فیلتر کالمن سیستم‌های دوبعدی با استفاده از مدل WAM

مسعود شفیعی
استاد

پاکنوش کریم‌آقائی
دانشجوی دکتری

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله با استفاده از فرم یك بعدی (WAM)[1][1] مسئله تخمین از نوع فیلتر مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش از آنجائیکه مدلسازی یك پروسه دوبعدی اتفاقی به صورت فرم یك بعدی WAM اتفاقی ارائه شده است، با انجام یکسری محاسبات ریاضی به فرمی شبیه معادلات بازگشتی فیلتر کالمن یك سیستم یك بعدی می‌رسیم. باتوجه به متغیر بودن ابعاد فضای حالت در این مدل تعمیم تئوری‌های موجود در سیستم‌های یك بعدی به دو بعدی بعید به نظر می‌رسد. در ابتدا نیاز به مدل سازی آماری فرایند اتفاقی واقع در فرم WAM داریم. لذا در شروع مسئله با یادآوری مشخصات آماری استاندارد مورد استفاده در سیستم‌های یك بعدی و دو بعدی به بررسی خواص آماری سیگنال‌ها در فرم WAM می‌پردازیم. در ادامه با استفاده از مدل یك بعدی اتفاقی حاصل سعی می‌گردد تا کوواریانس خطای تخمین بهینه شود.

واژگان کلیدی

مدل امواج پیشرو (WAM) ـ سیستم های دو بعدی ـ فیلتر کالمن ـ علیت در ربع صفحه اول فرایندهای اتفاقی.

Kalman Filterzing for 2D Systems Using WAM Model

M. Shafiei
Professor

P. K. Aghaei
Ph.D Student

Electrical Engineering Department
Amirkabir University of Technology

Abstract

In this paper Kalman filtering problem for 2-D systems was considered. For this purpose the wave Advanced Model (WAM) was used. Since this model is variable structure it is not possible to extened the theeries availible for 1-D case to 2-D case. Thus, first it is necessary to derive the new results directly for the WAM which is 1-D equivalent of 2-D systms. Seconde by minimization of estimation error, the Kalman filtering in 2-D systems will be obtained.

Keywords

Wave Advanced Model, 2-D System, Kalman Filtering, First Quadrant Causality, a stochastic Process.

مقدمه

بحث فیلتر کالمن به عنوان یکی از مهمترین و مؤثرترین شیوه های فیلتر همواره به صورت یک موضوع کاربردی در تئوری سیستم ها مورد استفاده قرار گرفته ودر سیستم های یک بعدی به عنوان یک موضوع شناخته شده مطرح می باشد [6- 2]. در زمینه سیستم های دوبعدی علی رغم کاربردهای زیادی که فیلترهای بهینه داشته است، هنوز به عنوان یک مسئله باز مورد توجه محققان می باشد [14-7]. اصولاً در مقوله فیلترینگ در سیستم ها، هدف تخمین بردار حالت از روی اطلاعات دریافتی همان لحظه می باشد [3]. بدنبال همین موضوع در سیستم های دوبعدی نیز هدف تخمین بردار حالت در هر نقطه از فضای کار با در دست داشتن اطلاعات دریافتی در همان نقطه است [7]. در مرجع فوق با تعریف یک بردار حالت حاوی اطلاعات یک سطر از یک تصویر، و تعیین دینامیک بین این بردارها به صورت یک معادله فضای حالت بحث فیلترینگ انجام می شود.

در مرجع [1] برای بحث فیلتر ینگ حالت در فرم WAM تنها با بررسی علی بودن فیلتر حاصل مسئله مطرح گردیده است. در این مقاله هیچگونه روابط آلگوریتمی جهت پیاده سازی ارائه نشده است. در مرجع [9] با توجه به مسائل پردازش تصاویر و مدلسازی آماری نویز در مسیر انتقال، بحث حداقل سازی مربعات خطای تخمین انجام شده است. کاربردهای خاصی نظیر دستگاه های چاپ [12- 10] و بحث دریافت اطلاعات مربوط به اعوجاج های حاصل در تولید یک الگو در دو محور طولی و عرضی نیز به عنوان یک کاربرد تخمینگرهای بهینه مطرح می باشد. در مرجع مزبور مسئله برای حالتی که مدل به صورت یک سیستم دوبعدی با فرم ARMA[2] می باشد بحث شده است. در حالتیکه ضرایب ثابت هستند با گسترش روش فاکتورگیری طیفی[3] به سیستم دوبعدی کار طراحی تخمینگر بهینه انجام می شود. در این مرجع برای مواردی که در آن خواص آماری سیگنال های نویز قابل تغییر نیستند از روش های تطبیقی استفاده می شود. در [13] با تبدیل یک مسئله شناسایی در یک مدل ARMA دوبعدی به یک دسته مسائل شناسایی یک بعدی و در نهایت تقریب آنان به یک مدل AR با استفاده از روش فیلتر کالمن یک بعدی عمل پردازش به همراه شناسایی پارامتر صورت می پذیرد.

در مرجع [14] با بررسی نویز حاصل از دوربین های (CCD)[4] ، یک مدل دو بعدی برای تصویر ارائه می شود. با استفاده از روش همبستگی و با معیار مربع خطای تخمین وبا ترکیب مدل مربوط به نویز با مدل شدت روشنائی تصویر عمل تخمین صورت می گیرد. با مقایسه تابع همبستگی بین نقاط نزدیک به یکدیگر در تشخیص میزان خطا، امکان حذف خطا از نوع بایاس فراهم می شود.

در مرجع [15] با تعریف برداری مشتمل بر بردار حالت محلی در درون یک ناحیه نواری شکل، دینامیک دوبعدی به صورت مدل AR تبدیل به یک دینامیک یک بعدی می گردد. دینامیک حاصل بر خلاف فرم یک بعدی WAM دارای بعد ثابت می باشد. ابعاد بردار بدست آمده به مراتب بزرگتر از ابعاد بردار حالت فرم WAM خواهد بود. با پیاده سازی معادلات فیلتر کالمن برای مدل یک بعدی حاصل فیلتر دو بعدی بهینه طراحی می گردد.

در مرجع [16] مسئله طراحی فیلتر بهینه تبدیل به دو مسئله طراحی فیلتر پیشرو[5] و پسرو[6] می شود. این روش که برای تصاویر آغشته به نویز از نوع مه آلود مناسب می باشد با ادغام نتایج دو فیلتر یاد شده به صورت فیلتر کالمن عمل می کند.

با بررسی این مراجع مشاهده می گردد که در آنان شرایط مرزی صفر در نظر گرفته می شود از طرفی با توجه به بحث های فوق مشاهده می شود که در هر کدام از مقالات به نوعی از کلیت مسئله کاسته شده است و یا اینکه روش ارائه شده با مشکل حجیم شدن محاسبات مواجه می شود. لذا نیاز به یک بررسی نسبتاً جامع در این مورد کاملاً محسوس است. در این مقاله با توجه به این موضوع سعی شده است با بهره گیری از مزایای فرم WAM، بحث تخمین بهینه حالت به صورت کلی انجام شود. حجم محاسبات مربوطه از این روش نسبت به سایر روش های دیگر یک بعدی [12, 14] کمتر می باشد که این به دلیل ابعاد کوچکتر ماتریس ها می باشد.

در بخش اول مقاله راجع به مسئله فیلتر کالمن در سیستم های یک بعدی و دو بعدی بحث می شود. در ادامه به فرم WAM مدل های دو بعدی اشاره می شود. در بخش دوم، مدلسازی یک فرایند اتفاقی در سیستم های دو بعدی انجام می شود. در این راستا فرم یک بعدی WAM معادل سیستم های دو بعدی در نظر گرفته شده و ارتباط پارامترهای آماری در این فرم را با پارامترهای متناظر در سیستم دو بعدی اولیه تعیین می شود. انجام این مدلسازی بستر لازم جهت فرموله کردن خطای تخمین را فراهم می کند. با حداقل کردن تابع معیار اتفاقی در نظر گرفته شده قادر خواهیم بود جواب مسئله را فرموله نمائیم.

۱ـ۱ـ تعریف مسئله فیلترینگ در سیستم‌های یک بعدی

فرض کنید که مدل فضای حالت یک سیستم یک بعدی اتفاقی به صورت زیر باشد:

$$X(k+1) = A(k)\,X(k) + B(k)\,w(k)$$

$$y(k) = C(k)\,X(k) + V(k) \qquad (۱)$$

که $w(k)$ نویز ورودی و $v(k)$ نویز اندازه‌گیری بوده و از یکدیگر مستقل هستند.

فرض بر این است که تابع توزیع w, v به صورت گوسی بوده و مشخصات آماری آنان به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathrm{cov}\,[w(k)\,w(l)] = Q(k)\,\delta(k-l)$$

$$\mathrm{cov}\,[V(k)\,V(l)] = R(k)\,\delta(k-l) \qquad (۲)$$

جائیکه δ تابع دیراک دلتای یک بعدی می‌باشد.

در بحث فیلتر کالمن با در دست داشتن اطلاعات خروجی $Z(k)$ سعی می‌گردد تا بردار X در همان لحظه k تخمین زده شود. در این راه بایستی که مربع خطای تخمین حداقل شود. در طی این عمل از روابط آماری بین بردارهای حالت، خروجی، نویزهای ورودی و خروجی استفاده شده و مربع خطای تخمین فرموله می‌گردد. با حداقل‌سازی این عبارت می‌توان به رابطه تخمینگر مورد نظر رسید.

در این حالت رابطه کلی تخمینگر به صورت زیر خواهد بود:

$$X^*(k+1) = A(k)\,X^*(k) + K(k).[Z(k) - C(k)\,X^*(k)]$$

جائیکه $X^*(k+1), X^*(k)$ به ترتیب تخمین بهینه X در لحظه k از روی اطلاعات خروجی تا لحظه k و تخمین بهینه X در لحظه $k+1$ از روی اطلاعات خروجی تا لحظه $k+1$ است.

ضریب اصلاح $K(k)$ از طریق حل معادله ریکاتی بدست می‌آید و بر طبق رابطه تخمینگر فوق این ضریب تعیین کننده میزان تأثیرگذاری خطای تخمین در لحظه k به روی تخمین در لحظه $k+1$ می‌باشد.

۲ـ۱ـ تعریف مسئله فیلترینگ در مدل GR دو بعدی

در سیستم‌های دو بعدی به دلیل اینکه بجای یک بعد زمان دو بعد محورهای افقی و عمودی را داریم و از طرفی مفهوم قبل و بعد قرار گرفتن کمیات مختلف نسبت به یکدیگر از مفهوم پیچیده‌تری برخوردار است، لذا تعمیم مستقیم نتایج حوزه یک بعدی به دو بعدی آنچنان ساده نیست. برای اولین قدم بایستی مدلسازی آماری درستی از فرایندهای موجود در این مدل داشته باشیم.

در ابتدا یادآوری می‌کنیم که بر طبق تعریف، فرایند دو بعدی به صورت $X(i,j)$ را نویز سفید می‌نامیم، هر گاه که رابطه زیر برقرار گردد:

$$\varepsilon\,[x(i,j)\,x'(m,n)] = P(i,j)\,\delta(i-m, j-n)$$

$$0 < i, m < L \qquad 0 < j, n < D \qquad (۳)$$

جائیکه ε عملگر امید ریاضی[۷] و δ تابع دیراک دلتای دو بعدی می‌باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\delta(r,s) = \begin{cases} 1 & r = 0, s = 0 \\ 0 & r \neq 0, \text{or}, s \neq 0 \end{cases} \qquad (۴)$$

در این صورت گوئیم که x یک نویز سفید دو بعدی با ماتریس کوواریانس P می‌باشد. از لحاظ مفهومی این بدان معنی است که در صفحه اندیس دو بعدی رخداد این فرایند در هر نقطه مستقل از تمامی نقاط دیگر است. حال توزیع چنین سیگنال را نیز به صورت گوسی در نظر می‌گیریم، یعنی شبیه حالت یک بعدی توزیع احتمال رخداد یک دامنه با مقدار دلخواه، از یک تابع گوسی تبعیت می‌کند.

یک سیستم دو بعدی GR [2] اتفاقی به فرم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} w(i,j)$$

$$y(i,j) = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + v(i,j) \qquad (۵)$$

فرضیات زیر را انجام می‌دهیم:

1. w, v نویزهای سفید با توزیع گوسی و ماتریس‌های کوواریانس Q, R هستند.
2. v, w مستقل از یکدیگرند.
3. y ; سیگنال خروجی است که قابل اندازه‌گیری می‌باشد.

در این صورت تعریف تخمینگر بهینه فیلتر کالمن به صورت زیر می‌باشد:

با داشتن اطلاعات خروجی مربوط به ناحیه

$D(i,j)$ ($D(i,j)$ به عنوان تمامی نقاط ماقبل (i,j)) تخمین بردار حالت در نقطه (i,j)، به گونه‌ای که خطای تخمین دارای کمترین میزان کوواریانس باشد. در مراجع مختلف ناحیه $D(i,j)$ به شکل‌های مختلفی در نظر گرفته شده است. به علت اینکه در تمامی کارهای انجام شده تاکنون مسئله برای یک کادر مستطیلی از اطلاعات مدنظر قرار گرفته است (به دلیل کاربرد در مسائل پردازش تصویر)، ناحیه $D(i,j)$ به فرم‌های زیر انتخاب شده است:

در مراجع [14] , [7-9]:

$$D(i,j) = \{(m,n) / 0 \le m \le i-1, 0 \le n \le j\}$$

در مراجع [16 - 10]:

$$D(i,j) = \{(m,n) / 0 \le m \le i-1, n-N \le n \le j\}$$

و یا به صورت:

$$D(i,j) = \{(m,n) / m-M \le m \le i-1, n-N \le n \le j\}$$

که در تعیین مناسب M, N (طول و عرض مستطیل اطلاعات ماقبل از نقطه (i,j)) براساس بزرگی نسبی ضرایب تابع همبستگی این نقاط و یا درجه مدل ARMA در مدلسازی تصویر استفاده شده عمل می‌شود. در این صورت رابطه کلی تخمینگر حاصل به فرم‌های کاملاً متفاوتی ظاهر می‌گردند.

تبدیل مدل‌های دو بعدی به فرم یک بعدی WAM

در این بخش برای مدل دو بعدی GR فرم یک بعدی WAM ارائه می‌گردد. برای سایر مدل‌های دو بعدی نیز امکان این تبدیل وجود دارد [1].

یک سیستم دوبعدی در مدل GR رابه صورت رابطه (۵) در نظر می‌گیریم. اگر بردارهای زیر را تعریف کنیم:

$$X(n) = \mathrm{col}\,[x^v(0,n), x^h(1,n-1), x^v(1,n-1) \ldots, x^h(n,0)]$$

$$W(n) = \mathrm{col}\,[w(0,n), w(1,n-1) \ldots, w(n,0)]$$

$$V(n) = \mathrm{col}\,[v(0,n), v(1,n-1) \ldots, v(n,0)]$$

$$Y(n) = \mathrm{col}\,[y(0,n), y(1,n-1) \ldots, y(n,0)]$$

$$f(n) = \mathrm{col}\,[x^h(0,n), x^v(n,0)]$$

در آن صورت برای سیستم فوق فرم WAM به صورت زیر خواهد بود:

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)W(k) + E(k)f(k)$$

$$Y(k+1) = C(k+1)X(k+1) + D(k+1)V(k+1) + H(k+1)f(k+1) \qquad (۶)$$

جائیکه:

$$A(k) = \begin{bmatrix} A_{14} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{12} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_{13} & A_{14} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_{11} \end{bmatrix}, \quad B(k) = \begin{bmatrix} B_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & B_2 & & & \\ 0 & B_1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & B_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & B_1 \end{bmatrix}$$

$$C(K) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & C_1 & C_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ & & & & & \\ \cdot & \cdot & 0 & C_1 & C_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}, \quad E(k) = \begin{bmatrix} A_{13} & \cdot \\ A_{11} & \cdot \\ 0 & \cdot \\ \cdot & 0 \\ \cdot & A_{14} \\ \cdot & A_{12} \end{bmatrix}, \quad H(k) = \begin{bmatrix} C_1 & \cdot \\ 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 \\ \cdot & C_2 \end{bmatrix}$$

و ماتریس D (k). نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$D(k) = \mathrm{diag}\,\{\ldots D \ldots\}$$

که ماتریس‌های A (k), B (k), C (k) دارای ساختار بندگونه Banded [1] هستند.

برای سایر مدل‌های دو بعدی دیگر نظیر FM, MFM, FTR و غیره نیز می‌توان فرم WAM معادل را بدست آورد.

۲ - فیلتر بهینه فرم WAM

در این بخش با استفاده از یک بعدی بودن فرم WAM سعی می‌گردد تا با بهره‌گیری از نتایج موجود در سیستم‌های یک بعدی رابطه تخمینگر بهینه را فرموله نماییم. برای سادگی بررسی بردار شرایط مرزی را صفر فرض می‌کنیم (در صورتی که شرایط مرزی غیراتفاقی باشد، نیز این بحث قابل انجام است. زیرا که در این وضعیت وجود این عبارت در رابطه (۶) از نقطه نظر آماری تأثیری بر روی پارامترهای سایر متغیرها نخواهد داشت). اگر شرایط مرزی صفر نباشد در آن صورت نویزهای ورودی و نویزهای رابطه اندازه گیری مستقل از هم نخواهد بود. در این حالت باز هم امکان فرموله کردن رابطه تخمینگر کالمن وجوددارد (مشابه وضعیت موجود درسیستم‌های یک بعدی).

قضیه ۱: در سیستم دو بعدی (۵) با فرم WAM به

صورت (۶) روابط زیر برقرارند:

۱ ـ W, V خود نویزهای سفید دو بعدی با مشخصات زیر هستند:

$$Cov [W (k), W (l)] = Q (k) \delta (k, 1)$$

$$Cov [V (k), V (l)] = R (k) \delta (k, l)$$

$$Q (k) = diag \{q (i, k - i), i = 0, 1, ..., k\}$$

$$R (k) = diag \{r (i, k - i), i = 0, 1, ..., k\}$$

۲ ـ W, V از یکدیگر مستقلند.

۳ ـ تابع توزیع W, V به صورت گوسی می باشد

اثبات:

اگر عناصر W (k) را در نظر بگیریم، عباراتی به صورت W (i, k - i) (i = 0, 1, ..., k) هستند. لذا بین هر دو عنصر بردار W (k) , W (i) می توان نوشت:

$$\varepsilon [w (i, k - i) . w^T (j, 1 - j)] = q (i, k - i) \delta (i - j, k - n + i - j) \quad 0 \le i \le k \quad 0 \le j \le l \qquad (۷)$$

با توجه به این رابطه در ماتریس کوواریانس Wداریم:

$$Cov [W (k), W (l)] = \varepsilon \{w (i, k - i) . w' (j, l - j)\}^{i,j} = \{q (i, k - i) \delta (i - j, k - n + j - i)\}^{i,j} \qquad (۸)$$

در رابطه فوق منظور از عبارات سمت راست تساوی ها، عنصر iام ستون j ماتریس است. پس:

$$Cov [W (k), W (l)] = diag \{q (i, k - i), \quad 0 \le i \le k\} \quad k = n \qquad (۹)$$

$$Cov [W (k), W (l)] = 0 \qquad k \neq n \qquad (۱۰)$$

بنابر این سفید بودن پروسه W با ماتریس کوواریانس Q محرز می گردد. برای پروسه V نیز به طریق مشابه می توان عمل کرد.

برای اثبات استقلال W از V می توان بدینصورت عمل کرد:

$$\varepsilon [W (k).V^T (l)] = \varepsilon [w (i, k - i).v^T (j, l - j)]^{i,j} \qquad (۱۱)$$

چون w, v خود از یکدیگر مستقلند، لذا تک تک عناصر ماتریس فوق صفر می باشند. پس W, V از یکدیگر مستقلند.

نتایج فوق از انتخاب فرم اولیه دو بعدی مستقل می باشدو برای سایر مدل ها نیز به طریق مشابه قابل اثبات است.

بعد از مدلسازی سیستم دوبعدی اتفاقی در فرم WAM می توان مسئله فیلترینگ بهینه کالمن را تعریف نمود. تخمین بهینه بردار حالت X (k) در فرم WAM را به صورت X* (k) نمایش می دهیم. این تخمین بر اساس اطلاعات بردار خروجی Y مربوط به تمامی نقاط در درون ناحیه مثلثی به فرم زیر می باشد.

$$D (i, j) = \{(m, n) / 0 \le m, o \le n \;\&\; m + n \le k\} \quad ; i + j = k$$

تعریف: فیلتر بهینه در سیستم (۶) عبارت است از تخمینگر X* با حداقل سازی تابعی معیار زیر:

$$\min_{x^* (k)} \varepsilon \{[X (k) - X^* (k)] . [X (k) - X^* (k)]^T\} \qquad (۱۲)$$

در این صورت تابع تخمینگر مزبور تحت عنوان فیلتر کالمن بیان می گردد.

باتوجه به رابطه کلی تخمین [4] داریم:

$$X^* (k) = \varepsilon \{X (k) / Y (k), Y (k - 1) , ... , Y (0)\} \qquad (۱۳)$$

چون X* (k) از روی اطلاعات در نقطه صفر و خطوط درون ناحیه مثلثی D مربوط به خط k حاصل شده است، لذا در مشابهت با سیستم های یک بعدی آن را به صورت X* (k/k) نمایش می دهیم.

از طرف دیگر، تخمین بهینه X* (k) بدون در نظر گرفتن اطلاعات Y در روی خط k به صورت زیر می باشد:

$$X^* (k) = \varepsilon [X (k) / Y (k - 1) , Y (k - 2) , ... , Y (0)] \qquad (۱۴)$$

برای ایجاد همخوانی با نمایش فوق این تخمین را به صورت X* (k/k-1) نمایش می دهیم.

نتیجه ۱: برای یک سیستم دو بعدی که «در ربع اول علی»[۸] می باشد، در مسئله فیلترینگ رابطه زیر صادق است:

$$X^* (k + 1 / k) = \varepsilon [X (k + 1) / Y (k) , Y (k - 1) , ... , Y (0)] = A (k) X^* (k/k) \qquad (۱۵)$$

اثبات: بر طبق روابط (۱۴) و (۶) داریم:

$$X^*(k+1/k) = \varepsilon\,[X(k+1)/Y(k), \dots, Y(0)] = A(k)\,.\,\varepsilon\,[X(k)/Y(k), \dots, Y(0)] + B(k)\,.\,\varepsilon\,[W(k)/Y(k), \dots, Y(0)] = A(k)\,X^*(k/k) + B(k)\,.\,\varepsilon\,[W(k)/Y(k), \dots, Y(0)] \qquad (۱۶)$$

در این رابطه عبارت بخش دوم سمت راست را برای بررسی بیشتر آن به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\varepsilon\,[W(k)/Y(k), \dots, Y(0)] = \{w(i, k-i) / [y(m, n-m), 0 \le m \le k, 0 \le n \le k], 0 \le i \le k\} \qquad (۱۷)$$

باتوجه به فرض علی بودن در ربع صفحه اول و با وجود این واقعیت که تمامی عبارات خروجی y در رابطه فوق نسبت به تمامی نقاط $(i, k-i)$ در ربع صفحه سوم قرار می‌گیرند، این عبارات از ورودی در این نقاط مستقل می‌باشند. لذا این رابطه به صورت ساده شده زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\varepsilon\,\{w(i, k-i) / 0 \le i \le k\} = 0 \qquad (۱۸)$$

پس برای کوواریانس خطای تخمین می‌توان نوشت:

$$\mathrm{cov}\,\{X(k+1/k)\} = \varepsilon\,\{[X(k+1) - X^*(k+1/k)]\,[X(k+1) - X^*(k+1/k)]^T\} + \varepsilon\,[X(k+1) - X^*(k+1)]\,.\,\varepsilon\,[X(k+1) - X^*(k+1/k)] \qquad (۱۹)$$

از طرف دیگر برای عبارت کوواریانس داریم:

$$\mathrm{cov}\,\{X(k+1/k)\} = \mathrm{cov}\,\{A(k)\,.\,X^*(k/k)\} + \mathrm{cov}\,\{B(k)\,.\,W(k)/Y(k), \dots, Y(0)\} = A(k)\,.\,\mathrm{cov}\,\{X^*(k/k)\}\,.\,A^T(k) + B(k)\,.\,\mathrm{cov}\,\{W(k/k)\}\,.\,B^T(k)\,. \qquad (۲۰)$$

با تعریف ماتریس هائی به صورت روابط زیر:

$$\Sigma^{k+1/k} = \mathrm{cov}\,\{X^*(k+1/k)\} \qquad (۲۱)$$

$$\Sigma^{k/k} = \mathrm{cov}\,\{X^*(k/k)\} \qquad (۲۲)$$

$$Q(k) = \mathrm{cov}\,\{W(k)\} \qquad (۲۳)$$

عبارت رابطه (۲۰) به صورت رابطه (۲۴) درخواهد آمد

$$\Sigma^{k+1/k} = A(k)\,.\,\Sigma^{k/k}\,.\,A^T(k) + B(k)\,.\,Q(k)\,.\,B^T(k) \qquad (۲۴)$$

همانگونه که می‌دانیم در یک رابطه به صورت تبدیل خطی، مستقل از دو اندیسه بودن متغیرها خاصیت گوسی بودن توزیع بعد از تبدیل نیز حفظ می‌گردد [3]. از طرفی دیگر از روابط (۱۵-۱۳) و از گوسی بودن بردارهای $X(k), Y(k), \dots, Y(0)$ می‌توان توابع توزیع $X^*(k/k-1)$, $X^*(k/k)$ را نیز بدست آورد.

اگر به عبارت خروجی در رابطه (1) توجه نماییم به خاطر استقلال $X(0)$, $V(0)$ و بر طبق [4] داریم:

$$X^*(0/0) = \varepsilon\,\{X(0)\} + \Sigma^0 H^T(0)\,[H(0)\,\Sigma^0 H^T(0) + R^0]^{-1}\,.\,[Z(0) - H(0)\,.\,\varepsilon\,\{X(0)\}]$$

$$= \Sigma^0 - \Sigma^0 . H^T(0)\,[H(0)\,\Sigma^0 H^T(0) + R^0]^{-1} H(0) . \Sigma^0$$

که Σ^0 کوواریانس $X(0)$ می‌باشد.

انتظار داریم که فرم کلی این روابط به صورت زیر باشند:

$$X^*(k) = X^*(k/k-1) + K(k)\,.\,[Z(k) - H(k)\,X^*(k/k-1)] \qquad (۲۵)$$

که این رابطه فرمول کلی برای تخمین بهینه از نوع فیلترینگ را بیان می‌کند. در این حالت انتظار داریم که کوواریانس خطای فیلترینگ نیز از فرم زیر تبعیت نماید:

$$\Sigma^{k/k} = \Sigma^{k/k-1} - K(k)\,.\,H(k)\,.\,\Sigma^{k/k-1} \qquad (۲۶)$$

توجه: در سیستم های یک بعدی نیز این روابط را مشاهده می‌کنیم ولی بایستی توجه کنیم که در سیستم های دوبعدی به علت اینکه تنها با بعد زمان سروکار نداشته و متغیرها در گذر دو اندیس در حال تغییرند، لذا بسیاری از فرض های مربوط به استقلال و یا ارتباط آماری آنان به صورت مشابه با سیستم های یک بعدی قابل نتیجه گیری نیستند.

برای اثبات این روابط از استقرار ریاضی استفاده می‌کنیم.

در رابطه خروجی به صورت $Y(l) = H(k)\,X(k) + D(k)\,V(k)$ نشان می‌دهیم که $w(k\,|\,k-1)$ و $V(k\,|\,k-1)$ دو سیگنال گوسی هستند و میانگین $X^*(k|k-1)$ صفر می‌باشد. از

طرف دیگر اگر ماتریس های کوواریانس آنان نیز به ترتیب S و R (k) نامگذاری شود، توزیع شرطی X با داشتن Y گوسی بوده و بر طبق تخمین بیس[9] [4] داریم:

$$X^*(k/k) = X^*(k/k-1) + \Sigma^{k/k-1} H^T(k).[H(k)\, \Sigma^{k/k-1} H^T(k) + R^k]^{-1} \{Z(k) - H(k)\, X^*(k/k-1)\}$$

$$\Sigma^{k/k-1} = \Sigma^{k/k-1} - K(k)\,.\,H(k)\, \Sigma^{k/k-1} \qquad (۲۷)$$

فرض می کنیم که این روابط برای مرحله $k = n - 1$ صادق باشند.

بر طبق (۶)، X (k) با رابطه زیر به ورودی های W (0) ... W (k) مرتبط می گردد:

$$X(k) = \prod_{i=0}^{k-1} A(i)\,.\,X(0) + \sum_{n=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{k-1-n} A(j)\, B(n)\, W(n) \qquad (۲۸)$$

بنابر این به خاطر برقراری رابطه خطی بین X (k), X (0), W (.) و باتوجه به داشتن فرض توزیع گوسی در X (0), W (.) توزیع X (k) نیز گوسی خواهد شد. به همین ترتیب می توان نشان داد که Y (k) نیز گوسی است. باتوجه به مطالب فوق می توان نتیجه گیری کرد که بردارهای Y (k - 1), Y (k -2), ... دارای توزیع گوسی هستند.

چون مجموعه فوق و X (k) هر دو از تبدیلات خطی بردارهای Y (i), V (i) i = 0, 1, ..., X (0) تشکیل گردیده اند. لذا X (k) به شرط داشتن مجموعه {Y (0), Y (1), ... , Y (k -1)} یک سیگنال گوسی خواهد بود. در این حالت داریم:

$$X^*(k/k-1) = \varepsilon\{X(k) / [Y(0), Y(1), \ldots, Y(k-1)\}$$

$$\Sigma^{k/k-1} = \mathrm{cov}\{X(k) / [Y(0), Y(1), \ldots, Y(k-1)]\} \qquad (۲۹)$$

از طرف دیگر به علت گوسی بودن x (i, j) به شرط Y (i, j) می توان نتیجه گیری کرد که x (i, j) به شرط Y (0), Y (1) ... Y (k -1) یک سیگنال گوسی است. پس توزیع X (k) به شرط داشتن اطلاعات روی این خطوط گوسی است.

با بیان فوق و تخمین بیس [4] رابطه (۲۷) محرز می گردد.

در جمع بندی مطالب فوق قضیه زیر بیان می گردد.

قضیه ۲: برای سیستم دو بعدی متغیر با زمان که در فرم WAM به صورت رابطه (۶) می باشند، تخمینگر بهینه فیلتر کالمن به صورت زیر خواهد بود:

$$X^*(k/k) = X^*(k/k-1) + \Sigma^{k/k-1} H^T(k)\,.\,[H(k)\, \Sigma^{k/k-1} H^T(k) + R(k)]^{-1} \{Z(k) - H(k)\, X^*(k/k-1)\}$$

$$\Sigma^{k/k} = \Sigma^{k/k-1} - K(k)\,.\,H(k)\, \Sigma^{k/k-1}$$

$$\Sigma^{k+1/k} = A(k)\,.\,\Sigma^{k/k}\,.\,A^T(k) + B(k)\,.\,Q(k)\,.\,B^T(k)$$

$$K(k) = \Sigma^{k/k-1} H^T(k)\,.\,[H(k)\, \Sigma^{k/k-1} H^T(k) + R^k]^{-1}$$

با این نتایج به راحتی می توان برای سیستم دو بعدی مورد نظر آلگوریتم فیلترینگ را پیاده کرد.

مثال: سیستم دو بعدی در مدل MFM به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$x(i+1, j+1) = -.01x(i+1, j) + -.02x(i, j+1)\ .01(i+1, j) + .2w(i, j+1)$$

$$Y(i, j) = .2x(i, j) + v(i, j)$$

جائیکه v, w به ترتیب نویزهای سفید گوسین ورودی و اندازه گیری با میانگین صفر و واریانس ۰/۱۶ و ۱ می باشند

در این حالت شرایط مرزی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

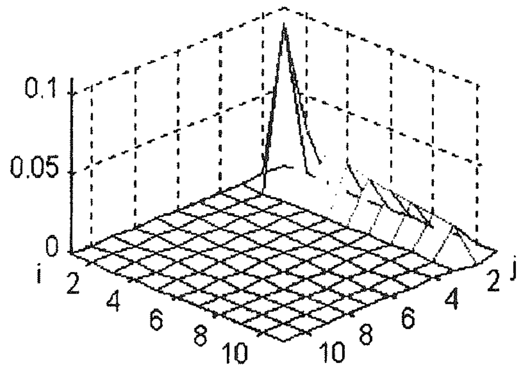
$$x(1, j) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 20\ ,\ x(i, 1) = -3\exp\left(\frac{4}{\sqrt{i}}\right)\ ;\ j = 1, 2, \ldots, 20\ ,\ x(0, 0) = .91$$

می خواهیم با داشتن اندازه گیری های Y ، تخمین بهینه بردارهای x را تعیین کنیم.

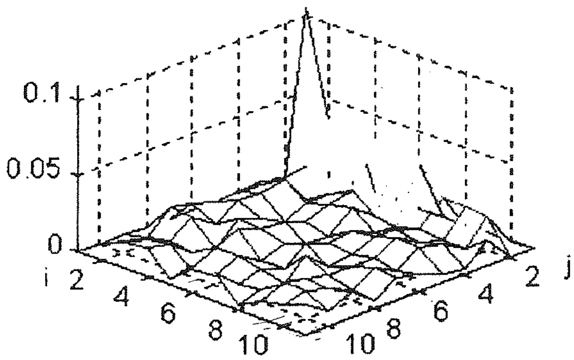
نتایج در شکل های زیر ارائه شده است که به جهت داشتن معیار مقایسه مناسب منحنی خروجی بدون وجود نویز، خروجی با وجود نویز و خروجی سیستم با بردار حالت تخمین زده شده با هم مقایسه می گردد.

شکل (الف) پاسخ خروجی بدون نویز را نشان می دهد و در شکل های (ب) و (ج) نیز به ترتیب خروجی واقعی سیستم و خروجی حاصل از بردار حالت تخمین زده شده رسم گردیده است.

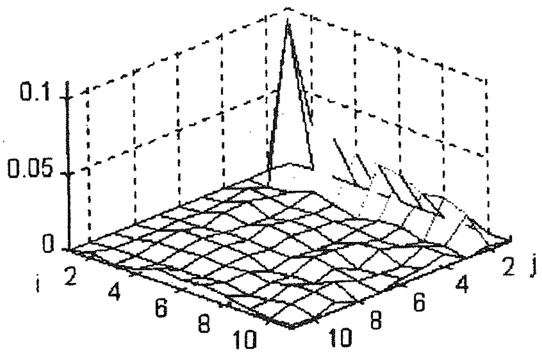
همانگونه که از این اشکال مشخص می شود، با انجام آلگوریتم فیلترینگ قادر هستیم تا مقدار زیادی از اثر نویز را کاهش دهیم.



(الف)



(ب)



(ج)

نتیجه‌گیری

با استفاده از فرم WAM سیستم های 2-D خطی، مسئله فیلترینگ به صورت یک مسئله یک بعدی فرموله گردید. نتایج حاصل به صورت روابط آلگوریتمی، برحسب ماتریس های فرم WAM می باشد. نتایج حاصل قابل استفاده در کلیه مدل های چند بعدی خطی است. مشابه روابط متناظر درسیستم های یک بعدی در تعیین ضریب تخمینگر بهینه احتیاج به حل یک معادله غیرخطی به صورت معادله ریکاتی می باشد. باتوجه به اینکه در این روش از فرم WAM استفاده می شود، هیچگونه محدودیتی از نظر فضای اندیس ها اعمال نمی شود و با توجه به اینکه با وجود شرایط مرزی غیرصفر نیز مسئله را می توان بررسی کرد، این روش دارای برتری های عمده ای می باشد.

زیرنویس ها

1- Wave Advanced Model
2- Auto Rgrssiv Moving Average
3- Spectral Factorization
4- Charge Coupled Device
5- Forward
6- Bakward
7- Expectation Operator
8- First Quadrant Causality
9- Baysian estimation

مراجع

[1] W. A. Porter & j. L. Aravena, "1-D model for M-D processes" IEEE Trans. Ckt. & Systems, Vol. 31, pp. 742-744, Aug. 1984.

[2] P. R. Roesser, "A discrete sate space model for linear image processing" IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 20, pp. 1-10, Feb. 1975.

[3] J. S. Meditch, "Stochastic Optimal Linear Estimation and Control" Mc Graw-Hill Book Company New York 1969.

[4] B. D. O. Anderson & J. B. Moore, "Optimal Fil-

tering" Prentice-Hall Inc New Jersy 1979.

[5] T. Kailath, "An innovations approach to least-squares estimation part I: Linear filtering in additive white noise "IEEE Trans. Automat. Control, Vol. Ac-13, pp. 1-11, Dec. 1968.

[6] H. Poor, "An Introduction to signal Detection and Estimation" Springer-Verlag 1988.

[7] J. Woods and C. H. Radewan, "Kalman filtering in two dimensions" IEEE Trans. Inf. Science, Vol. IT-23, pp. 232-239, July 1977.

[8] W. A. Porter and J. L. Aravena, "State estimation in discrete M-D systems" IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 31, pp. 833-841, Mar. 1986.

[9] A. Habibi, "Two dimensional Bayesian estimation of image "IEEE Proc., Vol. 60, pp. 878-884, July 1972.

[10] W. P. Heath and P. E. Wellstead, "Self tunning prediction and control for two dimensional processes-part 1: Fixed parameter algorithms" Int. J. Control, Vol.62, pp. 65-8, 1995.

[11] ....., "Self tunning prediction and control for two dimensional processes-part 2: parameter estimation, set point tracking and offset handling" Int. J. Control, Vol. 62, pp. 239-269, 1995.

[12] P. E. Wellstead and J. R. Caldas-Pinto, "Self tunning filters and Predictors for two dimensional systems part : 1 Algorithms "Int. J. Control, Vol. 42, pp. 475-478, 1985.

[13] J. Biemond and F. G. Van Der Putten and J. W. Woods, "Identification and restoration of images with symmetric noncausual blurs" IEEE Tran. Ckt & Systems, Vol. 35, pp. 385-393, April 1988.

[14] H. Kaufman etal, "Estimation and identification of 2-D images" IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 28, Nio. 5, pp. 745-756, July 1983.

[15] M. R. Azimi-Sadjadi and J. Bannour, "Two dimensional recursive parameter identification for adaptive Kalman filtering" IEEE Trans. Ckt. & Systems, Vol. 38, pp. 1077-1081, July 1991.

[16] D. Manolakis and V. K. Ingle, "Fast algorithm for 2-D FIR Wiener filtering and linear prediction" IEEE Trans. Ckt. & System, Vol. 34, 181-187, Feb. 1987.