‌چپ وراست تکیه گاه n میباشند که مطابق فرمولهای زیر داده‌شده‌است.

$$\delta n=+\int_0^{Ln}\frac{\mu_n x dx}{L_n EI_n}$$
$$\gamma_n=-\int_0^{Ln}\frac{M_n(L_n-x)}{L_n EI_n}dx$$



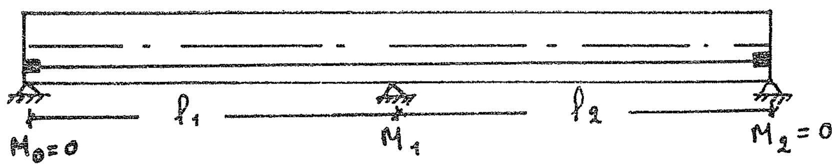
شکل ۲

μ_n لنگر خمشی در تیر روی دو تکیه گاه‌ساده میباشد.

اگر $-\delta n+\gamma_{n+1}$ در هــریك از معادلات دستگاه(۱) مساوی‌صفر شود مسلماً لنگرهای گیرداری M_0 و M_1 و M_n مساوی‌صفر خواهد شد، دراین‌صورت منحنی خط اثر نیروی پیش‌تنیدگی بر منحنی کابل منطبق شده دراین حالت‌کابل را کابل پایدار یا کابل موافق مینامند. بنابراین ملاحظه میشود برای‌محاسبه لنگرهای حاصله ازکابلهای پیش‌تنیدگی فقط کافی است زوایای چرخشی حاصله ازاین نیروها را درهر یك از دهنه‌ها بطور مستقل حساب کرده‌در معادلات سه‌لنگری قرارداد‌برای بهتر روشن‌شدن موضوع‌چندمثال حل میکنیم.

مسئله یكـ تیر دودهنه با مقطع ثابت ودهنه های‌مساوی را که تحت اثر نیروی پیش‌تنیدگی‌خطی مطابق‌شکل زیر قرار گرفته‌است در نظر گرفته مقدار لنگر رادرتکیه گاه وسطی‌حساب میکنیم (تکیه گاههای کناری تکیه گاه ساده‌بوده هیچگونه لنگری‌در آنها ایجاد نمیشود).

$$L_1=L_2=L$$
$$M_1(c_1+a_2)=-\delta_1+\gamma_2 \qquad (2)$$



شکل ۳

اول ضرائب ثابت a_2 و c_1 و همچنین زوایای چرخش δ_1 و γ_2 را ازفرمولهای مربوطه حساب‌میکنیم

$$a_2=\int_o^{L_2}\frac{(L_2-x)^2}{L_2{}^2EIn}dx=\frac{L_2}{3EI_n}$$

$$C_7=\int_o^{L_1}\frac{x^2dx}{L_1{}^2EIn}=\frac{L_1}{3EIn}$$

$$C_1=a_2=\frac{L}{3EI}$$

$$\delta_1=\int_o^{L_1}\frac{\mu_1 xdx}{L_1EIn}$$

$$\mu=-Fe$$

F نیروی پیش‌تنیدگی و e خارج ازمرکزیت کابل نسبت به مرکز ثقل مقطع میباشد .

بنابراین :

$$\delta_1=\int_o^{L_1}\frac{-Fexdx}{L_1EIn}=\frac{-FeL_1}{2EIn}$$

$$\gamma_2=-\int_o^{L_2}\frac{-Fexdx}{L_2EIn}=\frac{FeL_2}{2EIn}$$

$$\delta_1=-\gamma_2=\frac{-FeL}{2EI}$$

این مقادیر را در معادله (۲) قرارمیدهیم:

$$M_1(\frac{L}{3EI}+\frac{L}{3EI})=\frac{FeL}{2EI}+\frac{FeL}{2EI}$$

$$\frac{2M_1}{3}=\frac{2Fe}{2}$$

$$M_1=\frac{3}{2}Fe$$

برای بدست‌آوردن لنگر نهائی در مقطع S بفاصله x از تکیه‌گاه چپ هر دهنه باید این لنگر را به‌لنگر حاصله ازنیروی پیش‌تنیدگی در تیری روی دو تکیه‌گاه ساده اضافه‌کنیم بنابراین داریم :

شکل ۴

$$M_x=-Fe+\frac{x}{L}M$$

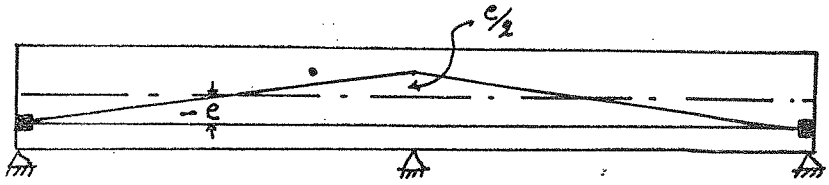
$$M_x=-Fe+\frac{x}{L}\times\frac{3}{2}Fe$$

$$M_x=Fe(\frac{3x}{2L}-1) \qquad (۳)$$

برای‌پیدا کردن‌خط اثر نیروی‌پیش‌فشردگی ازاین رابطه استفاده میکنیم :

$$ex=\frac{Mx}{F}$$

$$ex=\frac{Fe(\frac{3x}{2L}-1)}{F}=e\,(\frac{3x-1}{2L}) \qquad (٤)$$



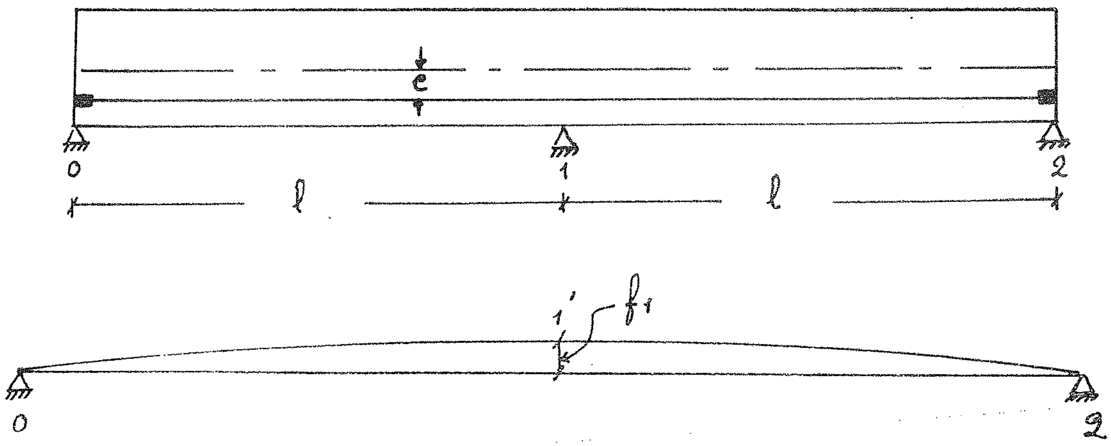
شکل ۵

برای رسم کردن خط اثر نیروی پیش‌تنید گی از معادله چهار استفاده میکنیم.

ب- روش فلش (خیز)

اگر تکیه گاه وسطی را حذف کنیم تیر دراثر نیروی پیش‌تنید گی ازحالت 2 و1و o بحالت2و1و o درمیآید.

برای اینکه تیر بحالت اولیه بر گردد بایستی درنقطه $1'$ نیروئی برابر R_1 بر تیر وارد کنیم این نیرو همان عکس العمل هیپر استاتیك میباشد بنابراین برای پیدا کردن R_1 مجموع خیزهای حاصله ازلنگر پیش‌تنید گی وعکس العمل R_1 را مساوی صفر قرار میدهیم.

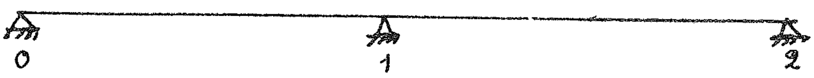


شکل ۶

فلش حاصله از نیروی پیش‌تنید گی که لنگری ثابت مساوی $M=-Fe$ ایجاد می کند برابر است با:

$$f_1=+\frac{ML'^2}{8EI} \qquad L'=2l$$

$$f_1=\frac{-Fe(2L)^2}{8EI}=-\frac{FeL^2}{2EI}$$



شکل ۷

فلش حاصله از عکس العمل R_1 مساویست با:

$$f_2 = \frac{R_1 L'^3}{48EI} = \frac{R(2L)^3}{48EI} = \frac{R_1 L^3}{6EI}$$

$$f_1 + f_2 = o$$

$$\frac{-FeL^2}{EI} + \frac{R_1 L^3}{6EI} = o$$

$$R_1 = \frac{3Fe}{L}$$

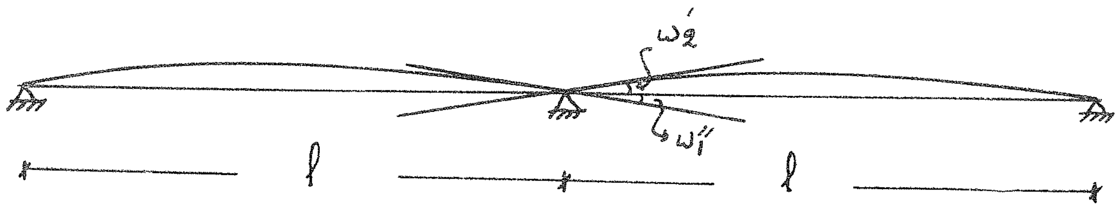
$$Ro = R_2 = + \frac{R_1}{2} = \frac{3Fe}{2L}$$

$$M_1 = R_o L = \frac{3Fe}{2L} \cdot L = \frac{3Fe}{2}$$

ج- روش چرخش

فرض می کنیم تیرهای o،1 و 2 ، 1 را در تکیه گاه وسط ازهم جدا کنیم، دراثر نیروی پیش تنید گی و لنگر حاصله از آن درهریك از تیرها ، تغیر شکلی مطابق شکل زیر بوجود میاید

لنگر حاصله از نیروی پیش تنید گی بایستی در هر دهنهٔ بتواند هر یك از این زوایا را مساوی صفر بکند اگر زاویه حاصله از لنگر M_1 از دهنه اول را $\underline{\omega_1''}$ وازدهنه دوم را $\underline{\omega'_2}$ نشان دهیم باید داشته باشیم



شکل ۸

$$\omega_1 + \underline{\omega''_1} = o$$
$$\omega'_2 + \underline{\omega'_2} = o$$

دراین مثال

$$\omega_1'' = \omega_2' = \frac{-Fel}{2EI}$$

$$\underline{\omega''_1} = \underline{\omega''_2} = \frac{M_1 l}{3EI}$$

$$\frac{-Fel}{2EI} + \frac{M_1 l}{3EI} = o$$

$$M_1 = \frac{3}{2} Fe$$