

# طراحی کنترل کننده $H_\infty$ برای رگلاسیون مقاوم سیستم های آشفته تکین

حمید رضا کریمی  
دانشجوی دکتری

محمد جواد یزدان پناه  
استادیار

گروه برق و کامپیوتر، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

## چکیده

در این مقاله رگلاسیون مقاوم<sup>1</sup> سیستم های آشفته تکین<sup>2</sup> خطی بررسی می گردد. در این راستا، یک روش جدید مدل کردن برای سیستم های مزبور با فرض پایدار بودن دینامیک های تند<sup>3</sup> سیستم معرفی می شود. برای این منظور قسمتی از دینامیک های تند به عنوان نامعینی<sup>4</sup> در سیستم منظور می گردند. بنابراین مرتبه دینامیکی سیستم، بدون نامعینی کمتر از سیستم اصلی خواهد بود. سپس برای سیستم کاهش مرتبه یافته، یک کنترل کننده  $H_\infty$  طراحی می شود. به نحوی که سیستم کاهش مرتبه یافته را پایدار نموده و در عین حال تأثیر دینامیک هایی که به عنوان نامعینی معرفی شده اند را روی بقیه دینامیک ها کاهش دهد. نشان داده می شود که بررغم تزویج<sup>5</sup> موجود بین دینامیک های نامعین و سایر دینامیک ها، کنترل کننده طراحی شده در حضور دینامیک های نامعین هم سیستم حلقه بسته را پایدار می کند. نتایج حاصله بر روی یک بازوی رباتیکی انعطاف پذیر<sup>6</sup> با شش مود انحراف<sup>7</sup> مطالعه می شوند.

## کلمات کلیدی

رگلاسیون مقاوم، کنترل کننده  $H_\infty$ ، سیستم های آشفته تکین.

(این پژوهش با استفاده از اعتبارات شورای پژوهشی دانشگاه تهران انجام گردیده است.)

## The design of $H_\infty$ Controller for Robust Regulation of Singularly Perturbed Systems

M. J. Yazdanpanah  
Assistant Professor

H. R. Karimi  
Ph.D. Student

Department of Electrical and Computer Engineering,  
Faculty of Engineering, University of Tehran

## Abstract

*This paper deals with the problem of  $H_\infty$  control of singularly perturbed linear continuous-time systems. The authors' attention is focused on the robust regulation of the system based on a new modelling approach under the assumption of norm-boundedness of the fast dynamics. In this approach, the fast dynamics may be treated as norm-bounded disturbance. Hence, the synthesis is performed for only the dominant or certain dynamics of the singularly perturbed system. It is shown that, in spite of coupling between the uncertain dynamics and dominant dynamics, the designed  $H_\infty$  controller stabilizes the overall closed-loop system, in the presence of norm-bounded disturbances. Finally, the proposed methodology in this paper is applied to a single-link flexible manipulator with six modes of deflection as fast dynamics.*

## Keywords

*Robust Regulation,  $H_\infty$  Controller, Singularly Perturbed Systems*

سیستم های کنترل آشفته تکین بطور گسترده از سه دهه گذشته مورد مطالعه قرار گرفته اند. یک روش مرسوم جهت برخورد با این سیستم ها، تکنیک کاهش یافته<sup>8</sup> نامیده می شود [۱]. طراحی کنترل کننده مرکب مبتنی بر طراحی های جداگانه برای زیر سیستم های کند و تند بطور سیستماتیک در [۲] مرور شده است.

تحقیقات بر روی سیستم های آشفته تکین به مفهوم  $H_{\infty}$  از اهمیت عملی زیادی برخوردار است، بطوری که توجه خاصی را در چند سال گذشته به خود جلب کرده است [۳-۵]. کنترل بهینه  $H_{\infty}$  سیستم های آشفته تکین خطی تحت اندازه گیری کامل و یا غیر کامل از متغیرهای حالت برای هر دو حالت زمان محدود و یا نامحدود با استفاده از تئوری بازی دیفرانسیلی<sup>9</sup> در [۶] و [۷] بررسی شده است. همچنین بسط های مجانبی<sup>10</sup> برای حل معادلات ریکاتی<sup>11</sup> تئوری بازی در [۸] مطالعه شده است و طریقه استفاده از آنها در کنترل  $H_{\infty}$  سیستم های آشفته تکین نشان داده شده است. بکارگیری روش نابرابری های ماتریسی خطی<sup>12</sup> (LMI) در تعیین کنترل کننده  $H_{\infty}$  سیستم های آشفته تکین برای نخستین بار در [۹] بیان شده است. اخیراً استفاده از تقریب های مرتبه بالا برای طراحی کنترل کننده جهت تضمین یک سطح عملکرد مطلوب، مبتنی بر تجزیه معادلات ریکاتی مرتبه کامل به معادلات کندوتند کاهش یافته در [۱۰] بررسی شده است. بطور کلی در موارد یاد شده کنترل زیر بهینه  $H_{\infty}$  برای زیر سیستم تند صورت می پذیرد و سپس طراحی با یک کنترل کننده زیر بهینه  $H_{\infty}$  برای زیر سیستم کند اصلاح شده تکمیل می گردد، بدیهی است که قابلیت تجزیه سیستم آشفته تکین اصلی و اعمال الگوریتم دو مرحله ای با فرض استاندارد بودن سیستم آشفته تکین حاصل شده است و در صورت نقض این فرض طراحی کنترل کننده  $H_{\infty}$  برای سیستم های (غیر استاندارد) مذکور در [۱۱] بررسی شده است. همچنین کنترل بهینه مربعی - غیر خطی زمان نامحدود، برای یک کلاس از سیستم های آشفته تکین غیر خطی در [۱۲] بررسی شده است، که بر اساس تجزیه کند و تند دقیق سیستم هامیلتونین و چند گونای تغییر ناپذیر<sup>13</sup> خاص، تقریب های مجانبی مرتبه بالا از فیدبک حالت بهینه و مسیر بهینه سیستم را ایجاد می کند. مسأله پایدارسازی یک کلاس از سیستم های نامعین آشفته تکین غیر خطی با این فرض که ورودی کنترل مقید باشد نیز در [۱۳] مطالعه شده است. طراحی کنترل کننده فیدبک حالت به روش  $H_{\infty}$  که پایداری مجانبی و نیز تضعیف اغتشاش مقاوم را برای یک کلاس از سیستم های نامعین آشفته تکین تضمین می کند، همراه با کران بینهایت برای

پارامتر آشفستگی<sup>14</sup> در [۱۴] بررسی شده است. جدیداً در [۱۵ و ۱۶] به اختصار نشان داده شده است که با فرض پایدار بودن دینامیک های تند سیستم ممکن است که بتوانیم قسمتی از آن دینامیک ها را بصورت یک سیستم نامعین با نرم محدود در سیستم مدل کنیم و سایر دینامیک های تند سیستم به دینامیک های کند سیستم افزوده شود.

با توجه به اینکه طراحی کنترل کننده بر اساس مدل سیستم صورت می گیرد و همواره امکان وجود اختلاف بین مدل سیستم و سیستم اصلی وجود دارد، بنابراین سعی می گردد این اختلاف به روش های مختلفی در مدل بکار برده شده، لحاظ گردد که یکی از این روش ها کوتاه سازی<sup>15</sup> دینامیک های مربوط به فرکانس های بالا می باشد. در این روش اثری از فرکانس های بالا در مدل تحت بررسی موجود نیست [۱۷].

ایده اصلی مطرح شده در این مقاله را اجمالاً چنین می توان توضیح داد:

یک سیستم دینامیکی را در نظر بگیرید که از نقطه نظر فرکانسی دارای هر دو رفتار فرکانس های پایین و بالا باشد. بهره این قبیل سیستم ها - اگر دارای یک معادل فیزیکی باشند - معمولاً به گونه ای است که در فرکانس های بالا، سیستم دارای بهره<sup>16</sup> کمتری نسبت به فرکانس های پایین تر خود می باشد. این فرض در مورد بسیاری از سیستم های مکانیکی که فیلترهای پایین گذری هستند صادق است. برای مثال در یک بازوی رباتیکی انعطاف پذیر، مودهای صلب<sup>17</sup> دارای بهره بزرگتری نسبت به مودهای انعطاف پذیر (که مبین میزان انحراف انتهای بازو می باشند) هستند. به همین نحو، انحرافات متناظر با فرکانس های بالا دارای بهره کوچکتری نسبت به هم نظیرهای خود در فرکانس های پایین می باشند. پس اگر بصورت شهودی رفتار سیستم را به دو طیف فرکانس بالا و فرکانس پایین تفکیک نمائیم، بهره سیستم برای طیف فرکانس بالا کمتر از بهره مربوط برای طیف فرکانس پایین می باشد. از این نکته در بکارگیری روش  $H_{\infty}$  استفاده خواهیم کرد. یادآور می شود که متگای اصلی روش  $H_{\infty}$  در برخورد با عدم قطعیت، قضیه بهره کوچک<sup>18</sup> است. این قضیه بیان می دارد سیستمی که از اتصال دو زیر سیستم با بهره های  $g_1$  و  $g_2$  تشکیل شده پایدار خواهد بود، مادامی که رابطه  $g_1 g_2 < 1$  برآورده شود. حال اگر یکی از دو زیر سیستم یاد شده را متناظر با رفتار فرکانس پایین سیستم مورد بررسی (با بهره  $g_1$ ) فرض کنیم و زیر سیستم دوم را متناظر با رفتار فرکانس بالای سیستم (با بهره  $g_2$ ) در نظر بگیریم و از طرفی دیگر زیر سیستم فرکانس بالا را بصورت عدم قطعیت در مدل



سیستم نامی که تغییر ناپذیر با زمان فرض می شود،  
بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$p \sim \left[ \begin{array}{c|cc} A_x & A_{xw} & B_x \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (8)$$

که خروجی کنترل شده،  $Z$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z = C_1 X + D_{12} u := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \quad (9)$$

در این مقاله فرض خواهیم کرد که شرایط زیر برقرار باشند:

- (a) زوج های  $(A_x, B_x)$  پایدار پذیر<sup>24</sup> و  $(C_2, A_x)$  آشکار پذیر<sup>25</sup> باشند.  
 (b) زوج های  $(A_x, A_{xw})$  پایدار پذیر و  $(C_1, A_x)$  آشکار پذیر باشند.  
 (c) رتبه ماتریس  $D_{12}$  برابر  $k$  و رتبه ماتریس  $D_{21}$  برابر  $r$  باشد.

### تعریف ۱ (نرم $H_\infty$ ) [۲۱]

با فرض  $G: S_1 \rightarrow S_2$ ، که  $S_1$  و  $S_2$  متعلق به  $L_2[0, +\infty)$  و  $G$  خطی و تغییر ناپذیر با زمان می باشند، نرم  $H_\infty$  برای  $G$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\forall w \neq 0} \frac{\|Z\|_2}{\|w\|_2} \quad (10)$$

بطوریکه  $Z = G w$  می باشد.

مطابق شکل (۱)، رابطه  $Z = F_l(P, K)w$  به سادگی نتیجه می شود، که در آن عبارت  $F_l(P, K)$  عبارت است از:

$$F_l(P, K) := T_{Zw} = p_{11} + p_{12} K (I - p_{22} K)^{-1} p_{21}$$

$$p = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

در این بیان  $F_l(P, K)$  بر تبدیل کسری خطی پایینی<sup>26</sup> (LFT) سیستم  $P$  با پارامتر  $K$  دلالت می کند [۲۱]. همچنین دینامیک های نامعین  $\Delta$ ، پایدار مجانبی با نرم محدود ( $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma_1$ ) فرض می شوند، بنحوی که در حوزه فرکانس داریم:

$$\Delta(s) := (\varepsilon s I - A_w)^{-1} \begin{bmatrix} A_{wx} & B_w \end{bmatrix} \quad (12)$$

نامعینی در نظر گرفته نمی شوند، به دینامیک های کند افزوده شوند، بدین ترتیب روابط (۱) تا (۳) بدین شکل اصلاح می شوند:

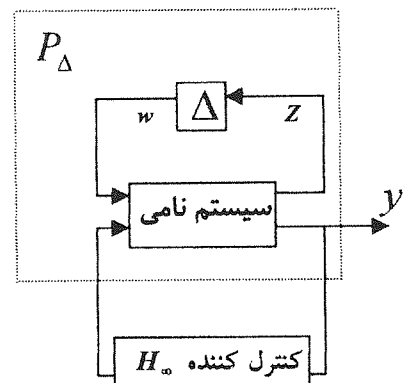
$$\dot{X} = A_x X + A_{xw} w + B_x u, \quad X(0) = \eta \quad (4)$$

$$\varepsilon \dot{w} = A_{wx} X + A_w w + B_w u := A_w w + \begin{bmatrix} A_{wx} & B_w \end{bmatrix} z, \quad w(0) = \xi \quad (5)$$

$$y = C_2 X + D_{21} w \quad (6)$$

$$Z := \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} \quad (7)$$

در ضمن،  $Z$  خروجی کنترل شده ای است که بایستی اثر اغتشاش<sup>21</sup> (دینامیک های نامعین) روی آن حداقل گردد. در روابط بالا اجزاء بردار  $w = [x_{f_1}, x_{f_{(n+1)}}, \dots, x_{f_m}]^T$  مبین دینامیک های تندی از سیستم هستند که بصورت نامعینی با نرم محدود در مدل وارد می شوند و  $X = [x_s, x_{f_1}, x_{f_2}, \dots, x_{f_{(n+1)}}]^T$  و غالب سیستم بوده که در شکل (۱) نمایش داده شده اند. مقدار  $\Delta$  شاخص<sup>22</sup> اولین حالت از دینامیک های سیستم نامعین در پارامترهای فوق مطابق الگوریتم بخش دوم تعیین خواهد شد. ایده مقاله بطور شماتیکی در شکل (۱) نشان داده شده، بنحوی که سیستم خطی  $\Delta$ ، که بیانگر دینامیک های نامعین است، پایدار مجانبی و با نرم محدود فرض می شود و  $P_\Delta$  بعنوان سیستم تعمیم یافته<sup>23</sup> نامیده می شود. جهت تعیین کنترل کننده پایدار ساز برای  $P_\Delta$  در حضور کلیه دینامیک های نامعین ( $\Delta$ ) به حل یک مسأله کنترل  $H_\infty$  برای سیستم تعمیم یافته نیاز داریم.



شکل (۱) بلوک دیاگرام کلی برای سیستم نامی همراه با مدل دینامیک های نامعین.

## تعریف ۲ - (سیستم هامیلتونین<sup>27</sup>) [۱۸]

سیستم هامیلتونین یک سیستم دینامیکی خطی می باشد که دینامیک های آن توسط ماتریس هامیلتونین مشخص می شود. برای یک  $\gamma > 0$  داده شده، ماتریس های هامیلتونین برای سیستم نامی را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$H := \begin{bmatrix} A_X & \gamma^{-2} A_{Xw} A_{Xw}^T - B_X B_X^T \\ -C_1^T C_1 & -A_X^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

و

$$J := \begin{bmatrix} A_X^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -A_{Xw} A_{Xw}^T & -A_X \end{bmatrix} \quad (14)$$

سیس مقادیر  $\gamma_2$  و  $\gamma_3$  را برابر با کوچکترین مقدار  $\gamma$  بنحوی اختیار می کنیم که مقادیر ویژه ماتریس های هامیلتونین  $H$  و  $J$  به ترتیب بر روی محور موهومی قرار گیرند.

## ۲- تعیین ساختار کنترل کننده $H_\infty$

برای تعیین کنترل کننده  $H_\infty$ ، ابتدا باید دینامیک های سیستم نامعین و سیستم نامی مطابق شکل (۱) تعیین شوند. در این راستا مقدار شاخص  $\gamma$  در دینامیک های تند سیستم که دینامیک های متناظر بعد از آن بعنوان نامعینی در نظر گرفته می شوند، مطابق الگوریتم زیر تعیین خواهد شد. گام ۱: ابتدا مقدار شاخص  $\gamma$  را برابر یک قرار می دهیم. گام ۲: معادلات (۴) تا (۷) را تشکیل می دهیم. گام ۳: مقادیر کران های بالایی  $\gamma_2$ ،  $\gamma_1$ ،  $\gamma_3$  را به ترتیب با استفاده از روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) بدست می آوریم.

گام ۴: چک می کنیم که آیا شرط  $1 < \text{Max} \{ \gamma_2, \gamma_3 \}$  برقرار است؟

- اگر جواب مثبت باشد، الگوریتم متوقف می شود و خروجی الگوریتم مقدار شاخص  $\gamma$  است.

- اگر جواب منفی باشد، به مقدار شاخص  $\gamma$  یک واحد اضافه می کنیم و به گام ۲ می رویم.

گام ۵: کنترل کننده  $H_\infty$  مورد نظر را با استفاده از اطلاعات فوق بدست می آوریم.

واضح است که شاخص  $\gamma$  کوچکتر متناظر با ابعاد کوچکتر سیستم نامی می باشد، بنابراین مطلوب آن است که کوچکترین مقدار شاخص  $\gamma$  را تعیین کنیم. در اینصورت بخش بزرگتری از سیستم را بصورت نامعینی در نظر گرفته ایم. پس از مشخص شدن مقدار مناسب برای  $\gamma$ ، کنترل کننده  $H_\infty$  با استفاده از فیدبک حالت و یا فیدبک خروجی قابل محاسبه است.

## ۱-۲ - فیدبک حالت

در این بخش فرض بر این است که تمام حالت های دینامیکی سیستم جهت فیدبک در دسترس می باشد. در این صورت برای محاسبه مقدار شاخص  $\gamma$  شرط مورد نظر در گام ۴ الگوریتم به گونه زیر تغییر می یابد. گام ۴: چک می کنیم که آیا شرط  $1 < \gamma_1, \gamma_2$  برقرار است؟

## قضیه ۱- [۲۱]

تحت فرضیات (a, b, c) در بخش اول و با توجه به ساختار دینامیکی سیستم نامی (۸)، برای یک  $\gamma > 0$  داده شده، یک کنترلر پایدار کننده داخلی<sup>28</sup> بنحوی که رابطه  $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$  برقرار باشد وجود دارد، اگر و فقط اگر  $X_\infty$  یک پاسخ مثبت نیمه معین از معادله جبری ریکاتی زیر باشد:

$$A_X^T X_\infty + X_\infty A_X + X_\infty (\gamma^{-2} A_{Xw} A_{Xw}^T - B_X B_X^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0 \quad (16)$$

بنحوی که ماتریس  $(A_X - (B_X B_X^T - \gamma^{-2} A_{Xw} A_{Xw}^T) X_\infty)$  یک ماتریس پایدار<sup>29</sup> می باشد. در این صورت کنترل کننده مربوطه به فرم زیر خواهد بود:

$$u(t) = -B_X^T X_\infty X(t) =: K X(t) \quad (17)$$

## ۲-۲ - فیدبک خروجی

در این قسمت فرض بر این است که کلیه حالت های سیستم برای فیدبک حالت در دسترس نمی باشند. بنابراین کنترل کننده مورد نظر با استفاده از فیدبک خروجی اندازه گیری شده، بدست می آید.

## قضیه ۲ - [۱۸]

تحت فرضیات (a, b, c) در بخش اول و با توجه به ساختار دینامیکی سیستم نامی (۸)، برای یک  $\gamma > 0$  داده شده، یک کنترلر پایدار کننده داخلی بنحوی که  $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$  برقرار باشد وجود دارد، اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱)  $X_\infty$  پاسخ مثبت نیمه معین از معادله جبری ریکاتی (۱۶) باشد.

(۲)  $Y_\infty$  پاسخ مثبت نیمه معین از معادله جبری ریکاتی زیر باشد:

$$A_X Y_\infty + Y_\infty A_X^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty + A_{Xw} A_{Xw}^T = 0 \quad (18)$$

(۳)  $\rho(X_\infty, Y_\infty) := \text{Max } |\lambda_{X_\infty, Y_\infty}| < \gamma^2$  که  $\rho(\cdot)$  مبین شعاع طیفی<sup>30</sup> سیستم و  $\lambda$  نماینده هر یک از مقادیر ویژه سیستم می باشد.

در این حالت مجموعه همه کنترل کننده های پایدار ساز داخلی که شرط  $\|T_{Zw}\|_\infty \leq \gamma$  را برآورده می کنند، بصورت زیر پارامتریزه می شوند:

$$K(s) = F_l(M_\infty, Q)$$

که در آن  $\|Q\|_\infty < \gamma$  و  $M_\infty$  یک سیستم دینامیکی با تحقق فضای حالت زیر می باشد:

$$M_\infty \sim \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_x \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \quad \text{که در آن}$$

$$\begin{cases} A_\infty = A_x + \gamma^{-2} A_{Xw} A_{Xw}^T X_\infty + B_x F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty = -B_x^T X_\infty \\ L_\infty = -Y_\infty C_2^T \\ Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{cases}$$

با انتخاب  $Q=0$ ، کنترل کننده مرکزی که دارای تحقق فضای حالت زیر است، حاصل می شود:

$$K_{\text{central}} \sim \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

در نتیجه درجه مک میلان<sup>31</sup> کنترل کننده (۱۹)، از درجه مک میلان سیستم نامی (۸) بیشتر نخواهد بود و همانند یک تخمین زن حالت، به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{cases} \dot{X}_e = A_x X_e + A_{Xw} \gamma^{-2} A_{Xw}^T X_\infty X_e + B_x u + Z_\infty L_\infty (C_2 X_e - y) \\ u(t) = F_\infty X_e \end{cases} \quad (20)$$

یک مقایسه ساده بین تخمین زن (۲۰) با فیلتر کالمن<sup>32</sup> مشخص میکند که عبارت اضافی  $A_{Xw} W_{\text{worst}}$  با  $W_{\text{worst}} := \gamma^{-2} A_{Xw}^T X_\infty X_e$  بعنوان تخمینی از بدترین اغتشاش<sup>33</sup> ممکن لحاظ شده است.

از آنجهت که کنترل کننده های ارائه شده، ممکن است به پارامتر آشفتگی  $\varepsilon$  وابسته باشند، لذا کران پایداری پارامتر آشفتگی  $\varepsilon$  بینهایت می باشد. ولی به منظور عدم وابستگی قطعی کنترل کننده به پارامتر آشفتگی  $\varepsilon$  می توان سیستم نامی را به زیر سیستم های کندو تند تجزیه کرد، سپس با طراحی

کنترل کننده برای هر یک از این زیر سیستم ها، بنحوی که سطح تضعیف  $\gamma$  را بر آورده کنند به خواسته  $\|T_{Zw}\|_\infty \leq \gamma$  برای سیستم نامی رسید.

### ۳- بیان نتایج اصلی

هدف از طراحی کنترل کننده مقاوم، طراحی کنترل کننده ای می باشد که پس از طراحی و اعمال آن به سیستم اصلی (باوجود اختلاف بین مدل و سیستم اصلی)، سیستم حلقه بسته اصلی همچنان پایدار باقی بماند.

در این بخش به موضوع اصلی مقاله، که همانا طراحی کنترل کننده مقاوم می باشد، می پردازیم. بدین منظور جهت بررسی پایداری سیستم حلقه بسته اصلی (۱) تا (۳) در حضور کنترل کننده های فیدبک حالت و فیدبک خروجی، قضایای ۳ و ۴ در ارتباط با تضمین پایداری سیستم حلقه بسته اصلی ارائه می شوند. قبل از بیان نتایج اصلی به بیان یک لم مقدماتی می پردازیم.

#### لم ۱:

برای هر ماتریس  $Q_{p \times p}$  و با فرض  $\|Q\|_\infty < 1$  داریم  $\det(I-Q) \neq 0$ .

#### اثبات:

مقادیر ویژه ماتریس  $Q$  را بصورت  $\lambda_i(Q)$  ( $i=1,2,\dots,p$ ) در نظر می گیریم. بنابراین:

$$\det(I-Q) = \prod_{i=1}^p \lambda_i(I-Q) = \prod_{i=1}^p (1-\lambda_i(Q)) \quad (21)$$

که در آن منظور از  $\lambda_i(A)$  هر مقدار ویژه از ماتریس  $A$  می باشد. از طرفی

$$|\lambda_i(Q)| \leq \bar{\sigma}(Q) \quad (22)$$

که  $\bar{\sigma}(\cdot)$  بر بزرگترین مقدار تکین<sup>34</sup> ماتریس دلالت می کند. با توجه به روابط (۲۱) و (۲۲) نتیجه می شود که:

$$\det(I-Q) \geq (1-\bar{\sigma}(Q))^p \quad (23)$$

همچنین از  $\|Q\|_\infty < 1$  ناتساوی  $\bar{\sigma}(Q) < 1$  نتیجه می شود. در نتیجه عبارت  $\det(I-Q) \neq 0$  از رابطه (۲۳) حاصل می شود.

### قضیه ۳- (فیدبک حالت)

برای سیستم اصلی (۱) تا (۳) و با فرض  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$  یک

ابتدا با استفاده از رابطه (۲۴) جهت محاسبه تبدیل لا پلاس دینامیک های  $X(t)$  داریم:

$$X(s) = (sI - (A_x + B_x K))^{-1} A_{Xw} w(s) + (sI - (A_x + B_x K))^{-1} \xi \quad (29)$$

مطابق تعریف ۱ و با استفاده از روابط (۷) و (۲۹) و خواص نرم  $H_\infty$  نتیجه می شود:

$$\|T_{Zw}\|_\infty = \sup_{\forall w \neq 0} \frac{\left\| \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} \right\|_2}{\|w\|_2} = \sup_{\forall w \neq 0} \frac{\left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} X \right\|_2}{\|w\|_2} \quad (30)$$

پس

$$\|T_{Zw}\|_\infty \geq \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (sI - (A_x + B_x K))^{-1} A_{Xw} \right\|_\infty \quad (31)$$

مطابق فرضیات قضیه ۱ (روابط  $\gamma \leq \|T_{Zw}\|_\infty < \gamma_1^{-1}$  و  $\gamma_2 < \gamma$ ) و با توجه به روابط (۱۲) و (۲۷) و (۳۱) آشکار می شود:

$$\|F(s)\|_\infty \leq \|\Delta\|_\infty \cdot \|T_{Zw}\|_\infty \leq \gamma_1 \cdot \gamma < 1 \quad (32)$$

در نتیجه، رابطه  $\|F(s)\|_\infty < 1$  برقرار است و مطابق لم ۱، رابطه (۲۸) حاصل می شود.

حال با توجه به رابطه (۲۵) می توان نتیجه گرفت که مقادیر ویژه ماتریس  $N$  شامل مقادیر ویژه ماتریس های  $\frac{A_w}{\varepsilon}$  و  $A_x + b_x K$  می باشد، از آن لحاظ که ماتریس  $A_w$ ، یک ماتریس پایدار می باشد و کنترل کننده فیدبک حالت یک کنترلر پایدار کننده برای سیستم نامی (۸) می باشد، بنابراین مقادیر ویژه ماتریس  $N$  پایدار می باشند. پس سیستم اصلی با اعمال کنترلر (۱۷) پایدار خواهد بود.

### نکته ۱:

لازم به توضیح می باشد که  $\gamma$  سطح عملکرد متناظر با کنترل کننده زیر بهینه می باشد، در حالیکه  $\gamma = \gamma_2$  متناظر با کنترل کننده بهینه است.

### قضیه ۴ - (فیدبک خروجی)

برای سیستم اصلی (۱) تا (۳) و با فرض  $\max\{\gamma_2, \gamma_3\} < \gamma < \gamma_1^{-1}$ ، کنترل کننده فیدبک خروجی (۱۹)، مطابق قضیه ۲ وجود دارد به نحوی که پس از اعمال آن به سیستم اصلی، سیستم حلقه بسته اصلی نیز پایدار خواهد بود.

کنترل کننده فیدبک حالت بصورت (۱۷) مطابق قضیه ۱ وجود دارد، بنحوی که پس از اعمال آن به سیستم اصلی، سیستم حلقه بسته اصلی نیز پایدار باشد.

### اثبات:

برای بررسی سیستم حلقه بسته اصلی پس از اعمال کنترل کننده (۱۷) می توان به بررسی پایداری دینامیک های سیستم نامی (۸) در حضور دینامیک های نامعینی ( $\Delta$ ) پس از اعمال کنترل کننده پرداخت.

دینامیک های سیستم حلقه بسته اصلی شامل دینامیک های (۴) و (۵) می باشند، که تحقق فضای حالت آن بصورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x + B_x K & A_{Xw} \\ \frac{(A_{wX} + B_w K)}{\varepsilon} & \frac{A_w}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ w \end{bmatrix} := N \begin{bmatrix} X \\ w \end{bmatrix} \quad (24)$$

حال نشان می دهیم که ماتریس  $N$  یک ماتریس پایدار می باشد. با استفاده از فرمول شر<sup>۳۵</sup> برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس  $N$  داریم:

$$\det(sI - N) = \det\left(sI - \frac{A_w}{\varepsilon}\right) \det(sI - (A_x + B_x K)) \det(I - F(s)) \quad (25)$$

که در آن

$$F(s) = (sI - \frac{A_w}{\varepsilon})^{-1} \left( \frac{A_{wX} + B_w K}{\varepsilon} \right) (sI - (A_x + B_x K))^{-1} A_{Xw} \quad (26)$$

با استفاده از رابطه (۲۶) و نیز توجه به این نکته که نرم  $H_\infty$  یک نرم القایی است ( $\|A \cdot B\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$ ) داریم:

$$\|F(s)\|_\infty \leq \left\| \left( sI - \frac{A_w}{\varepsilon} \right)^{-1} \left( \frac{A_{wX} + B_w K}{\varepsilon} \right) \right\|_\infty \cdot \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (sI - (A_x + B_x K))^{-1} A_{Xw} \right\|_\infty \quad (27)$$

در ادامه نشان خواهیم داد که

$$\det(I - F(s)) \neq 0 \quad (28)$$

## اثبات:

ابتدا با استفاده از رابطه (۳۳) جهت محاسبه تبدیل لاپلاس دینامیک های  $X(t)$  و  $x_e(t)$  داریم:

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ x_e(s) \end{bmatrix} = (sI-R)^{-1} \begin{bmatrix} A_{Xw} \\ 0 \end{bmatrix} w(s) + (sI-R)^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (39)$$

که  $\xi$  بردار شرایط آغازین دینامیک های  $x_e(t)$  می باشد. مطابق تعریف ۱ و با استفاده از روابط (۷) و (۳۹) و خواص ضربی نرم  $H_\infty$  نتیجه می شود:

$$\|T_{Zw}\|_\infty = \sup_{\forall w \neq 0} \frac{\left\| \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} \right\|_2}{\|w\|_2} = \sup_{\forall w \neq 0} \frac{\left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_e \end{bmatrix} \right\|_2}{\|w\|_2} \quad (40)$$

پس

$$\|T_{Zw}\|_\infty \geq \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F_\infty \end{bmatrix} (sI-R)^{-1} \begin{bmatrix} A_{Xw} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (41)$$

مطابق فرض بیان قضیه ۲ (روابط (۳۷) و (۳۸)) و با توجه به روابط (۱۲)، (۳۷) و (۴۱) آشکار می شود:

$$\|E(s)\|_\infty \leq \|\Delta\|_\infty \|T_{Zw}\|_\infty \leq \gamma_1 \cdot \gamma < 1 \quad (42)$$

در نتیجه، رابطه  $\|E(s)\|_\infty < 1$  برقرار است و مطابق لم ۱ رابطه (۳۸) نتیجه می شود.

حال با توجه به رابطه (۳۴) می توان نتیجه گرفت که مقادیر ویژه ماتریس  $M$  شامل مقادیر ویژه ماتریس های  $\frac{A_w}{\varepsilon}$  و  $R$  می باشد، از آن لحاظ که ماتریس  $A_w$ ، ماتریس پایداری می باشد و کنترل کننده مرکزی یک کنترلر پایدار کننده برای سیستم نامی می باشد، بنابراین مقادیر ویژه ماتریس  $R$  پایدار می باشد. پس سیستم اصلی نیز با اعمال کنترلر (۱۹) پایدار خواهد بود.

## نکته ۲:

لازم به توضیح می باشد که  $\gamma$  سطح عملکرد متناظر با کنترل کننده زیر بهینه می باشد، در حالیکه  $\gamma = \max\{\gamma_2, \gamma_3\}$  متناظر با کنترل کننده بهینه است.

## ۴- نتایج شبیه سازی

همانطور که ملاحظه گردید اثبات و تحلیل نتایج برای سیستم های چند ورودی - چند خروجی<sup>۳۶</sup> صورت گرفت، بنابراین در این مقطع مدعی مقاله به خوبی نشان داده شده

برای بررسی پایداری سیستم حلقه بسته اصلی پس از اعمال کنترل کننده مرکزی (۱۹) می توان به بررسی پایداری دینامیک های سیستم نامی (۸) در حضور دینامیک های نامعین ( $\Delta$ ) پرداخت.

دینامیک های سیستم حلقه بسته اصلی شامل دینامیک های (۴) و (۵) و دینامیک های کنترل کننده مرکزی (۲۰) می باشد، که تحقق فضای حالت آنها بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x & B_x F_\infty & A_{Xw} \\ -Z_\infty L_\infty & A_\infty & 0 \\ \frac{A_{\infty x}}{\varepsilon} & \frac{B_\infty F_\infty}{\varepsilon} & \frac{A_\infty}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x \\ w \end{bmatrix} := M \begin{bmatrix} X \\ x \\ w \end{bmatrix} \quad (23)$$

حال نشان می دهیم که ماتریس  $M$  یک ماتریس پایداری می باشد.

دوباره با استفاده از فرمول شر، برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس  $M$  داریم:

$$\det(sI - M) = \det\left(sI - \frac{A_w}{\varepsilon}\right) \det(sI - R) \det(I - E(s)) \quad (24)$$

که در آن

$$E(s) := \left(sI - \frac{A_w}{\varepsilon}\right)^{-1} \begin{bmatrix} A_{wx} & B_w F_\infty \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} (sI - R)^{-1} \begin{bmatrix} A_{Xw} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

و

$$R := \begin{bmatrix} A_x & B_x & F_\infty \\ -Z_\infty & L_\infty & A_\infty \end{bmatrix} \quad (26)$$

از رابطه (۲۵) و خواص نرم  $H_\infty$  داریم:

$$\|E(s)\|_\infty \leq \left\| \left(sI - \frac{A_w}{\varepsilon}\right)^{-1} \begin{bmatrix} A_{wx} & B_w \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \right\|_\infty \cdot \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F_\infty \end{bmatrix} (sI-R)^{-1} \begin{bmatrix} A_{Xw} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (27)$$

در ادامه نشان خواهیم داد که

$$\det(I - E(s)) \neq 0 \quad (28)$$



$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_X X + A_{Xw} w + B_X u \\ \varepsilon \dot{w} &= A_w w + [0 \ B_w] Z \\ Z &= [X \ u]^T\end{aligned}$$

بطوری که  $X = [y \ \theta \ \delta_1 \ \dot{\delta}_1 \ \delta_2 \ \dot{\delta}_2 \ \delta_3 \ \dot{\delta}_3]^T$  بردار دینامیک‌های غالب (معین) و  $w = [\delta_4 \ \dot{\delta}_4 \ \delta_5 \ \dot{\delta}_5 \ \delta_6 \ \dot{\delta}_6]$  بردار حالت که بعنوان نامعینی متناظر با دینامیک‌های مدل نشده در نظر گرفته می‌شوند، دلالت می‌کنند. مقادیر ماتریس‌های  $A_X, A_{Xw}, A_w, B_X$  و  $B_w$  در ضمیمه ج آورده شده است.

فرایند طراحی با استفاده از پنج گام معرفی شده در الگوریتم بخش دوم صورت پذیرفت و مقدار مینیمم برای شاخص  $i$ ، عدد چهار حاصل گردید. بعبارت دیگر، سه مود انحراف قابل نمایش بصورت دینامیک‌های نامعین ( $\Delta$ ) می‌باشند و سه مورد دیگر به دینامیک‌های کند سیستم افزوده می‌شوند. به عبارت دیگر، سه مود انحراف با فرکانس‌های  $w_4, w_5, w_6$  (مطابق جدول ۲ در ضمیمه ب) بصورت دینامیک‌های نامعین ( $\Delta$ ) می‌باشند و سه مود با فرکانس‌های  $w_1, w_2, w_3$  به دینامیک‌های کند (صلب) افزوده می‌شوند و دینامیک‌های غالب سیستم را تشکیل می‌دهند. همچنین مطابق گام ۳ الگوریتم مقادیر سطوح عملکرد بصورت  $\gamma_1 = 0/00372, \gamma_2 = 67/4798, \gamma_3 = 0/9878$  حاصل می‌شوند. در ادامه، مطابق گام ۵ در الگوریتم بخش دوم، کنترل کننده‌های فیدبک حالت و یا فیدبک خروجی با استفاده از روش  $H_\infty$  برای سیستم مورد نظر طراحی شد.

#### ۴-۱. طراحی کنترل کننده فیدبک حالت

با در نظر گرفتن  $\gamma = 68$  بنحوی که فرض قضیه ۳ بر آورده شود، کنترل کننده زیر بهینه فیدبک حالت (۱۷) را به سیستم اعمال می‌کنیم، در نتیجه رگلاسیون دینامیک‌های غالب به صفر (که مشتمل بر موقعیت نوک بازو و سه مود اول انحراف می‌باشد) در شکل (۲) نشان داده شده است. رفتار دینامیک‌های مدل شده به صورت نامعینی (که مشتمل بر مودهای انحراف ۴م-۶م می‌باشد) در شکل (۳) آمده است. کنترل کننده اعمال شده به سیستم نامی که پایداری سیستم حلقه بسته اصلی را، مطابق قضیه ۳، تضمین می‌کند در شکل (۴) دیده می‌شود. درستی عملکرد خاصیت تضعیف اثر (دینامیک‌های فرکانس بالا) بر روی دینامیک‌های غالب سیستم، در شکل (۵) نشان داده می‌شود.

#### ۴-۲. طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی

با اعمال کنترل کننده زیر بهینه مرکزی (۱۹)، با در نظر

است. در عین حال جهت بسط بیشتر ایده مطرح شده یک مثال تک ورودی - تک خروجی<sup>۳۷</sup> ارائه می‌شود. بدیهی است پیچیدگی‌های یک سیستم چند ورودی - چند خروجی ممکن است خواننده را از دنبال کردن هدف اصلی مقاله دور نماید. دراین راستا ایده بیان شده در قسمت‌های قبل به یک بازوی رباتیک انعطاف پذیر با شش مود انحراف بعنوان دینامیک‌های تند اعمال می‌گردد. توضیح این نکته می‌تواند مفید باشد که در بکارگیری روبات‌های با بازوهای بلند در کاربردهای فضایی، به لحاظ طول بلند هر بازو، روبات علاوه بر رفتار دینامیک‌های صلب دارای رفتار انعطاف پذیر نیز می‌باشد. متأسفانه کنترل روبات‌های انعطاف پذیر مانند متناظرهای صلب خود سیستماتیک و سراسر است نمی‌باشد. دلیل اصلی این امر آنست که معادلات دینامیکی واقعی حاکم بر چنین سیستمی از نوع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای<sup>۳۸</sup> و نه معمولی<sup>۳۹</sup> می‌باشند، چرا که در هر نقطه از بازو (از محل اعمال گشتاور تا انتهای بازو) یک معادله دیفرانسیل حاکم می‌باشد.

یکی از روش‌های معمول در کنترل اینگونه سیستم‌ها این است که از معادلات پاره‌ای، یک تقریب دیسکریت<sup>۴۰</sup> بصورت یک معادله دیفرانسیل معمولی حاصل می‌کنند. به لحاظ تبدیل یک سیستم دینامیکی پاره‌ای به یک معادله دیفرانسیل معمولی، مرتبه تقریب حاصل (در حالت ایده آل) بینهایت است.

در یک روبات تک بازو، مرتبه دینامیک‌های صلب دو بوده و بقیه دینامیک‌ها مبدین رفتار انعطاف پذیر می‌باشند. به منظور اعمال یک کنترلر عملی، در محاسبه مدل دیسکریت تنها تعداد محدودی از مودهای انحراف را در نظر می‌گیرند. روشن است که هر چه بازو نرمتر و انعطاف پذیر باشد، بایستی برای کار آمد بودن مدل، تعداد بیشتری از مودهای انحراف را در تقریب در نظر گرفت. در مثال مورد بررسی تعداد شش مود انحراف و یک مود صلب در نظر گرفته شده که بنابراین مرتبه دینامیکی سیستم اصلی حلقه باز ۱۴ خواهد بود. معادلات دینامیکی مربوط به چنین بازویی به شرح مندرج در ضمیمه الف می‌باشند. این سیستم غیر حداقل فاز<sup>۴۱</sup> بوده و دارای یک قطب در مبدأ (به خاطر دینامیک‌های صلب) می‌باشد (مطابق جدول ۳ در ضمیمه ب). هدف طراحی کنترل کننده ای است، که موقعیت نوک<sup>۴۲</sup> بازوی رباتیک را به صفر برساند [۲۲].

حال مطابق [۲۲]، خروجی سیستم ( $y$ ) - موقعیت نوک بازو - را بعنوان حالت اول در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب نمایش فضای حالت جدید سیستم مطابق الگوریتم معرفی شده در بخش دوم بگونه زیر است:

$$\varepsilon \dot{x}_f = A_{22} x_f + B_2 u, \quad x_f(0) = \bar{\xi} \quad (A-2)$$

$$y = C x_s + F x_f \quad (A-3)$$

بطوریکه

$$x_s = (\theta, \dot{\theta})^T, x_f = (\delta_1, \dot{\delta}_1, \delta_2, \dot{\delta}_2, \dots, \delta_6, \dot{\delta}_6)^T$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, A_{22} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_6), A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_i^2 & -2\xi_i w_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 6$$

$$B_1 = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = (b_1^T, b_2^T, \dots, b_6^T)^T,$$

$$b_i = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i(L_0) \end{bmatrix}, \quad (\beta = \frac{1}{I_0 + J_0 + J_L + M_L L_0^2}),$$

$$C = [L_0 \ 0], F = (C_1, C_2, \dots, C_6); C_i = [\phi_i(L_0) \ 0] \quad (A-4)$$

که  $\gamma$  موقعیت نوک بازو می باشد و  $\theta$  و  $\delta_i (i=1, \dots, 6)$  متناظر با دینامیک های صلب و انعطاف پذیر می باشند.  $\alpha$  بر قطب متناظر دینامیک های صلب دلالت می کند.  $(w_i, \xi_i)$  فرکانس و نسبت میرایی مود انحراف نام هستند و  $I_0$  اینرسی مرکز و  $J_0$  اینرسی میله و  $\rho$  جرم هر طول واحد و  $M_L$  جرم بار و  $L_0$  طول بازو است و  $J_L$  اینرسی بار و  $\frac{1}{\beta}$  کل اینرسی می باشد و  $\phi_i$  شکل مود نام را نشان می دهند. مقادیر پارامترهای فوق در جدول ۱ ضمیمه ب آورده شده است.

گرفتن  $\gamma = 68$  پنحوی که فرض قضیه ۴ برآورده شود، رگلاسیون دینامیک های غالب به صفر (که مشتمل بر موقعیت نوک بازو و سه مود اول انحراف می باشد) در شکل (۶) نشان داده شده است. رفتار دینامیک های مدل شده بصورت نامعینی (که مشتمل بر مدهای انحراف ۴ ام - ۶ ام می باشد) در شکل (۷) آمده است. کنترل کننده اعمال شده به سیستم نامی که پایداری سیستم حلقه بسته اصلی را، مطابق قضیه ۴، تضمین می کند، در شکل (۸) دیده می شود و درستی عملکرد خاصیت تضعیف اثر دینامیک های نامعین (دینامیک های فرکانس بالا) بر روی دینامیک های غالب سیستم، در شکل (۹) نشان داده می شود.

از مقایسه نتایج شبیه سازی قسمت های ۱-۴ و ۲-۴ دیده می شود که موقعیت نوک بازو و سایر مدهای انحراف تحت کنترل کننده فیدبک خروجی دارای نوسانات کمتری نسبت به نتایج کنترل کننده فیدبک حالت می باشد.

## ۵- نتیجه گیری

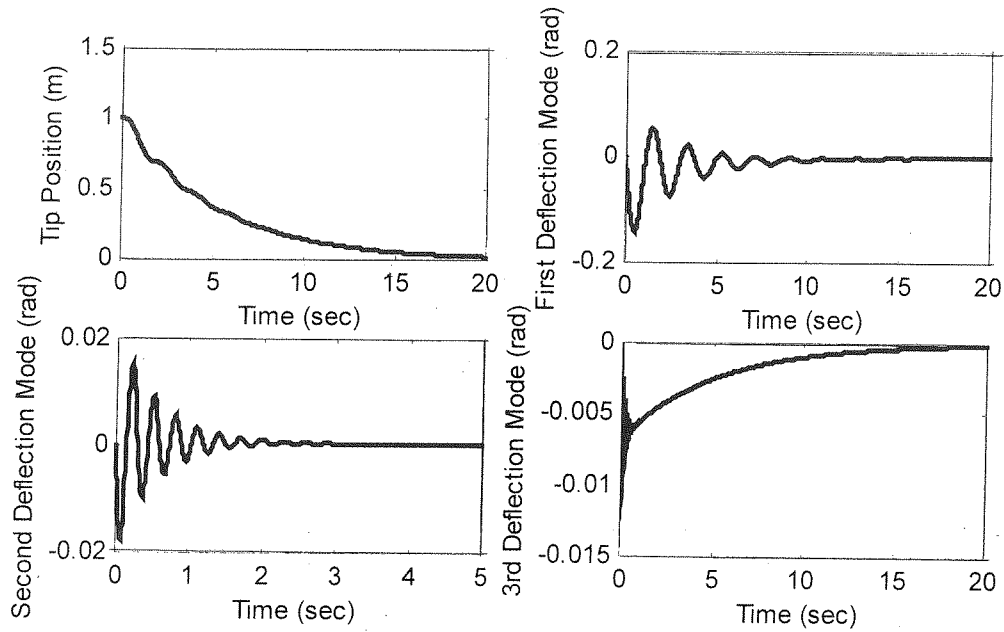
در این مقاله رگلاسیون مقاوم سیستم های خطی آشفته تکین بررسی گردید. دراین راستا، با فرض پایداری دینامیک های تند سیستم، یک روش جدید مدل کردن برای سیستم های فوق، با ارائه یک الگوریتم جدید جهت تفکیک دینامیک های سیستم به دینامیک های غالب و دینامیک های نامعین معرفی گردید. در این روش علیرغم اینکه طراحی بر اساس تنها بخشی از دینامیک های سیستم انجام می پذیرد، مع الوصف کنترل کننده حاصل وقتی که در حلقه اصلی نیز قرار می گیرد منجر به یک رفتار پایدار می شود.

از مزایای روش پیشنهادی می توان به ارائه روش سیستماتیک جهت طراحی کنترل کننده مقاوم برای سیستم های آشفته تکین و تضعیف اثر دینامیک های نامعین (دینامیک های فرکانس بالا) بر روی دینامیک های غالب سیستم و همچنین به بهبود کران پایداری پارامتر آشفستگی اشاره کرد [۲۰]. البته تعمیم نتایج فوق به سیستم های با مقیاس چندین زمانه<sup>43</sup> نیز به سادگی امکان پذیر است. تعمیم ایده مطرح شده به سیستم های غیر خطی آشفته تکین نیز یک موضوع تحت بررسی توسط نویسندگان مقاله می باشد.

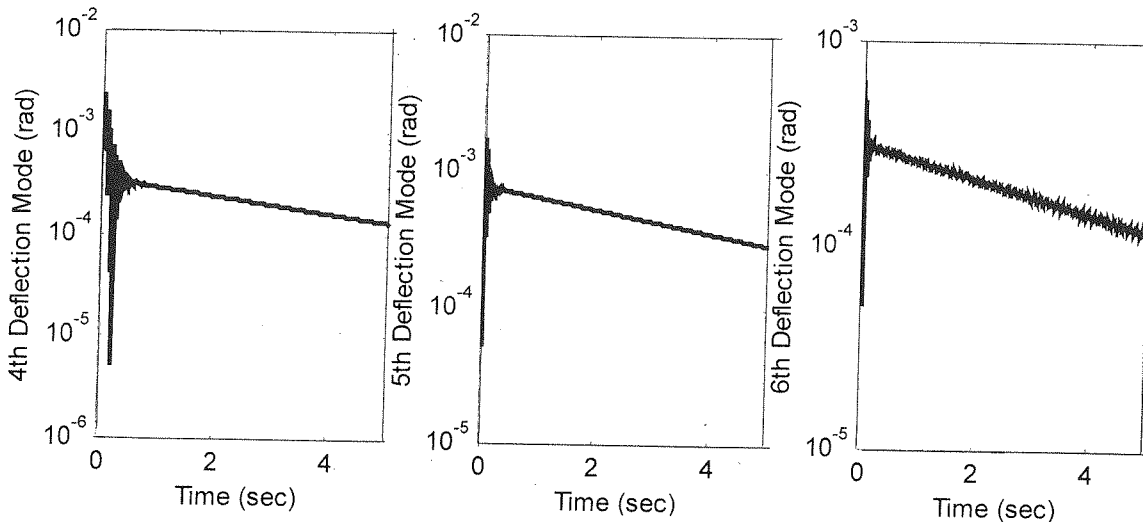
## ضمیمه الف [۲۲]

مدل خطی شده یک بازوی روبوتیکی انعطاف پذیر در قالب سیستم های آشفته تکین به فرم زیر می باشد:

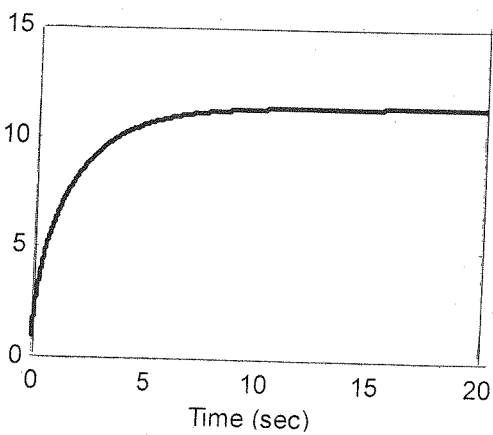
$$\dot{x}_s = A_{11} x_s + B_1 u, \quad x_s(0) = \bar{\eta} \quad (A-1)$$



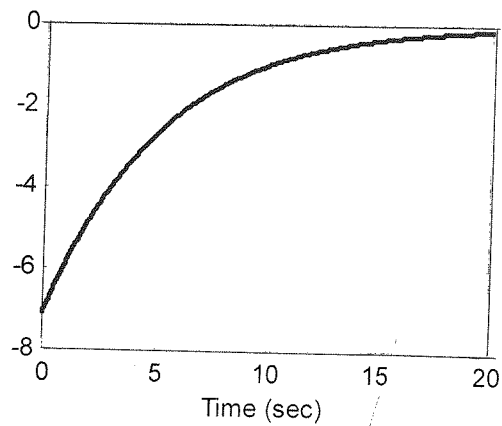
شکل (۲) رگلاسیون موقعیت نوک بازو همراه با سایر دینامیک‌های غالب توسط فیدبک حالت.



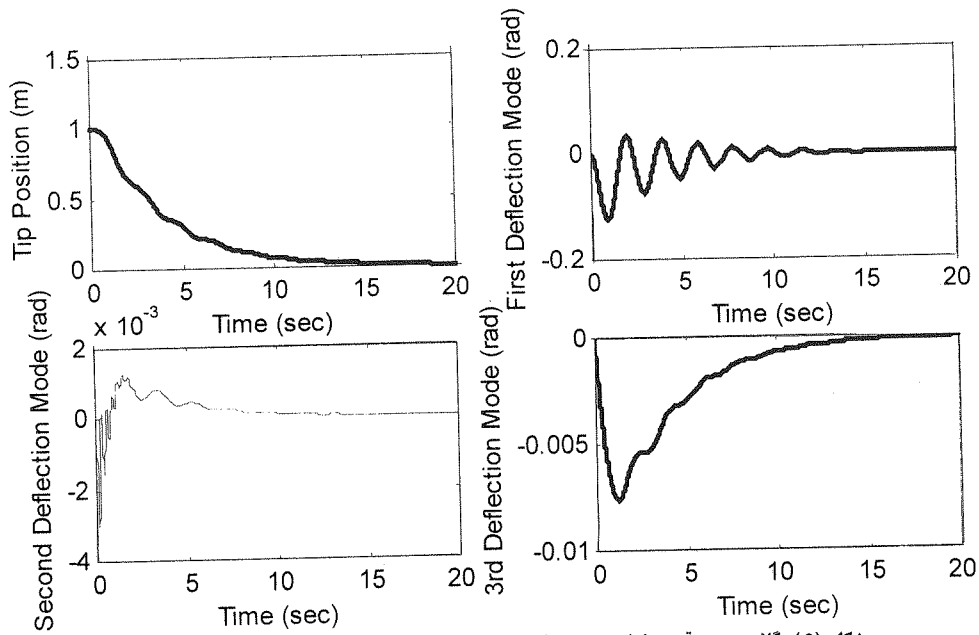
شکل (۳) قدر مطلق مقادیر مودهای انحراف ۴-۱۴-۱۶م دینامیک‌های نامعین.



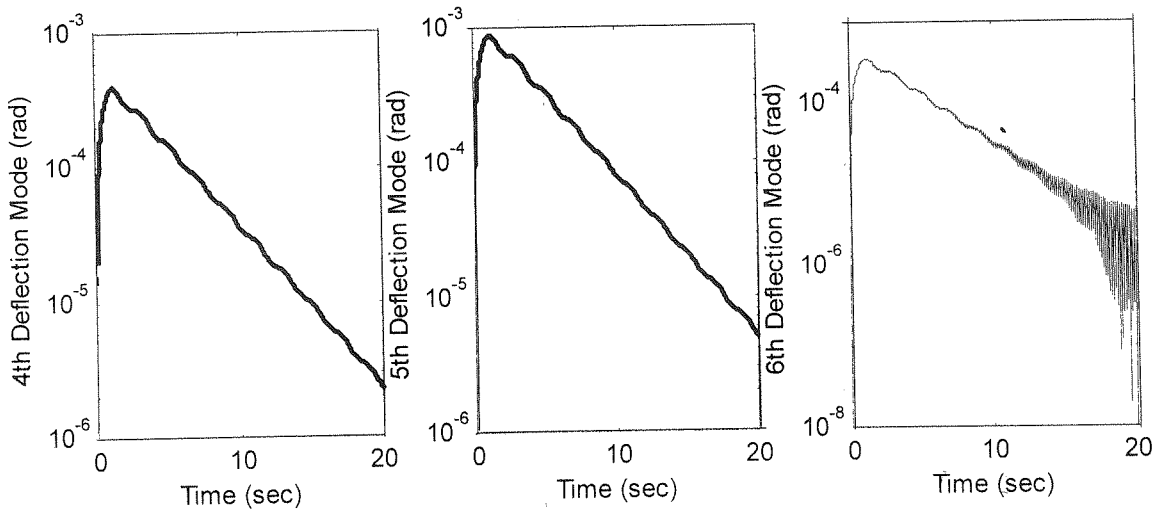
شکل (۵) سطح تضعیف دینامیک‌های نامعین (اغتشاش) روی خروجی کنترل شده.



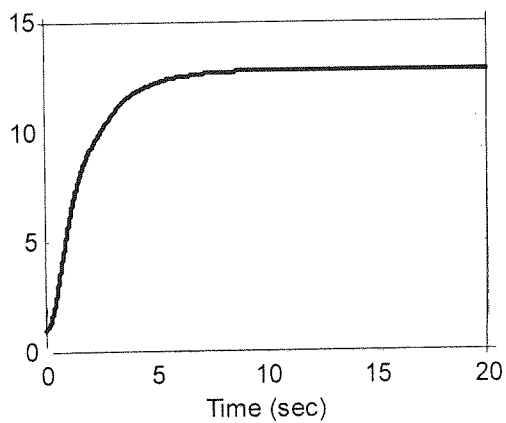
شکل (۴) نمودار کنترل کننده  $H_{\infty}$  توسط فیدبک حالت.



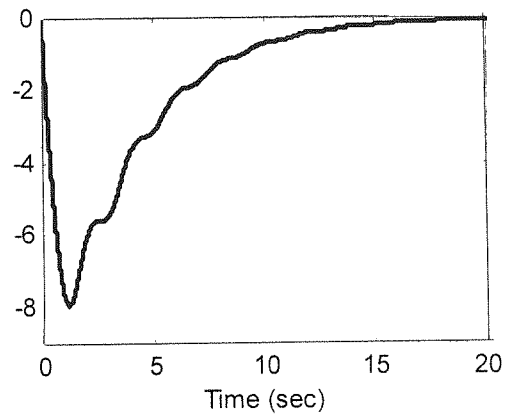
شکل (۶) رگلاسیون موقعیت نوک بازو همراه با سایر دینامیک های غالب توسط فیدبک خروجی.



شکل (۷) قدر مطلق مقادیر مودهای انحراف ۴م - ۶م دینامیک های نامعین



شکل (۹) سطح تضعیف دینامیکهای نامعین (اغتشاش) روی خروجی کنترل شده.



شکل (۸) نمودار کنترل کننده  $H_c$  توسط فیدبک خروجی.

### ضمیمه ب [۲۲]

اطلاعات بازوی روباتیکی انعطاف پذیر

جدول (۱) پارامترهای بازوی انعطاف پذیر.

$L_0$	$1/2 \text{ m}$
$\alpha$	$135/71 \text{ rad / s}$
$\rho$	$1 \text{ Kg / m}$
$I_0$	$0/27 \text{ Kg.m}^2$
$J_0$	$0/109 \text{ Kg.m}^2$
$M_L$	$45 \text{ g}$
$J_L$	$0/00852 \text{ Kg.m}^2$

جدول (۲) فرکانس ها و نسبت های میرایی شش مود انحراف.

$w_1$	$rad / s$	$\xi_1$	$0/1125$
$w_2$	$21 \text{ rad / s}$	$\xi_2$	$0/0863$
$w_3$	$60 \text{ rad / s}$	$\xi_3$	$0/0833$
$w_4$	$118 \text{ rad / s}$	$\xi_4$	$0/0827$
$w_5$	$196 \text{ rad / s}$	$\xi_5$	$0/0828$
$w_6$	$293 \text{ rad / s}$	$\xi_6$	$0/0832$

جدول (۳) موقعیت های صفر- قطب مدل مرتبه ۱۴ ام.

قطبها	صفرها
	$-8/3334$
$-135/71$	$-117/27$
$-0.37745 \pm 3/334 j$	$20/187$
$-1/8337 \pm 21/169 j$	$30/308$
$-4/9834 \pm 59/724 j$	$-79/519 \pm 22/394 j$
$-9/7455 \pm 117/37 j$	$73/184 \pm 97/891 j$
$-17/187 \pm 194/83 j$	$-112/53 \pm 194/17 j$
$-24/391 \pm 292/22 j$	$93/015 \pm 225/37 j$

### ضمیمه ج

اطلاعات شبیه سازی

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 0.0015 & 0.5204 & -1.5131 & 0.1341 & 1.4687 & 1.0600 & -0.8021 \\ 0 & -135.5185 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0000 & -0.3774 & 3.3346 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0.0000 & -3.3346 & -0.3774 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -1.8338 & 21.1698 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -21.1696 & -1.8338 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -4.9862 & 59.6315 \\ 0 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -59.6316 & -4.9862 \end{bmatrix}$$

$$A_{xw} = \begin{bmatrix} 0.8268 & 0.8514 & -1.0557 & -0.0335 & 0.8783 & -0.2318 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$B_x = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -4.5272 \\ 0.0639 \\ 0.0122 \\ 0.0632 \\ -0.0077 \\ 0.0226 \\ 0.0560 \end{bmatrix}$$

$$A_w = \begin{bmatrix} -9.7598 & 117.4250 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -117.4250 & -9.7599 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -16.2488 & 195.0503 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -195.0501 & -16.2487 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -24.5282 & 292.7370 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -292.7361 & -24.5287 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0.0501 \\ -0.0100 \\ 0.0303 \\ -0.0242 \\ 0.0141 \\ -0.0142 \end{bmatrix}$$

- 1- Robust Regulation
- 2- Singular Perturbation
- 3- Fast Dynamics
- 4- Uncertainty
- 5- Coupling
- 6- Single - Link Flexible Manipulator
- 7- Deflection Mode
- 8- Reduced Technique
- 9- Differential Game Theory
- 10- Asymptotic Expansion
- 11- Riccati Equation
- 12- Linear Matrix Inequality
- 13- Invariant Manifold
- 14- Perturbed Parameter
- 15- Truncation
- 16- Gain
- 17- Rigid Modes
- 18- Small Gain Theorem
- 19- Dimension
- 20- Dominant Dynamics
- 21- Disturbance
- 22- Index
- 23- Generalized System
- 24- Stabilizable
- 25- Detectable
- 26- Lower Linear Fractional Transformation
- 27- Hamiltonian System
- 28- Internally Stabilizing
- 29- Stability Matrix
- 30- Spectral Radius
- 31- McMillan Degree
- 32- Kalman Filter
- 33- Worst Case Disturbance
- 34- Singular Value
- 35- Schur's Formula
- 36- Multi Input - Multi Output
- 37- Single Input - Single Output
- 38- Partial Differential Equation
- 39- Ordinary Differential Equation
- 40- Discrete
- 41- Nonminimum - Phase
- 42- Tip Position
- 43- Multi - Time - Scale

## مراجع

- [1] P. V. Kokotovic, R. E. Khalil, and J. O'Reilly, "Singular perturbation Methods in Control: Analysis and Design" New York: Academic, 1986.
- [2] V. R. Saksena, J. O'Reilly, and P. V. Kokotovic "Singular perturbation and Two - Time - Scale Methods in Control Theory: Survey 1976 - 1983," Automatica, vol. 20, no. 2, pp. 273 - 293, 1984.
- [3] H. K. Khalil and F. C. Chen, "Control of Two Time Scale Systems," Syst. Contr. Lett., vol. 19, No. 1, pp. 35 - 42, 1992.
- [4] S. M. Shahruz, "H<sub>∞</sub> - Optimal Compensators for Singularly perturbed Systems," in proc. 28 Th. IEEE Conf. Decision and Control, Tampa, FL, 1989, pp. 2397 - 2398.
- [5] J. L. Vian and M. E. Sawan, "Control for Singularly perurbed Systems, "in proc. 30 Th. IEEE Conf. Decision and Control, Brighton, U. K., 1991. pp. 1072 - 1074.
- [6] Z. pan and T. Basar, "H<sub>∞</sub> - Optimal Control for Singularly perturbed Systems part I: perfect State Measurements." Automatica, vol. 29, no. 2, pp. 401- 423, 1993.
- [7] Z. pan and T. Basar, "H<sub>∞</sub> - Optimal Control for Singularly perturbed Systems. part II: Imperfect State Measurements, "IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 39, pp. 280 - 299, 1994.
- [8] V. Dragan, "Asymptotic expansions for game-theoretic Riccati equations and stabilization with disturbance attenuation for singularly perturbed systems." Syst Contr. Lett., vol. 20, no. 6, pp., 455- 463, 1993.
- [9] H. D. Tuan. S. Hosoe. "On a State - Space Approach

- in Robust Control for Singularly perturbed Systems" Int. J. Contr., vol. 66, no. 3, pp. 435 - 462, 1997.
- [10] p. Shi, V. Dragan. "Asymptotic Control of Singularly perturbed Systems with parametric Uncertainties." IEEE Trans. Automat. contr., vol. 44, pp. 1738 - 1742, 1999.
- [11] W. Tan, T. Leung, Q. Tu. "H<sub>∞</sub> Control for Singularly perturbed Systems" Automatica, vol. 34, no. 2, pp. 255 - 260, 1998.
- [12] E. Fridman. "Exact Slow-Fast Decomposition of the Nonlinear Singularly perturbed Optimal Control problem" Sys. Contr. Letter. Vol. 40, pp. 121-131, 2000.
- [13] H. S. Binning, D. P. Goodall, "Constrained Feedback Control of Imperfectly Known Singularly perturbed Nonlinear Systems" Int. J. Contr. Vol. 73, no. I. pp. 49 - 62, 2000.
- [14] H.R.Karimi, M.J. Yazdanpanah, "Robust Stability and Disturbance Attenuation for a Class of Uncertain Singularly perturbed Systems" Proceedings of European Control Conference, Porto, Portugal, 2001.
- [15] H. R. Karimi. M.J. Yazdapanah "Robust Stabilization of Singularly perturbed Systems Based on a New Modeling Approach," Sixth Inter. Conf. Contr. Autom. Robot. Visi. (ICARCV), Singapore, 2000.
- [۱۶] محمد جواد یزدان پناه و حمید رضا کریمی «طراحی کنترل کننده H<sub>∞</sub> برای رگلاسیون مقاوم سیستم های آشفته تکین» ، هشتمین کنفرانس مهندسی برق ایران، جلد ۳، ۱۳۷۹، صفحه ۳۴-۴۱.
- [17] W. Gawronski, "Computation of H<sub>∞</sub> Norm for Flexible Structures," in proc. Ameri. Contr. Conf., June 1993.
- [18] M. Green and D. J. N. Limebeer, "Linear Robust Control", prntice Hall, 1996.
- [19] B.S. Chen. C. L. Lin, "On the Stability Bounds of Singularly perturbed Systems" IEEE Tran. Auto. Contr. Vol. 35, no. 11, pp. 1265 - 1270, 1990.
- [۲۰] حمید رضا کریمی و محمد جواد یزدان پناه «آنالیز پایداری مقاوم و بهبود کران پایداری پارامترآشفتگی در سیستم های آشفته تکین با استفاده از روش مقدار ویژه ساختار یافته»، نهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، ۱۳۸۰.
- [21] J. C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis, "State - Space Solutions to Standard H<sub>2</sub> and H<sub>∞</sub> Control problems. "IEEE Tran. Autom. Contr., Vol. 34, pp. 831 - 847, 1989.
- [22] M. J. Yazdanpananh, R. V. patel, K. Khorasani, "Robust Regulation of a Flexible - Link Manipulator Based on a New Modeling Approach" proc. Conf. Dec. Contr., San Diego, California, USA, December 1997.