

# تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دوبعدی با استفاده از مدل یک بعدی WAM

مسعود شفیعی  
استاد

علی مددی  
دانشجوی دکترا

دانشکده برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

## چکیده

در این مقاله یک الگوریتم تطبیقی مبتنی بر توصیف یک بعدی WAM (Wave Advanced Model) و مدل شناسایی (مرجع) برای تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی در فرم فضای حالت ارائه می‌گردد. پایداری الگوریتم ارائه شده به روش لیابانوف بررسی شده و همچنین شرایط پایداری مجانبی آن بر حسب خواص سیستم دوبعدی مورد نظر و غنای بردار ورودی سیستم بدست می‌آید. در پایان مقاله نیز با ارائه شبیه سازی کامپیوتری توانایی عملی الگوریتم به تصویر کشیده می‌شود.

## کلمات کلیدی

سیستم‌های دوبعدی، مدل WAM، تخمین پارامترها، شناسایی پارامترها

## Adaptive Parameter Estimation of 2-D Systems Using the 1-D Wave Advanced Model

A. Madady  
Ph. D Student

M. Shafiee  
Professor

Electrical Engineering Department,  
Amir-Kabir University of Technology

## Abstract

*In this paper an adaptive algorithm based on 1-D representation of 2-D systems (Wave Advanced Model) is presented for estimating the parameters of 2-D systems in state-space form. The convergence (stability) of the algorithm is analyzed using the Lyapunov approach and also its asymptotic stability conditions are derived in terms of the system properties (locally controllability) and the generality of system input (persistent excitation conditions). The effectiveness of proposed procedure is illustrated by simulation.*

## Keywords

*Two-Dimensional Systems, WAM (Wave Advanced Model), Parameter Estimation, Parameter Identification.*

بیش از ربع قرن از ارائه اولین مدل فضای حالت در مورد سیستم‌های دو بعدی می‌گذرد [1]. در این مدت نظریه سیستم‌های دو بعدی تا حدود زیادی توسعه یافته و کاربردهای فراوانی نیز از جمله در طراحی فیلترهای دیجیتال دو بعدی، پردازش تصاویر، آنالیز سیگنال‌های زلزله و انفجارهای هسته‌ای، یادگیری ربات‌ها، فرآیندهای صنعتی مدل گسترده و آرایه‌های سیستم‌لیک پیدا کرده است [2]. با این وجود در مقایسه با تئوری سیستم‌های یک بعدی هنوز نکات و مسائل مبهم و حل نشده زیادی در مورد سیستم‌های دو بعدی وجود دارد. مشکل اساسی در اینجا است که گرچه مدل‌های مختلفی در فرم فضای حالت برای توصیف سیستم‌های دو بعدی ارائه شده‌اند [1, 3, 4] ولی با وجود تفاوت‌های ظاهری، در تمامی این مدل‌ها یک نکته مشترک می‌باشد و آن عدم توانایی در تبیین و تعریف مفهوم «حالت - State» برای یک سیستم دو بعدی است. لذا تمام این مدل‌ها از مفهوم «حالت محلی - Local state» استفاده کرده‌اند. لکن مدل دیگری در سال ۱۹۸۴ تحت عنوان مدل WAM (Wave Advanced Model) معرفی شده [5] که مفهوم «بردار حالت» را به سیستم‌های دو بعدی تعمیم داده است. مدل WAM بصورت یک بعدی بوده ولی در آن بعد بردار حالت با زمان افزایش می‌یابد. یک بعدی بودن مدل WAM این انگیزه را ایجاد می‌کند که به نحوی نظریه سیستم‌های یک بعدی را در مورد آن تعمیم داده و بدین ترتیب از نتایج موجود در بستر سیستم‌های یک بعدی در حل مسائل سیستم‌های دو بعدی استفاده کنیم. در این راستا پایداری و پایدارسازی [6,7,8]، کنترل بهینه [10]، تخمین بردار حالت [11] و کنترل پذیری و رؤیت پذیری [14] مدل WAM مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از مسائلی که اخیراً مطرح شده و در طراحی فیلترهای خود تنظیم (Self Tuning) دو بعدی و کنترل تطبیقی فرآیندهای تولید کاغذ و پلاستیک کاربرد پیدا کرده است [12,13] استفاده از الگوریتم‌ها و روش‌های تطبیقی در مورد سیستم‌های دو بعدی می‌باشد. همانند حالت یک بعدی در سیستم‌های دو بعدی نیز اولین و مهمترین مرحله در ایجاد یک روش تطبیقی چه برای استفاده در فیلترینگ و چه کنترل، تخمین پارامترهای نامعلوم می‌باشد. بطور مثال با ترکیب الگوریتم تخمین پارامترهای یک سیستم دو بعدی که پارامترهای نامعلوم است با هر کدام از کنترل کننده‌های کلاسیک دو بعدی (نظیر کنترل کننده مینیمم واریانس و یا کنترل کننده فیدبک حالت) یک کنترل کننده تطبیقی خود تنظیم دو بعدی جهت کنترل سیستم دو بعدی مورد نظر بدست می‌آید. به همین دلیل الگوریتم‌های تخمین پارامترهای

سیستم‌های دو بعدی حائز اهمیت هستند. در مرجع [13] مسئله تخمین پارامترهای سیستم‌های دو بعدی بررسی شده و با استفاده از شیوه RLS (Recursive Least Square) یک الگوریتم ارائه گردیده است. اما در آنجا برای توصیف سیستم‌های دو بعدی فقط یک نوع معادله تفاضلی (ARMA) خاص که در فرآیند تولید کاغذ استفاده دارد در نظر گرفته شده و در نتیجه قابل تعمیم به فرم کلی یعنی معادله فضای حالت نیست. همچنین همگرایی (پایداری) الگوریتم ارائه شده مورد تجزیه و تحلیل قرار نگرفته و برای نشان دادن صحت عملکرد آن فقط به شبیه سازی بسنده شده است. در مرجع [15] با در نظر گرفتن توصیف فضای حالت برای سیستم دو بعدی این مسئله مورد مطالعه قرار گرفته و با استفاده از مدل شناسایی (مرجع) یک الگوریتم تخمین تطبیقی دو بعدی بدست آمده است. در این مقاله هدف حل مسئله فوق از طریق مدل WAM می‌باشد، تا مشاهده شود از این طریق جواب به چه صورت بوده و نتایج آن با نتایج [15] مقایسه گردد. این مقاله چنین سازماندهی شده که در قسمت ۱ مسئله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی تعریف شده، در قسمت ۲ مدل WAM توضیح داده می‌شود و با استفاده از آن مسئله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی بازگو می‌گردد و در قسمت ۳ الگوریتم مورد نظر مقاله ارائه می‌شود. در قسمت ۴ و ۵ به ترتیب پایداری و پایداری مجانبی الگوریتم ارائه شده، بررسی گردیده، در قسمت ۶ نتیجه شبیه سازی آورده می‌شود. در پایان نیز نتیجه گیری انجام می‌گیرد.

## ۱- مسئله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دو بعدی

برای توصیف سیستم‌های دو بعدی در فرم فضای حالت مدل‌های مختلفی توسط محققان ارائه شده [1,3,4] که از مهمترین آنها می‌توان به مدل‌های GR (Givone Roesser)، FM (Fornasini Marchesini) و FTR اشاره کرد. از آنجا که مدل GR درجه اول بوده و از طرفی براحتی قابل توسعه به حالت‌های چند بعدی نیز می‌باشد، لذا این مدل دارای مقبولیت بیشتری بوده و در اکثر مقالات مربوط به سیستم‌های دو بعدی از آن استفاده شده و امروزه به عنوان مدل استاندارد سیستم‌های دو بعدی پذیرفته شده است. لذا در اینجا هم برای توصیف سیستم‌های دو بعدی از مدل GR که به صورت زیر است استفاده می‌کنیم:

$$v(n) = \text{Col} [u(0, n), u(1, n-1), \dots, u(n-1, 1), u(n, 0)]$$

$$f(n) = \text{Col} [x^h(0, n), x^v(n, 0)] \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Col بیانگر آرایش ستونی است.

با توجه به تعاریف (2) و رابطه (1) بردار  $\phi(n+1)$  بصورت زیر بدست می آید [5]:

$$\phi(n+1) = A(n)\phi(n) + B(n)v(n) + C(n)f(n) \quad (3)$$

$$n=1, 2, \dots$$

که در آن ماتریس های  $A(n)$ ،  $B(n)$  و  $C(n)$  برحسب ماتریس های ضرایب سیستم (1) دارای چنین ساختاری هستند [5]:

$$A(n) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad B(n) = \begin{bmatrix} B_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix} \quad C(n) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & A_4 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ماتریس های  $A(n)$ ،  $B(n)$  و  $C(n)$  دارای  $(n+1)m$  سطر و به ترتیب  $nm$ ،  $(n+1)p$  و  $m$  ستون هستند ( $m=m_1+m_2$ ). رابطه (3) مدل WAM (Wave Advanced Model) نامیده شده [5] و در این مدل  $\phi(n)$  بردار حالت،  $v(n)$  بردار ورودی و  $f(n)$  بردار شرایط مرزی است. این مدل یک بعدی بوده ولی در آن ابعاد بردارهای حالت و ورودی و ماتریس های ضرایب با زمان  $(n)$  افزایش می یابد. به هر حال ساختار ماتریس های ضرایب برحسب ماتریس های سیستم (1) ثابت بوده و این مدل توانسته است مفهوم «بردار حالت» را به سیستم های دوبعدی تعمیم دهد.

اینک مسئله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم های دوبعدی در فرم فضای حالت را به کمک مدل WAM تعریف می کنیم:

با فرض اینکه در مدل (3) ماتریس های ضرایب ثابت و نامعلوم و دارای ساختار داده شده در رابطه (4) بوده و بردارهای  $\phi(n)$ ،  $v(n)$  و  $f(n)$  قابل اندازه گیری می باشند، چگونه می توان ماتریس های ضرایب را بطور تطبیقی تخمین

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (1)$$

که در آن  $x^h \in \mathcal{R}^{m_1}$  و  $x^v \in \mathcal{R}^{m_2}$  به ترتیب بردارهای حالت محلی افقی و قائم بوده و  $u \in \mathcal{R}^p$  نیز بردار ورودی است. ماتریس های ضرایب هم حقیقی بوده و دارای ابعاد مناسبند. بردارهای  $x^h(0, n)$  و  $x^v(n, 0)$  شرایط مرزی سیستم می باشند ( $n=0, 1, \dots$ ).

در ارتباط با سیستم (1) برای اختصار ماتریس های  $B, A$  و ماتریس پارامترها ( $\theta$ ) به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\theta = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_3 & A_4 & B_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

مسئله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم های دوبعدی در فرم فضای حالت چنین تعریف شده است [15]:  
با فرض اینکه در سیستم (1) ماتریس های ضرایب ثابت و نامعلوم بوده و بردارهای  $x^h$  و  $x^v$  و  $u$  قابل اندازه گیری اند، چگونه می توان ماتریس های ضرایب را بطور تطبیقی تخمین زد؟ بطوریکه اگر ماتریس  $\theta(i, j)$  تخمین ماتریس پارامترها ( $\theta$ ) در نقطه  $(i, j)$  باشد، داشته باشیم:

$$\lim_{i \text{ and/or } j \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(i, j) - \theta) = 0$$

اولین راه حل ارائه شده برای این مسئله در [15] منعکس شده است. آن راه حل مبتنی بر یک مدل شناسایی (مرجع) دوبعدی بوده و منجر به یک قانون تخمین تطبیقی دوبعدی پایدار برای تخمین ماتریس های ضرایب سیستم (1) شده است. در این مقاله می خواهیم به کمک مدل یک بعدی WAM به حل مسئله فوق پرداخته و نتایج بدست آمده را با روش [15] مقایسه نمائیم. لذا در قسمت بعدی مدل WAM را توضیح داده و مسئله فوق را در قالب مدل WAM تعریف می کنیم.

## ۲-۲. مدل WAM

برای معرفی مدل WAM بردارهای زیر تعریف می شوند

[5]:

$$\phi(n) = \text{Col} [x^v(0, n), x^h(1, n-1), x^v(1, n-1), \dots, x^h(n-1, 1), x^v(n-1, 1), x^h(n, 0)]$$

بطوریکه داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$$

برای نیل به این هدف برای تنظیم  $\hat{\theta}(n)$  رابطه کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \Delta(n)$$

که در آن  $\Delta(n)$  یک کمیت اصلاح‌گر است که باید بطور مناسب تعیین شود.

با توجه به این ایده بهینه‌سازی که «حرکت در جهت خلاف گرادیان موجب حداکثر کاهش می‌شود»، سعی می‌کنیم یک مقدار مناسب برای  $\Delta(n)$  ارائه دهیم. برای این منظور تابع شاخص درجه دو زیر را در نظر می‌گیریم:

$$g(n) = \frac{1}{2} E^T(n) Q(n) E^T(n) \quad (8)$$

که در آن بردار خطای  $E(n)$  چنین تعریف می‌شود و نشان‌دهنده ترانزاده می‌باشد:

$$E(n) = I(n) e(n) \quad (9)$$

$e(n)$  خطای بین بردار حالت سیستم (۳) و مدل شناسای (۵) بوده، یعنی:

$$e(n) = \phi_M(n) - \phi(n) \quad (10)$$

و  $I(n)$  یک ماتریس بلوک قطری و غیر منفرد (غیر سینگولار) به شرح زیر است:

$$I(n) = \begin{bmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J \end{bmatrix}_{mn \times mn}, \quad J = \begin{bmatrix} 0_{m_1 \times m_2} & I_{m_1 \times m_1} \\ I_{m_2 \times m_1} & 0_{m_2 \times m_2} \end{bmatrix}, \quad m = m_1 + m_2 \quad (11)$$

ماتریس  $Q(n)$  نیز که باید یک ماتریس متقارن مثبت معین (Positive definite) باشد بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$Q(n) = \begin{bmatrix} P(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P(n) \end{bmatrix}_{mn \times mn} \quad (12)$$

زده؟ بطوریکه اگر ماتریس  $\hat{\theta}(n)$  تخمین ماتریس پارامترهای سیستم (۱) (یعنی ماتریس  $\theta$ ) در لحظه  $n$  باشد، داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\theta}(n) - \theta) = 0$$

در قسمت بعدی مسئله فوق‌الذکر حل می‌شود.

### ۳- حل مسئله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دوبعدی با استفاده از مدل WAM

برای حل مسئله تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم‌های دوبعدی با استفاده از مدل WAM، مدل شناسایی (مرجع) WAM زیر را که هم ساختار با سیستم (۳) است، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \phi_M(n+1) &= \hat{A}(n+1) \phi(n) + \hat{B}(n+1) v(n) + \\ &\hat{C}(n+1) f(n) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن ماتریس‌های  $\hat{A}(n+1)$ ،  $\hat{B}(n+1)$  و  $\hat{C}(n+1)$  به ترتیب دارای ساختار ماتریس‌های  $A(n)$ ،  $B(n)$  و  $C(n)$  که در رابطه (۴) ارائه شده هستند، البته در آنها به جای  $A_i$  و  $B_j$  به ترتیب  $\hat{A}_i(n+1)$  و  $\hat{B}_j(n+1)$  جایگزین شده است. ( $i=1,2,3,4$   $j=1,2$ )

در این ماتریس‌ها  $\hat{A}_i(n)$  و  $\hat{B}_j(n)$  به ترتیب تخمین ماتریس‌های  $A_i$  و  $B_j$  در لحظه  $n$  هستند ( $i=1,2,3,4$   $j=1,2$ ). مدل شناسایی (۵) در واقع فرم WAM مدل مرجع دوبعدی زیر است:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_M^h(i+1, j) \\ x_M^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_1(n+1) & \hat{A}_2(n+1) \\ \hat{A}_3(n+1) & \hat{A}_4(n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \hat{B}_1(n+1) \\ \hat{B}_2(n+1) \end{bmatrix} u(i, j) \\ n &= i + j \quad i, j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

تخمین ماتریس پارامترها در لحظه  $n$  ( $\hat{\theta}(n)$ ) و خطای تخمین در لحظه  $n$  ( $\theta(n)$ ) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{\theta}(n) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(n) & \hat{A}_2(n) & \hat{B}_1(n) \\ \hat{A}_3(n) & \hat{A}_4(n) & \hat{B}_2(n) \end{bmatrix}, \quad \theta(n) = \hat{\theta}(n) - \theta \quad (7)$$

قدم بعدی یافتن قانونی تطبیقی برای تنظیم  $\hat{\theta}(n)$  است،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = 0$$

قضیه پایداری - اگر طول گام  $\mu(n)$  در محدوده زیر انتخاب شود:

$$0 < \mu(n) < \frac{2}{\lambda_{\max}(P(n)) \sum_{k=1}^n z_k^T(n) \Gamma z_k(n)} \quad (17)$$

آنگاه الگوریتم (۱۶) پایدار است ( $\lambda_{\max}$  نشان دهنده بزرگترین مقدار ویژه می باشد).

اثبات:

تابع  $W(n) = \text{Trace}[\theta(n) \Gamma^{-1} \theta^T(n)]$  را به عنوان کاندید تابع لیاپانوف در نظر می گیریم (Trace بیانگر مجموع عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس می باشد)، محاسبه  $\Delta W(n)$  منجر به نتیجه زیر می شود:

$$\Delta W(n) = W(n+1) - W(n) = -E^T(n) H(n) E(n) \quad (18)$$

که در آن ماتریس  $H(n)$  چنین است

$$H(n) = 2\mu(n) \begin{bmatrix} P(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(n) \end{bmatrix}$$

$$\mu^2(n) \begin{bmatrix} \mu_{11}(n) P^2(n) & \dots & \mu_{1n}(n) P^2(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{ij}(n) P^2(n) & \dots & \vdots \\ \mu_{n1}(n) P^2(n) & \dots & \mu_{nn}(n) P^2(n) \end{bmatrix} \quad (19)$$

اسکالرهایی  $\mu_{ij}(n)$  نیز از این قرارند:

$$\mu_{ij}(n) = z_i^T(n) \Gamma z_j(n) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

از آنجا که ماتریس  $\Gamma$  متقارن و مثبت معین است، پس ماتریس غیر منفرد (غیر سینگولار)  $\Omega$  یافت می شود بطوریکه داشته باشیم:

$$\Gamma = \Omega^T \Omega$$

و  $P(n) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  یک ماتریس متقارن مثبت معین است. اکنون مقدار کمیت اصلاحی  $\Delta(n)$  را چنین در نظر می گیریم:

$$\Delta(n) = \mu(n) \left( -\frac{\nabla g(n)}{\nabla \hat{\theta}(n)} \right) \Gamma \quad (13)$$

که در آن  $\mu(n)$  یک اسکالر مثبت قابل انتخاب بوده و طول گام نامیده می شود و  $\Gamma \in \mathcal{R}^{m \times m}$  یک ماتریس متقارن مثبت معین است ( $f=m+p$ ).

محاسبه  $\frac{\nabla g(n)}{\nabla \hat{\theta}(n)}$  به نتیجه زیر منجر می شود:

$$\frac{\nabla g(n)}{\nabla \hat{\theta}(n)} = P(n) \sum_{k=1}^n e_k(n) z_k^T(n) \quad (14)$$

که در آن  $z_k(n)$  و  $e_k(n)$  از این قرارند

$$z_k(n) = \begin{bmatrix} x^h(k-1, n-k) \\ x^v(k-1, n-k) \\ u(k-1, n-k) \end{bmatrix}$$

$$e_k(n) = \begin{bmatrix} x_M^h(k, n-k) \\ x_M^v(k-1, n-k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^h(k, n-k) \\ x^v(k-1, n-k+1) \end{bmatrix} = \theta(n) z_k(n)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$(15)$$

لذا با توجه به روابط (۱۳) و (۱۴) نحوه تنظیم  $\hat{\theta}(n)$  یعنی الگوریتم تطبیقی مورد نظر برای تخمین ماتریس پارامترهای سیستم دویعدی (۱) (ماتریس  $\theta$ ) با استفاده از مدل WAM چنین بدست می آید:

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) - \mu(n) \left( P(n) \sum_{k=1}^n e_k(n) z_k^T(n) \right) \Gamma \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

## ۴- بررسی پایداری الگوریتم تخمین

در این قسمت پایداری الگوریتم تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم های دویعدی با استفاده از مدل WAM که در رابطه (۱۶) بدست آمد، بررسی می شود. منظور از پایداری الگوریتم مذکور گرایش اختلاف بین بردارهای حالت سیستم (۳) و مدل شناسایی (۵) به سمت صفر است، یعنی داشته باشیم:

از رابطه (۲۶) مشخص است که شرط لازم و کافی برای اینکه عبارت  $X^T H(n) X$  به ازاء هر  $X \neq 0$  مثبت باشد (یعنی ماتریس  $H(n)$  مثبت معین باشد) این است که عبارت زیر به ازاء هر بردار  $[y_{1k} y_{2k} \dots y_{nk}]^T \neq 0$  و به ازاء هر  $k = 1, 2, \dots, m$  مثبت شود:

$$g_k(n) = \lambda_k(n) \sum_{i=1}^n y_{ik}^2 - \frac{\mu(n)}{2} \lambda_k^2(n) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij}(n) y_{ik} y_{jk} \quad (27)$$

عبارت فوق را به شکل ماتریسی زیر می توان تبدیل کرد:

$$g_k(n) = \lambda_k(n) Y_k^T(n) S_k(n) Y_k(n) \quad (28)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

که در آن:

$$S_k(n) = I - \frac{\mu(n)}{2} \lambda_k(n) T(n)$$

$$T(n) = \begin{bmatrix} \mu_{11}(n) & \mu_{12}(n) & \dots & \mu_{1n}(n) \\ \mu_{21}(n) & \mu_{22}(n) & \dots & \mu_{2n}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(n) & \mu_{n2}(n) & \dots & \mu_{nn}(n) \end{bmatrix}$$

$$Y_k^T(n) = [y_{1k} \ y_{2k} \ \dots \ y_{nk}] \quad (29)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

لذا برای مثبت معین بودن ماتریس  $H(n)$  لازم و کافی است ماتریس های  $S_k(n)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) مثبت معین باشند و برای تحقق این منظور باید تمام مقادیر ویژه ماتریس های مذکور که به صورت زیر هستند مثبت باشند:

$$\lambda(S_k(n)) = 1 - \frac{\mu(n)}{2} \lambda_k(n) \lambda(T(n)) \quad (30)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

که در آن  $\lambda(T(n))$  و  $\lambda(S_k(n))$  به ترتیب مقادیر ویژه ماتریس های  $T(n)$  و  $S_k(n)$  می باشند. پس برای مثبت معین بودن ماتریس  $H(n)$  باید داشته باشیم:

$$0 < 1 - \frac{\mu(n)}{2} \lambda_k(n) \lambda_{\max}(T(n)) \quad (31)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

پس اسکالرهایی  $\mu_{ij}(n)$  را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mu_{ij}(n) = \bar{z}_i^T(n), \bar{z}_j(n) \quad \text{و} \quad \bar{z}_i(n) = \Omega z_i(n) \quad (21)$$

با توجه به رابطه (۱۸) شرایط مثبت معین (Positive definite) شدن ماتریس  $H(n)$  را بررسی می کنیم، برای این منظور بردار  $X$  را به صورت زیر در نظر گرفته:

$$X = [X_1^T \ X_2^T \ \dots \ X_n^T]^T, \quad X_i \in \mathfrak{R}^m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

و عبارت  $X^T H(n) X$  را تشکیل می دهیم:

$$X^T H(n) X = 2\mu(n) \sum_{i=1}^n X_i^T P(n) X_i - \mu^2(n) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij}(n) X_i^T P^2(n) X_j \quad (23)$$

ماتریس های  $P(n)$  و  $P^2(n)$  را به فرم جردن می نویسیم:

$$P(n) = L^T(n) \Lambda(n) L(n), \quad P^2(n) = L^T(n) \Lambda^2(n) L(n)$$

$$\Lambda(n) = \begin{bmatrix} \lambda_1(n) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m(n) \end{bmatrix} \quad (24)$$

که در آن  $\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_m(n)$  مقادیر ویژه ماتریس  $P(n)$  بوده و  $L(n)$  یک ماتریس متقارن متعامد است ( $L^{-1}(n) = L^T(n)$ ).

بردارهای  $X_i$  و  $Y_i$  را چنین در نظر می گیریم:

$$X_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{im}]^T$$

$$Y_i = LX_i = [y_{i1} \ y_{i2} \ \dots \ y_{im}]^T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

لذا عبارت  $X^T H(n) X$  به صورت زیر خواهد شد:

$$X^T H(n) X = 2\mu(n) \sum_{k=1}^m \left( \lambda_k(n) \sum_{i=1}^n y_{ik}^2 - \frac{\mu(n)}{2} \lambda_k^2(n) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij}(n) y_{ik} y_{jk} \right) \quad (26)$$

با توجه به روابط (۲۱) و (۲۹) می توان ماتریس  $T(n)$  را به صورت تجزیه کرد:

$$T(n) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1(n) & \bar{z}_2(n) & \dots & \bar{z}_n(n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{z}_1(n) & \bar{z}_2(n) & \dots & \bar{z}_n(n) \end{bmatrix} \quad (۳۲)$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(T(n)) &= \lambda_{\max} \left( \begin{bmatrix} \bar{z}_1(n) & \bar{z}_2(n) & \dots & \bar{z}_n(n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{z}_1(n) & \bar{z}_2(n) & \dots & \bar{z}_n(n) \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda_{\max} \left( \begin{bmatrix} \bar{z}_1(n) & \bar{z}_2(n) & \dots & \bar{z}_n(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1(n) & \bar{z}_2(n) & \dots & \bar{z}_n(n) \end{bmatrix}^T \right) \\ &= \lambda_{\max} \left( \sum_{i=1}^n \bar{z}_i(n) \bar{z}_i^T(n) \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{\max} \left( \bar{z}_i(n) \bar{z}_i^T(n) \right) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i^T(n) \bar{z}_i(n) \end{aligned} \quad (۳۳)$$

با توجه به (۲۱) و (۳۳) شرط مثبت بودن ماتریس  $H(n)$  چنین خواهد شد:

$$\frac{\mu(n)}{2} \lambda_k(n) \sum_{i=1}^n \bar{z}_i^T(n) \bar{z}_i(n) < 1$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

رابطه فوق معادل رابطه (۱۷) است. پس اگر طول گام  $\mu(n)$  طبق رابطه (۱۷) انتخاب شود آنگاه  $\Delta W(n) \leq 0$  بوده و الگوریتم تخمین تطبیقی مورد نظر پایدار است. بدین ترتیب اثبات قضیه پایداری به پایان می رسد.

## ۵- بررسی پایداری مجانبی الگوریتم تخمین

در این قسمت پایداری مجانبی الگوریتم تخمین مورد بحث این مقاله که در رابطه (۱۶) ارائه شده است بررسی می شود. در واقع با فرض پایدار بودن این الگوریتم می خواهیم شرایطی بر حسب ویژگی های سیستم (۱) و بردار ورودی آن بدست آوریم تا پایداری مجانبی تضمین شود، یعنی از فرض  $e(n)=0$  به نتیجه  $\theta(n)=0$  برسیم. البته در ترکیب الگوریتم تخمین پارامترها با یک کنترل کننده کلاسیک دو بعدی و حصول یک کنترل کننده دو بعدی خود تنظیم، پایداری الگوریتم تخمین کافی بوده و نیازی به پایداری مجانبی آن نیست. ولی اگر هدف از بکارگیری الگوریتم تخمین بدست آوردن مقدار دقیق پارامترهای نامعلوم سیستم باشد پایداری مجانبی نیز ضروری است.

**قضیه پایداری مجانبی** - اگر الگوریتم تخمین (۱۶) پایدار باشد و سیستم دو بعدی (۱) کنترل پذیر محلی بوده (برای دیدن تعریف کنترل پذیری محلی به مرجع [۱] رجوع شود) و بردار ورودی آن به اندازه کافی غنی انتخاب شود بطوریکه اعداد  $n_1$  و  $n_2$  وجود داشته باشند تا ماتریس  $W(k, l, n_1, n_2)$  در رابطه (۵۳) به ازاء هر نقطه شروع دلخواه  $(k, l)$  دارای رتبه کامل ستونی شود، آنگاه این الگوریتم دارای پایداری مجانبی نیز خواهد بود.

### اثبات:

از پایدار بودن الگوریتم می توان چنین استنباط کرد که عددی مثل  $N$  وجود دارد، بطوریکه:

$$e(n) = E(n) = 0 \quad \forall n \geq N - 1 \quad (۳۴)$$

پس از (۱۶) نتیجه می گیریم برای  $n \geq N$  ماتریس های  $\hat{\theta}(n)$  و  $\theta(n)$  مقادیر ثابتی مثلاً به ترتیب به اسم  $\hat{\theta}$  و  $\psi$  هستند. با توجه به این نکته و با استفاده از رابطه (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(n) &= \hat{\theta}, \theta(n) = \psi = \begin{bmatrix} \psi_{1_{\max}} & \psi_{2_{\max}} \end{bmatrix} \\ Z_k(n) &= 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad n \geq N \end{aligned} \quad (۳۵)$$

مفهوم رابطه (۳۵) این است که در ناحیه  $\Omega_N = \{(i, j) \mid N \leq i + j\}$  بین بردارهای  $x^h, x^v$  و  $u$  رابطه زیر حاکم است

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \\ u(i, j) \end{bmatrix} = 0 \quad (۳۶)$$

از طرفی بین  $x^h, x^v$  و  $u$  در ربع اول یعنی ناحیه  $\{(i, j) \mid 0 \leq i, 0 \leq j\}$  طبق توصیف دینامیک سیستم رابطه (۱) نیز برقرار است. اگر اپراتورهای شیف  $S_1$  و  $S_2$  به صورت  $S_1 x(i, j) = x(i+1, j)$ ,  $S_2 x(i, j) = x(i, j+1)$  در نظر گرفته شوند، آنگاه از (۱) نتیجه می شود:

$$\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 I_{m_1} - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & S_2 I_{m_2} - A_4 \end{bmatrix}^{-1} B u(i, j) \quad (۳۷)$$

اپراتور معکوس موجود در (۳۷) را می توانیم به صورت زیر بسط دهیم [9]:

رابطه ماتریسی در می آوریم:

$$\sum_{s=1}^p V_s(k, l, n_1, n_2) = 0 \quad (44)$$

که در آن  $V_s(k, l, n_1, n_2)$  یک ماتریس به صورت زیر است:

$$V_s(k, l, n_1, n_2) = [V_{s0}(k, l, n_1) \quad V_{s1}(k, l, n_1) \quad \dots \quad V_{sn_2}(k, l, n_1)] \\ s=1, 2, \dots, p \quad (45)$$

بردارهای  $V_{st}(k, l, n_1)$  ( $t=0, 1, \dots, n_2$ ) دارای چنین ساختاری هستند

$$V_{st}(k, l, n_1) = \begin{bmatrix} f_{rs}(S_1, S_2) u_s(k, l+t) \\ f_{rs}(S_1, S_2) u_s(k+1, l+t) \\ \vdots \\ f_{rs}(S_1, S_2) u_s(k+n_1, l+t) \end{bmatrix} \quad s=1, 2, \dots, p \quad t=0, 1, \dots, n_2 \quad (46)$$

با توجه به تعریف عملگر  $f_{rs}(S_1, S_2)$  در رابطه (43) می توان بردار  $V_{st}(k, l, n_1)$  را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$V_{st}(k, l, n_1) = W_{st}(k, l, n_1) h_{rs} \quad (47)$$

که در آن  $W_{st}(k, l, n_1)$  یک ماتریس و  $h_{rs}$  یک بردار بوده و دارای ساختار زیر هستند:

$$W_{st}(k, l, n_1) = [W_{st}^0(k, l, n_1) \quad W_{st}^1(k, l, n_1) \quad \dots \quad W_{st}^{m_2}(k, l, n_1)] \\ s = 1, 2, \dots, p \quad t = 0, 1, \dots, n_2$$

$$W_{st}^q(k, l, n_1) = \begin{bmatrix} u_s(k+q, l+t) & u_s(k+q, l+t+1) & \dots & u_s(k+q, l+t+m_2) \\ u_s(k+q+1, l+t) & u_s(k+q+1, l+t+1) & \dots & u_s(k+q+1, l+t+m_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_s(k+q+n_1, l+t) & u_s(k+q+n_1, l+t+1) & \dots & u_s(k+q+n_1, l+t+m_2) \end{bmatrix} \\ q=0, 1, \dots, m_1 \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} S_1 I_{m_1} - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & S_2 I_{m_2} - A_4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{m_2} R_{ij} S_1^i S_2^j}{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} a_{ij} S_1^i S_2^j} \quad (28)$$

که در آن اسکالرهایی  $a_{ij}$  و ماتریس های  $R_{ij}$  به ماتریس  $A$  در سیستم (1) بستگی داشته و مربوط به الگوریتم Leverier دوبعدی این ماتریس هستند [9]، در ضمن داریم:  $a_{m_1, m_2} = 1, R_{m_1, m_2} = 0$ : از مجموعه روابط (26)، (27) و (28) بدست می آید:

$$\left\{ \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} (\psi_1 R_{ij} B + a_{ij} \psi_2) S_1^i S_2^j \right\} u(k, l) = 0 \quad \forall (k, l) \in \Omega_N \quad (29)$$

رابطه فوق بیان می دارد هرگاه نقطه  $(k, l) \in \Omega_N$  باشد آنگاه رابطه ای بین مقادیر بردار ورودی در نقاط مستطیل  $\{(i, j) \mid k \leq i \leq k + m_1, l \leq j \leq l + m_2\}$  بصورت زیر برقرار است:

$$\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} (\psi_1 R_{ij} B + a_{ij} \psi_2) u(k+i, l+j) = 0 \quad (40)$$

عناصر بردارها و ماتریس های موجود در رابطه (29) را چنین در نظر می گیریم:

$$\psi_1 R_{ij} B = [\alpha_{rs}(i, j)]_{m \times p}, \quad \alpha_{rs}(m_1, m_2) = 0, \quad \psi_2 = [\beta_{rs}]_{m \times p} \\ u(k, l) = [u_1(k, l) \quad u_2(k, l) \quad \dots \quad u_p(k, l)]^T \quad (41)$$

با استفاده از (41) رابطه (29) چنین نوشته می شود:

$$\sum_{s=1}^p f_{rs}(S_1, S_2) u_s(k, l) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (42)$$

که در آن عملگر  $f_{rs}(S_1, S_2)$  به صورت زیر است:

$$f_{rs}(S_1, S_2) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} (\alpha_{rs}(i, j) + a_{ij} \beta_{rs}) S_1^i S_2^j \quad (43)$$

نقطه  $(k, l)$  را در ناحیه  $\Omega_N$  در نظر گرفته و رابطه (42) را برای نقاط مستطیل  $\{(i, j) \mid k \leq i \leq k + n_1, l \leq j \leq l + n_2\}$  که همگی در ناحیه  $\Omega_N$  قرار دارند می نویسیم  $n_1$  و  $n_2$  اعداد طبیعی دلخواهی هستند) و سپس این روابط را به شکل یک



$$H_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (54)$$

با توجه به نکته  $\alpha_{rs}(m_1, m_2) = 0$  که در رابطه (41) عنوان شده از رابطه (54) بدست می آید

$$\alpha_{rs}(i, j) = 0, \quad \beta_{rs} = 0$$

$$i=0, 1, \dots, m_1 \quad j=0, 1, \dots, m_2$$

$$r=1, 2, \dots, m \quad s=1, 2, \dots, p \quad (55)$$

بنابراین داریم:

$$\psi_1 R_{ij} B = 0 \quad i=0, 1, \dots, m_1 \quad j=0, 1, \dots, m_2 \quad (56-1)$$

$$\psi_2 = 0 \quad (56-2)$$

رابطه (56-1) بطور یکجا چنین است:

$$\psi_1 U = 0 \quad (57)$$

که در آن:

$$U = \begin{bmatrix} R_{00}B & R_{01}B & \dots & R_{0m_2}B & R_{10}B & R_{11}B & \dots & R_{1m_2}B \\ \dots & R_{m_1 0}B & R_{m_1 1}B & \dots & R_{m_1 m_2}B \end{bmatrix} \quad (58)$$

ماتریس  $U$  به ماتریس های ضرایب سیستم (1) یعنی به ماتریس های  $A$  و  $B$  بستگی دارد و ثابت شده است که سیستم کنترل پذیر محلی است اگر و تنها اگر این ماتریس دارای رتبه کامل سطری باشد [1]، پس اگر سیستم (1) کنترل پذیر محلی باشد از (57) نتیجه می شود:

$$\psi_1 = 0 \quad (59)$$

مفهوم نتایج بدست آمده در روابط (56-2) و (59) صفر بودن خطای تخمین پارامترها و پایداری مجانبی الگوریتم تخمین است و در اینجا اثبات قضیه پایداری مجانبی به پایان می رسد. ■

### شبیه سازی

همانگونه که در قضیه پایداری دیده شد در الگوریتم

$$h_{rs} = \begin{bmatrix} h_{rs}^0 \\ h_{rs}^1 \\ \vdots \\ h_{rs}^{m_1} \end{bmatrix}, \quad h_{rs}^q = \begin{bmatrix} \alpha_{rs}(q, 0) + a_{q0} \beta_{rs} \\ \alpha_{rs}(q, 1) + a_{q1} \beta_{rs} \\ \vdots \\ \alpha_{rs}(q, m_2) + a_{qm_2} \beta_{rs} \end{bmatrix} \quad q=0, 1, \dots, m_1 \quad (49)$$

اهمیت تجزیه (47) در آن است که ماتریس  $W_{st}(k, l, n_1)$  تنها به بردار ورودی و بردار  $h_{rs}$  تنها به پارامترها بستگی دارد. با توجه به (47) ماتریس  $V_s(k, l, n_1, n_2)$  چنین نوشته می شود:

$$V_s(k, l, n_1, n_2) = [W_{s0}(k, l, n_1) h_{rs} \quad W_{s1}(k, l, n_1) h_{rs} \quad \dots \quad W_{sn_2}(k, l, n_1) h_{rs}] \quad (50)$$

لذا رابطه مهم و اساسی (44) به شکل زیر بیان می شود:

$$\left[ \sum_{s=1}^p W_{s0}(k, l, n_1) h_{rs} \quad \sum_{s=1}^p W_{s1}(k, l, n_1) h_{rs} \quad \dots \quad \sum_{s=1}^p W_{sn_2}(k, l, n_1) h_{rs} \right] = 0 \quad (51)$$

و یا:

$$W(k, l, n_1, n_2) H_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (52)$$

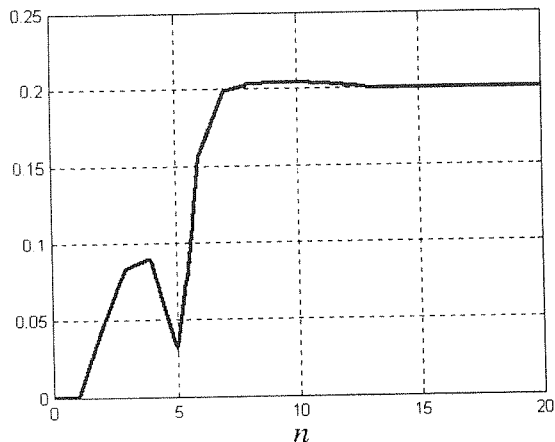
که در آن:

$$W(k, l, n_1, n_2) = \begin{bmatrix} W_{10}(k, l, n_1) & W_{20}(k, l, n_1) & \dots & W_{p0}(k, l, n_1) \\ W_{11}(k, l, n_1) & W_{21}(k, l, n_1) & \dots & W_{p1}(k, l, n_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{1n_2}(k, l, n_1) & W_{2n_2}(k, l, n_1) & \dots & W_{pn_2}(k, l, n_1) \end{bmatrix}, \quad H_r = \begin{bmatrix} h_{r1} \\ h_{r2} \\ \vdots \\ h_{rp} \end{bmatrix} \quad (53)$$

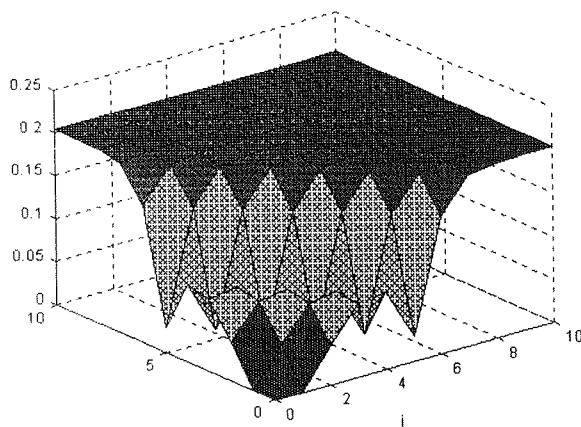
اکنون توجه خود را به رابطه (52) معطوف می داریم. ماتریس  $W(k, l, n_1, n_2)$  به بردار ورودی سیستم و بردار  $H_r$  به پارامترها بستگی دارد، اگر بردار ورودی سیستم به اندازه کافی غنی باشد یعنی اعداد  $n_1$  و  $n_2$  وجود داشته باشند بطوریکه ماتریس  $W(k, l, n_1, n_2)$  به ازاء هر نقطه شروع دلخواه دارای رتبه کامل ستونی شود آنگاه از (52) نتیجه می شود:

صورت دوبعد در شکل های (۱) الی (۱۲) آورده شده اند نشان می دهند که الگوریتم تخمین به مقدار واقعی پارامترها همگرا بوده و سرعت همگرایی بسیار زیاد است.

می توان برای ارزیابی عملکرد الگوریتم تخمین از تابع لیاپانوف تعریف شده در اثبات قضیه پایداری که به صورت  $W(n) = \text{Trace} [\theta(n) \Gamma^{-1} \theta^T(n)]$  است به عنوان یک شاخص استفاده کرد. در مورد شبیه سازی انجام شده در چند حالت و با مقادیر متفاوت برای طول گام  $\mu$  الگوریتم تخمین اجرا و مقادیر  $W(n)$  محاسبه شده و در شکل های ۱۳ و ۱۴ نمودارهای آن منعکس گردیده است. مشاهده می شود که بهترین حالت وقتی است که  $\mu$  حدود یک باشد. برای تجزیه و تحلیل دقیقتر این مسئله الگوریتم به ازاء  $\mu = 0, 0.001, 0.002, 0.003, \dots, 1, 999, 2$  اجرا و تغییرات کمیت  $\sum_{n=1}^N W(n)$  (با فرض  $N=10, 20, 30, 40, \dots, 990, 1000$ ) برحسب  $\mu$  بررسی شده است. نتایج بدست آمده از شبیه سازی نشان می دهند برای هر مقدار دلخواه  $N$  حداقل کمیت  $\sum_{n=1}^N W(n)$  به ازاء تقریباً  $\mu=1.05$  بدست می آید (به شکل های ۱۵ و ۱۶ رجوع شود).



شکل (۱) تخمین پارامتر  $a_1$  (نمایش بصورت یک بعدی).



شکل (۲) تخمین پارامتر  $a_1$  (نمایش بصورت دو بعدی).

تطبیقی ارائه شده در این مقاله برای تخمین پارامترهای سیستم های دوبعدی که مبتنی بر مدل WAM است، فاکتور قابل انتخابی به نام  $\mu(n)$  (طول گام) وجود دارد که انتخاب صحیح آن طبق رابطه (۱۷) موجب پایداری الگوریتم خواهد شد. اما محدوده تعیین شده توسط این رابطه مقدار ثابتی نیست و این موضوع انتخاب صحیح طول گام را با مشکل مواجه می سازد. با نرمالیزه کردن الگوریتم می توان این محدوده را به مقدار ثابتی تبدیل کرد. برای این منظور در الگوریتم فوق الذکر طول گام را چنین قرار می دهیم:

$$\mu(n) = \frac{\mu}{\delta + \lambda_{\max}(P(n)) \sum_{k=1}^T z_k^T(n) \Gamma z_k(n)}$$

که در آن  $\delta$  عدد اختیاری مثبت بسیار کوچکی است و برای جلوگیری از صفر شدن مخرج کسر بکار می رود. با این کار طول گام متغیر تبدیل به یک طول گام ثابت می شود و برای پایداری کافی است  $\mu$  را یک عدد ثابت بین صفر و دو در نظر بگیریم ( $0 < \mu < 2$ ). اکنون برای شبیه سازی و مشاهده نتیجه عملی سیستم زیر را که دارای شش پارامتر است در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(i, j)$$

$$m_1 = m_2 = p = 1, m = m_1 + m_2 = 2, f = m + p = 3$$

و فرض می کنیم مقدار واقعی پارامترها از این قرار باشد:

$$a_1 = 0.2, a_2 = 0.8, a_3 = -0.7, a_4 = 0.5, b_1 = 3, b_2 = -5$$

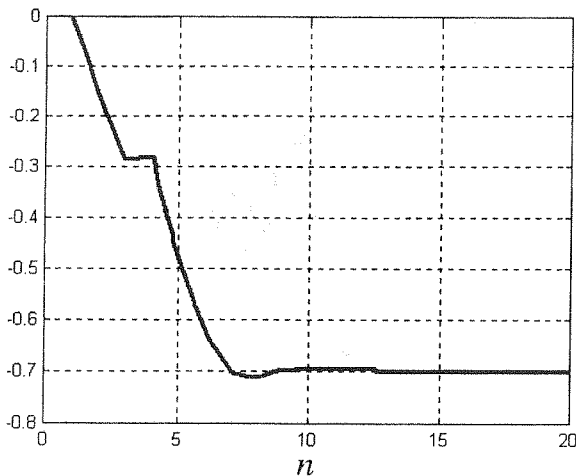
الگوریتم تخمین به صورت نرمالیزه (با پارامتر  $\delta=0.01$ ) و با صفر در نظر گرفتن شرایط اولیه (مقدار تخمین اولیه پارامترها در نقطه  $n=1$ ) و با مشخصات زیر بر ای تخمین پارامترهای سیستم مذکور بکار گرفته شد:  
۱- سیگنال ورودی و شرایط مرزی سیستم:

$$u(i, j) = \frac{(-1)^{(i+j)}}{1 + \sin(i+j)}, x^h(0, j) = x^v(i, 0) = 0$$

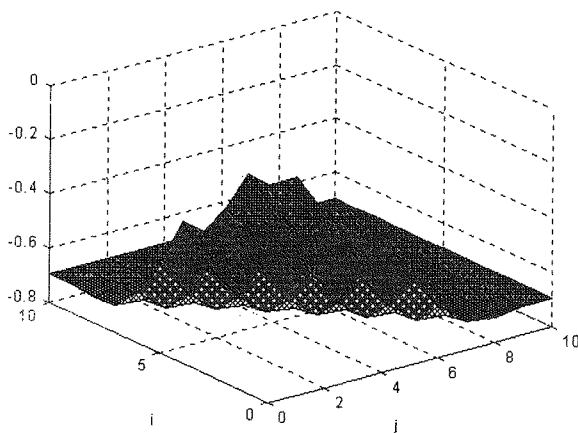
۲- ماتریس ها و طول گام الگوریتم:

$$P(n) = I_{2 \times 2}, \Gamma = I_{3 \times 3}, \mu = 1$$

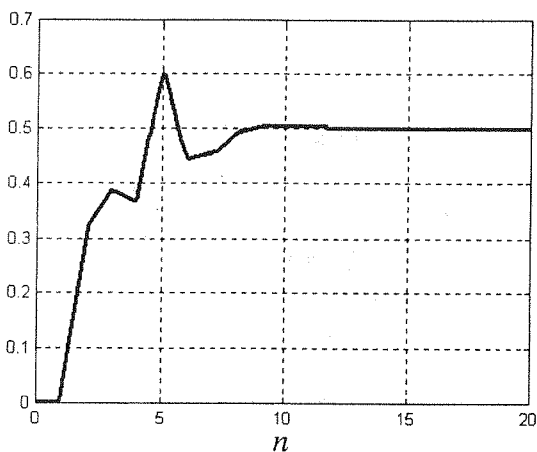
نتایج بدست آمده که هم به صورت یک بعدی و هم به



شکل (۵) تخمین پارامتر  $a_3$  (نمایش بصورت يك بعدی).



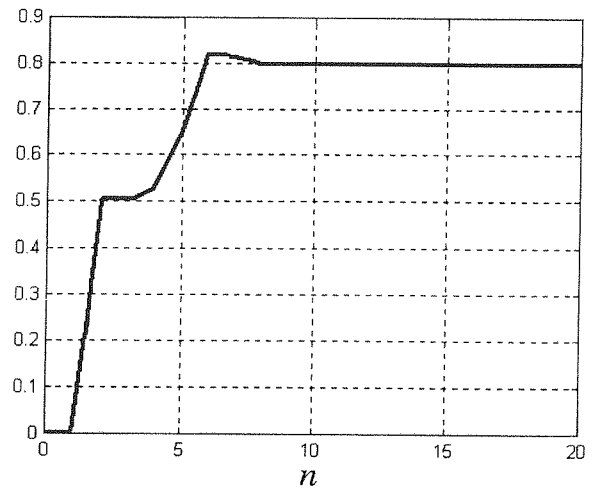
شکل (۶) تخمین پارامتر  $a_3$  (نمایش بصورت دو بعدی).



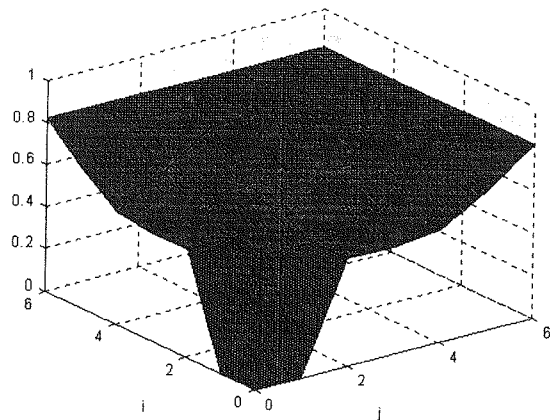
شکل (۷) تخمین پارامتر  $a_4$  (نمایش بصورت يك بعدی).

در نقطه  $n=5$  یک جهش به سمت بالا مشاهده می شود ولی به هر حال از نقطه  $n=12$  به بعد تخمین بدست آمده دقیقاً برابر مقدار واقعی پارامتر یعنی عدد 0.5 شده است.

در نمایش یک بعدی مشاهده می شود از نقطه  $n=7$  به بعد تخمین بدست آمده تقریباً برابر مقدار واقعی پارامتر شده است و در نمایش دوبعدی دیده می شود در هر جهتی از مبدأ (نقطه  $(0, 0)$ ) دور می شویم تخمین به مقدار واقعی پارامتر گرایش می کند.



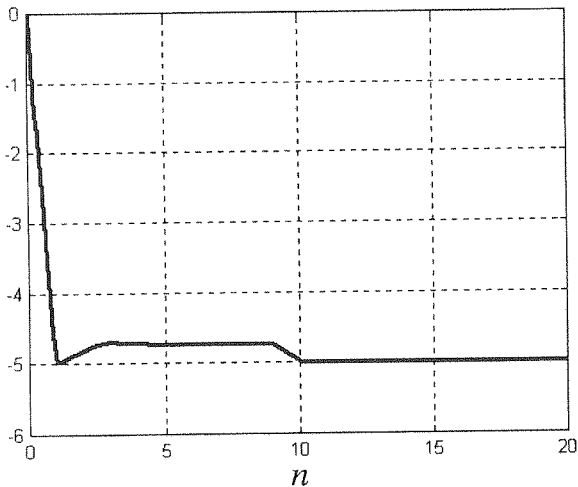
شکل (۳) تخمین پارامتر  $a_2$  (نمایش بصورت يك بعدی).



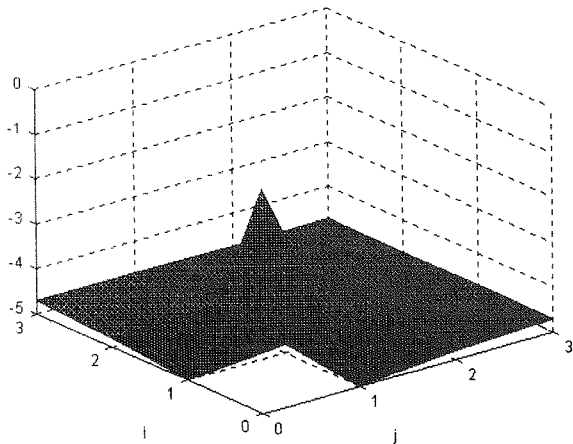
شکل (۴) تخمین پارامتر  $a_2$  (نمایش بصورت دو بعدی).

در نمایش یک بعدی مشاهده می شود از نقطه  $n=8$  به بعد تخمین بدست آمده دقیقاً برابر مقدار واقعی پارامتر یعنی عدد 0.8 شده است و در نمایش دوبعدی دیده می شود در هر جهتی از مبدأ (نقطه  $(0, 0)$ ) دور می شویم تخمین به مقدار واقعی پارامتر نزدیک می شود.

طبق نمودار شکل ۵ از نقطه  $n=7$  به بعد تخمین بدست آمده برای پارامتر  $a_3$  تقریباً برابر مقدار واقعی این پارامتر است و شکل ۶ هم همین موضوع را بصورت دوبعدی نشان می دهد.



شکل (۱۱) تخمین پارامتر  $b_2$  (نمایش بصورت يك بعدی).

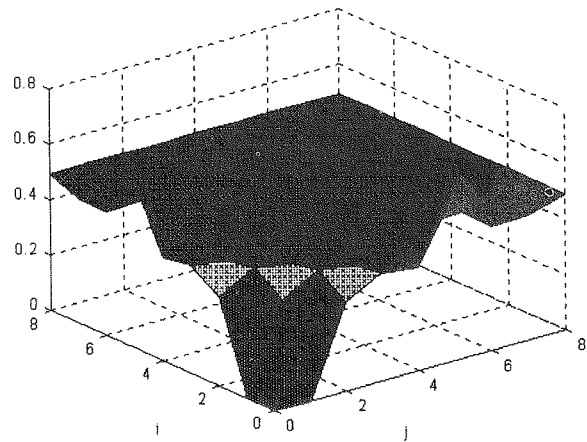


شکل (۱۴) تخمین پارامتر  $b_2$  (نمایش بصورت دو بعدی).

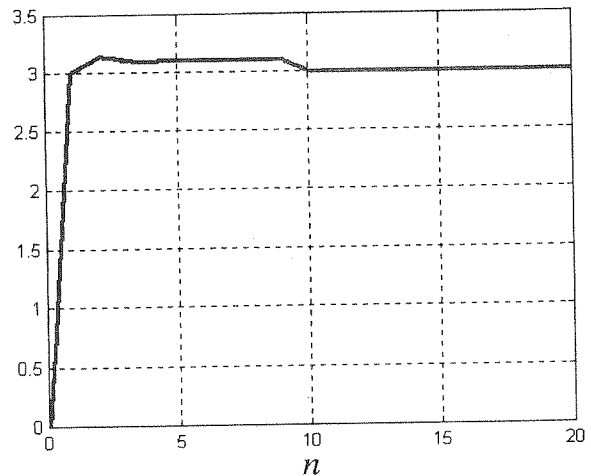
در اولین مرحله از تخمین (نقطه  $n=1$ ) خطای تخمین صفر شده، اما این وضعیت بین نقاط  $n=2$  و  $n=10$  به هم خورده و از نقطه  $n=10$  به بعد مجدداً تخمین بدست آمده برای همیشه با مقدار دقیق پارامتر  $b_2$  برابر شده است.

با توجه به شکل های ۱۳ و ۱۴ درمی یابیم که بهترین مقدار برای طول گام الگوریتم تخمین نرمالیزه شده ( $\mu$ ) حدود یک است، زیرا در این حالت در هر نقطه  $n$  شاخص  $W(n)$  کمترین مقدار خود را دارد.

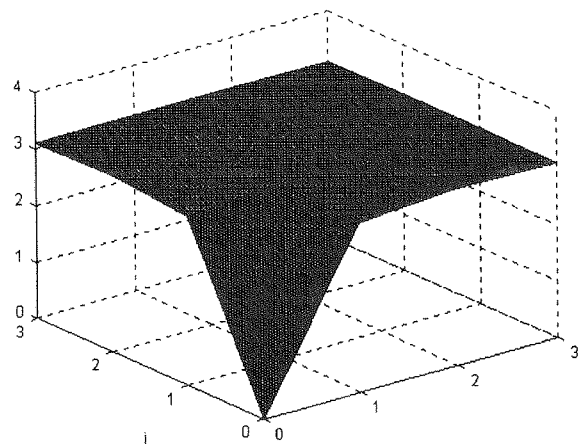
شبه سازی نشان می دهد به ازاء هر مقدار دلخواه  $N$ ، نمودار  $\sum_{n=1}^N W(n)$  در نقطه  $\mu=1.05$  مینیمم دارد. فرم کلی این نمودار در شکل های ۱۵ و ۱۶ مشاهده می شود. پس بهترین مقدار برای طول گام الگوریتم تخمین نرمالیزه شده ( $\mu$ ) تقریباً عدد ۱.۰۵ است.



شکل (۸) تخمین پارامتر  $a_4$  (نمایش بصورت دو بعدی).

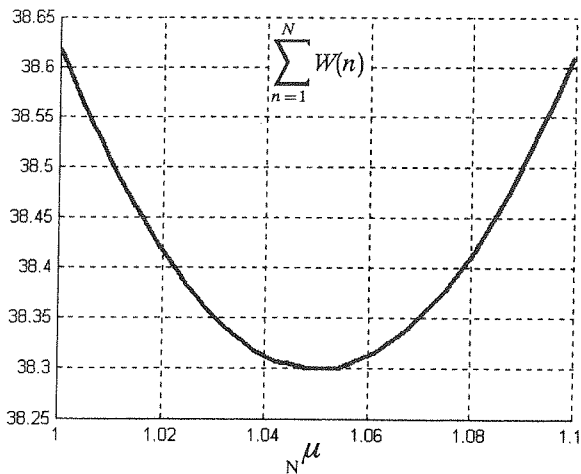


شکل (۹) تخمین پارامتر  $b_1$  (نمایش بصورت يك بعدی).



شکل (۱۰) تخمین پارامتر  $b_1$  (نمایش بصورت دو بعدی).

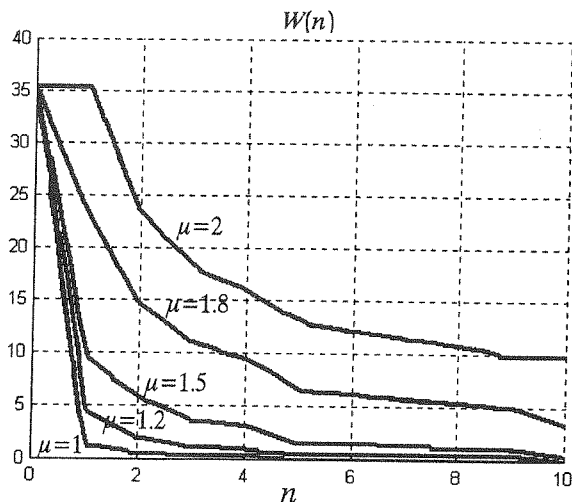
بین نقاط  $n=1$  الی  $n=10$  تخمین بدست آمده بیش از مقدار پارامتر است ولی از نقطه  $n=10$  به بعد خطای تخمین صفر است.



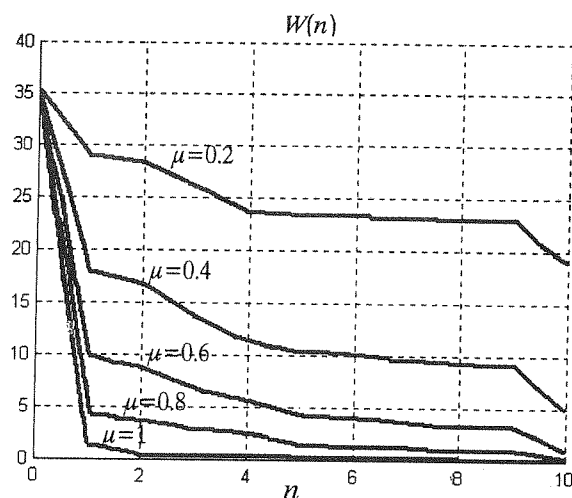
شکل (۱۶) تغییرات کمیت  $\sum_{n=1}^N W(n)$  بر حسب مقادیر مختلف طول گام  $\mu$

## ۷- نتیجه گیری

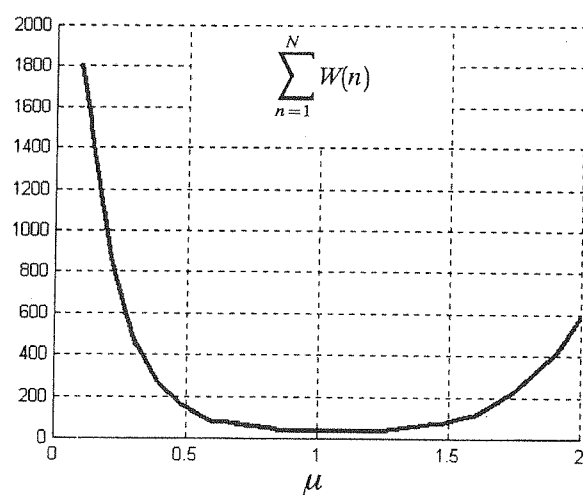
در این مقاله یک الگوریتم تطبیقی یک بعدی با استفاده از مدل WAM برای تخمین تطبیقی پارامترهای سیستم های دو بعدی بر مبنای مدل شناسایی (مرجع) ارائه شد و نشان داده شد که چگونه می توان در برخورد با سیستم های دوبعدی با استفاده از مدل WAM از روش های یک بعدی سود جست. درباره نحوه ایجاد این الگوریتم باید گفت با استفاده از خطای بین مدل شناسایی و سیستم که هر دو از نوع WAM هستند، یک سیاست مبتنی بر گرادینان برای تنظیم پارامترهای مدل شناسایی که به عنوان تخمین پارامترهای سیستم محسوب می شوند، ارائه گردید. برای بررسی پایداری الگوریتم یک تابع لیاپانوف مناسب پیشنهاد شد و با استفاده از تئوری لیاپانوف شرط پایداری برحسب طول گام قابل انتخاب الگوریتم بدست آمد. سپس پایداری مجانبی الگوریتم بررسی گردید و شرایط سیگنال ورودی سیستم که برای پایداری مجانبی الگوریتم تخمین لازم است تعیین شد. دانستن این شرایط در مورد سیگنال ورودی که در مباحث تخمین تطبیقی به آن شرایط ورودی غنی یا تحریک سمج (شرایط Persistent Excitation) گفته می شود [16]، در طراحی و انتخاب مناسب سیگنال ورودی هنگامی که هدف از استفاده از الگوریتم تخمین مشخص کردن مقدار دقیق پارامترهای نامعلوم سیستم است نقش بسزائی دارد. در بخش شبیه سازی الگوریتم نرمالیزه شد و با انجام شبیه سازی مشاهده گردید که الگوریتم ارائه شده از سرعت همگرایی فوق العاده ای برخوردار است. اگر برخی از پارامترهای سیستم دوبعدی مورد نظر معلوم باشند دیگر نیازی به تخمین آنها نخواهد بود و در این حالت برای استفاده از الگوریتم ارائه شده برای تخمین پارامترهای نامعلوم سیستم باید در مدل شناسایی بجای تخمین پارامترهای



شکل (۱۳) تغییرات  $W(n)$  بر حسب مقادیر مختلف طول گام  $\mu$ .



شکل (۱۴) تغییرات  $W(n)$  بر حسب مقادیر مختلف طول گام  $\mu$ .



شکل (۱۵) تغییرات کمیت  $\sum_{n=1}^N W(n)$  بر حسب مقادیر مختلف طول گام  $\mu$

معلوم سیستم، مقدار واقعی آنها را قرار داد.  
 در مقایسه روش ارائه شده در این مقاله و روش ارائه شده در [15] می توان به موارد زیر اشاره کرد:  
 ۱- اساسی ترین تفاوت این است که ماهیت روش [15] دوبعدی در حالیکه ماهیت روش این مقاله یک بعدی است. به همین خاطر روش [15] برای هر پارامتر نامعلوم سیستم در هر نقطه  $(i, j)$  تخمین های مجزایی ارائه می دهد در حالیکه از روش ارائه شده در این مقاله برای تمام نقاط واقع بر روی خط  $L_n = \{ (i, j) \mid 0 \leq i, 0 \leq j, i+j=n \}$  تخمین های مساوی بدست می آید.  
 ۲- در روش [15] در کنار الگوریتم اصلی دو الگوریتم فرعی

## مراجع

نیز برای تنظیم شرایط مرزی الگوریتم اصلی وجود دارند و این موضوع باعث پیچیدگی محاسبات می شود در حالیکه در روش جدید ارائه شده در این مقاله نیازی به الگوریتم های تنظیم کننده شرایط مرزی نیست.  
 ۳- در هر دو روش کنترل پذیری محلی سیستم دوبعدی تحت شناسایی برای پایداری مجانبی الگوریتم های تخمین لازم است.  
 ۴- هر دو روش را ب راحتی می توان به سیستم های بیش از دو بعد نیز بسط داد.  
 ۵- با توجه به شبیه سازی های انجام شده در هر دو روش سرعت همگرایی بسیار خوب است.

- september 1983.
- [10] M. Shafiee and M. Haji. Ramazanali, "The LQR Problem of variable coefficient 2-D systems using the Wave Advanced Model," Proc. of Int. Symp. MMAR'97, pp. 301-306, Poland Aug. 1997.
- [11] W. A. Porter and J. L. Aravena, "State estimation in discrete m-D systems," IEEE Trans. Automat. Contr. vol. AC-31, no. 3, pp. 280-283, March 1986.
- [12] W. P. Heath and P. E. Wellsted, "Self-tuning prediction and control for two-dimensional processes: Fixed parameter algorithms," INT. J. Control, vol-62, no. 1, pp. 65-107, 1995.
- [13] W. P. Heath and P. E. Wellsted, "Self-tuning prediction and control for two-dimensional processes part 2: parameter estimation, set-point tracking and offset handling," INT. J. Control, vol-65, no. 2, pp. 239-269, 1995.
- [14] مسعود شفیعی و پاکنوش کریم آقائی، «بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری مدل WAM» - مجموعه مقالات چهارمین کنفرانس مهندسی برق ایران (ICEE - 96) - صفحات ۷۶۶ الی ۷۷۴.
- [15] مسعود شفیعی و علی مددی، «شناسایی تطبیقی پارامترهای سیستم های دوبعدی» - مجموعه مقالات هفتمین کنفرانس مهندسی برق ایران (ICEE - 99) - صفحات ۱۶۹ الی ۱۷۸.
- [16] K. S. Narendra, "Stable Adaptive Systems", Book-1989 by Prentice-Hall, ISBN 0-13-540034-2.
- [1] R.P. Rosser, "A discrete state - space model for Linear image processing" IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-20, no. 1, pp. 1-10, February 1975.
- [2] T. Kaczorek, "Two dimensional linear systems, "Lecture notes in control and information science, vol. 68, springer-Verlag. Berlin, 1990.
- [3] E. Fornasini and G. Marchesini, "State space realization theory of 2-D filters," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-21, no. 4, pp. 484-492, August 1976.
- [4] J. Kurek, "The general state space model for a 2-D linear digital systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, no. 6, pp. 600-602, June 1985.
- [5] W. A. Porter and J. L. Aravena, "1-D Models for m-D Processes," IEEE Trans. Circuits and Sys., vol. CAS-31, pp. 742-744, Aug. 1984.
- [6] M. Shafiee, "Stabilization of the Wave Model," Ph. D. dissertation Dep. of E. E. Baton Rouge Louisiana state Uni. Dec. 1987.
- [7] M. Shafiee, "Output feedback stabilization of time varying 2-D systems," Proc of Int. Symp. MMAR'95, pp. 132-140, Poland Aug. 1995.
- [8] M. Shafiee, "Stability analysis of nonstationary 2-D systems," Proc of Int. Symp. ISIC'95, pp. 351-362, Singapore Sep. 1995.
- [9] S. G. Tzafestas and T. G. Pimenides, "Factorisation of 3-dimensional systems in state space," IEE proceeding, vol. 130, part D, no.5, pp. 231-242,