

شبیه سازی مونت کارلو برای مدل هایزنبرگ یک بعدی

مهرداد صالحیان متی کلائی
کارشناس ارشد

حسین آقا حسینی
استادیار

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله، یک روش جدید برای شبیه سازی مدل هایزنبرگ XYZ ($S = \frac{1}{2}$) یک بعدی معرفی می گردد. این روش بر اساس فرمول تروتور بنا شده است. بدین ترتیب که با استفاده از فرمول تروتور یک مدل یک بعدی کوانتومی به مدل دو بعدی کلاسیکی تبدیل می گردد، که در آن بعد اضافه شده، یعنی زمان موهومی به دمای سیستم مربوط بوده و نقش تاثیرات کوانتومی را بازی خواهد کرد. بدین ترتیب که با استفاده از تکنیک مونت کارلو و انتگرال مسیر فاینمن، خواص ترمودینامیکی یک دستگاه با جمع کردن اثر عملگر نمایی بر روی مسیرهای کلاسیکی در درجات حرارت پائین محاسبه و با نتایج حاصل از مقاله Bonner & Fisher که با روش متفاوت انجام گردیده مقایسه گردیده اند. یکی از محسّنات این روش، سرعت بالای آن در مقایسه با دیگر روشهاست. بعلاوه جمع روی حالتها، دارای یک نمایش گرافیکی است که می تواند بینشی از طبیعت درونی یک دستگاه بر هم کنشی ارائه دهد.

Monte Carlo Simulation for one Dimensional Heisenberg Model

H.Aghahosseini
Assistant Professor

M.Salehian Maticollahi
M.SC

Physics Department,
Amirkabir University of Technology

Abstract

With use of the Trotter's technique simulation for one - dimensional XYZ Heisenberg systems of spin - $\frac{1}{2}$ have been performed. It is shown that the one- dimensional quantum systems can be transformed to the two- dimensional classical systyems by Trotter's technique. The extra dimension found to be like an imaginary time which has been related to the temperature of the system. Several chanis of one - dimensional spin systems are simulated by Monte carlo method and the thermodynamic quantities of these are calculated at low temperature by means of this technique. Comparison is made with Bonner & Fisher's exact data which is found to be in good agreement with their results.

سال ۱۹۷۶، سوزوکی برابری مدل آیزینگ ۲ بعدی با حالت زمینه مدل XY- خطی را با محاسبه سری پذیرفتاری ثابت کرد [۱] و براساس آن بستگی عمومی بین دستگاه‌های اسپینی کوانتومی d بعدی و مدل آیزینگ d + 1 بعدی را براساس زیر بیان می‌شود. نتیجه گرفت [2-6]:

$$e^{H_1 + H_2} = \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{H_1/m} + e^{H_2/m})^m$$

بدین ترتیب یک مدل کوانتومی d بعدی به مدل d + 1 بعدی کلاسیکی تبدیل می‌شود، که در آن بعد اضافه شده به دمای سیستم اختصاص دارد.

بدین ترتیب دستگاه معادل بصورت زیر بسط داده می‌شود:

$$Z = \text{tr}^{(d)} e^{-\beta H} = \text{tr}^{(d+1)} \exp H_{\text{eff}}^{(d+1)}$$

که در آن $H_{\text{eff}}^{(d+1)}$ یک هامیلتونی d + 1 بعدی مؤثر کلاسیک است.

حال هامیلتونی هایزنبرگ با بر هم کنش نزدیکترین همسایه‌ها برای یک شبکه پاد فرو مغناطیس یک بعدی را در نظر می‌گیریم:

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z) \quad (1)$$

که در آن J ثابت تبدالی و S_j عملگر اسپینی الکترون در جایگاه زام شبکه است.

در یک ماده پادفرومغناطیس در حالت تعادل گرمائی و در غیاب میدان مغناطیسی، مغناطیس‌های اتمی (اثر اسپین) امتدادهای کاملاً تصادفی اختیار می‌کنند، بطوریکه اثر کل آنها صفر می‌شود. بنابراین با استفاده از فرمول تروتز، اثر فوق را با در نظر گرفتن تکنیک مونت کارلو شبیه سازی می‌کنیم.

۱- محاسبه تابع پارش

برای محاسبه تابع پارش، هامیلتونی سیستم را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$H = H_1 + H_2$$

که در آن فرض می‌کنیم، H_1 شامل پیوندهای فرد و H_2 شامل پیوندهای زوج باشند. اگر هامیلتونی مورد نظر را به

شکل $H_{j,j+1}$ نمایش دهیم. در اینصورت خواهیم داشت:

$$H_1 = \sum_{j \text{ odd}} H_{j,j+1}$$

$$H_2 = \sum_{j \text{ even}} H_{j,j+1}$$

با تفکیک بیشتر هامیلتونی داریم:

$$H_{j,j+1} = H_{j,j+1}^{xy} + H_{j,j+1}^z$$

با توجه به تقسیم بندی فوق، و با توجه به اینکه تابع پارش باید تابع زوجی از m باشد [7]. یک مجموعه ای از 2m ویژه حالت‌های عملگر S^z کل رادر هر گام زمانی $(\Delta\tau = \frac{\beta}{m})$ قرار می‌دهیم [8-9].

$$Z = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum \langle i_1 | e^{-\Delta\tau H_1} | i_2 \rangle \langle i_2 | e^{-\Delta\tau H_2} | i_3 \rangle \langle i_3 | e^{-\Delta\tau H_1} | i_4 \rangle \dots \langle i_{2m} | e^{-\Delta\tau H_2} | i_1 \rangle \quad (2)$$

محاسبه المانهای ماتریسی در فرمول (۲) منجر به محاسبه وزن‌های بولتزمن زیر می‌شود.

$$B = \left\langle S_{j,t}^z, S_{j+1,t}^z \left| e^{-\Delta\tau \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2} \right| S_{j,t+1}^z, S_{j+1,t+1}^z \right\rangle$$

که در آن t و t + 1 نمایانگر دو گام زمانی مجاور هستند. هر وزن بولتزمن که مربوط به اسپین‌های یک پیوند در دو گام زمانی مجاور است، در واقع متناظر با یک مربع برهم‌کنشی است که در آن ذرات امکان جابجایی دارند. در هر گام زمانی آرایش جایگاه‌های اسپینی مبین یکی از حالات میانی $|i_k\rangle$ در فرمول (۲) می‌باشد. مربع‌های هاشورزده متناظر نواحی خاصی از فضای حقیقی و زمان موهومی است که در آنها ذرات می‌توانند جابجا شوند. جمع‌زدن روی حالات میانی در معادله (۲) متناظر با جمع‌زدن روی همه روشهای ممکن توزیع ذرات در امتداد محور فضایی در هر گام زمانی است. یا به عبارت دیگر این جمع به معنای در نظر گرفتن تمام آرایش‌های دو بعدی متناظر با یک آرایش یک بعدی فضایی می‌باشد.

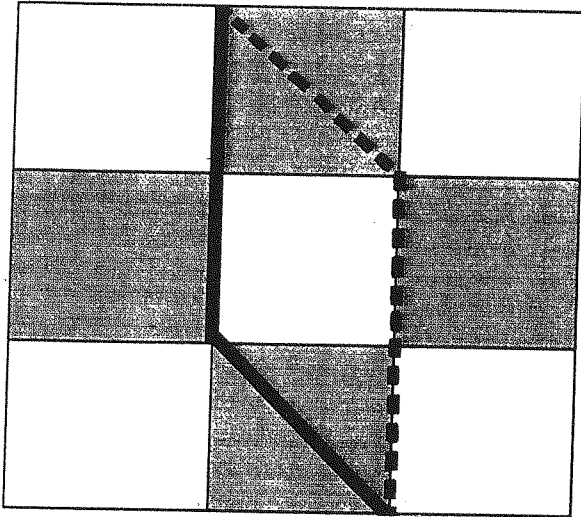
اگر در شکل ۱ جایگاه‌های اشغال شده مربوط به یک ذره را در تمام گامهای زمانی متصل کنیم خطی به نام جهان خط آن ذره حاصل می‌شود.

مورد آزمایش می باشد.

حال برای قبول و یا رد تغییر ایجاد شده در جهان خط، از الگوریتم متروپولیس استفاده می کنیم. بدین ترتیب که یک عدد تصادفی بین صفر و یک، در نظر می گیریم و احتمال P را مطابق زیر تعریف می نمایم.

$$P = \frac{R}{1 + R}$$

اگر $r < p$ (r عدد تصادفی بین صفر و یک) باشد آرایش جدید مورد قبول واقع میگردد و در غیر اینصورت مردود شمرده می شود.



شکل (۲) تغییر موضعی مجاز در يك جهان خط.
خط توپر نماینده جهان خط قبل از تغییر و خط چین نماینده بعد از تغییر مکان ذرات می باشد.

۳- محاسبه وزن های بولتزمن

برای اجتناب از داشتن وزن های بولتزمن منفی در محاسبه تابع پارش، روی هامیلتونی (۱) یک تبدیل یکانی U انجام می دهیم [11]:

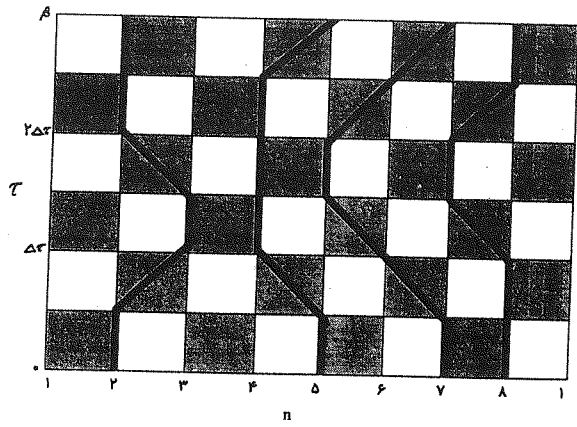
$$H \Rightarrow UHU^+$$

$$U = \exp(i\pi S_j^z)$$

بنابراین داریم:

$$e^{i\pi S_j^z} S_j^x S_{j+1}^x e^{-i\pi S_j^z}$$

$$e^{i\pi S_j^z} S_j^y S_{j+1}^y e^{-i\pi S_j^z}$$



شکل (۱) نگاشت شبکه يك بعدی روی يك شبکه دو بعدی که در آن محور عمودی نماینده زمان موهورمی τ می باشد. مربع های سفید نمایانگر مربع های غیر برهم کنشی هستند که در آنها ذرات امکان جابجایی ندارند و مربع های هاشورزده نمایانگر مربع های برهم کنشی می باشند که در خلال آنها ذرات جابجا می شوند.

۲- روش بهنگام کردن^۴

فرایند ایجاد یک پیکر بندی جدید مجاز از روی پیکر بندی قدیم رابهنگام کردن می نامیم.

برای تشریح این فرایند، یک پیکر بندی مجاز را در نظر می گیریم. از آنجائیکه فرم هامیلتونی اقتضا می کند که برای هر پیکر بندی، در هر مربع برهم کنشی تعداد ذرات بقا داشته باشند، حداقل تغییری که می تواند یک حالت جدید ایجاد کند، جابجایی دو ذره از لبه عمودی یک مربع غیر برهم کنشی به لبه دیگر این مربع می باشد و جابجایی صرفاً یک ذره باعث ایجاد یک حالت غیرمجاز می شود، چون اگر ما از یک ترکیب مجاز شروع کنیم، همیشه به یک فرمیون بدون بقا در یک مربع برهم کنشی هدایت می شویم.

با انجام پی در پی تغییر مکان فوق الذکر، تمام پیکربندی بطور تصادفی ایجاد می شوند.

اگر چنانچه امکان یک جابجایی موضعی برای جهان خط وجود داشته باشد، باید حاصلضرب المانهای ماتریسی در معادله (۲) بعد و قبل از حرکت محاسبه گردد. که این نسبت به R نمایش داده می شود. به عبارت دیگر R نسبت سهم آرایش جدید در تابع پارش به سهم آرایش قدیم می باشد. برای یک انحراف جزئی^۵ ویژه حالت $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$ ، این نسبت را بدست می آوریم [10]:

$$R = \frac{\langle \psi' | e^{-BH} | \psi' \rangle}{\langle \psi | e^{-BH} | \psi \rangle}$$

که در آن $|\psi\rangle$ ویژه حالت دو ذره ای است، و $|\psi'\rangle$ ویژه حالت

$$H = \sum_j -J (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y) + \sum_j JS_j^z S_{j+1}^z$$

با جایگزینی S_j^+ و S_j^- در معادله فوق بدست می آوریم:

$$H = \sum_j -\frac{J}{2} (S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + \sum_j JS_j^z S_{j+1}^z$$

حال با توجه به هامیلتونی فوق، وزن های بولتزنن رامی توان به شکل زیر محاسبه کرد:

$$B = \left\langle S_{j+1}^z, S_{j+1}^z \left| \exp\left(\frac{\beta J}{2m} (S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+)\right) \exp\left(\frac{-\beta J}{m} S_j^z S_{j+1}^z\right) \right| S_{j+1}^z, S_{j+1}^z \right\rangle$$

با قرار دادن $\hbar=1$ تاثیر عملگرهای S^+ , S^- و S^z روی حالت های اسپینی $|+\rangle$ و $|-\rangle$ که به ترتیب بردارهای ویژه S^z به ازای مقادیر ویژه $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ می باشند، به شکل زیر می باشند:

$$S^- |+\rangle = |-\rangle, \quad S^- |-\rangle = 0$$

$$S^+ |-\rangle = |+\rangle, \quad S^+ |+\rangle = 0$$

$$S^z |+\rangle = \frac{+1}{2} |+\rangle, \quad S^z |-\rangle = \frac{-1}{2} |-\rangle$$

به ازای مقادیر مختلف حالات اسپینی $\left(\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، مقادیر مختلفی برای وزن های بولتزنن خواهیم داشت. ولی نکته قابل توجه آن است که به سادگی می توان دید که وزن های بولتزنن که بقای S^z را نقض می کنند، صفر می باشند و تنها ۶ وزن غیر صفر داریم:

$$B_1 = \langle ++ | e^{-\Delta\tau H} | ++ \rangle = \langle -- | e^{-\Delta\tau H} | -- \rangle = \exp\left(\frac{-\beta J}{4m}\right)$$

$$B_2 = \langle +- | e^{-\Delta\tau H} | +- \rangle = \langle -+ | e^{-\Delta\tau H} | -+ \rangle = \exp\left(\frac{\beta J}{4m}\right) \cosh\left(\frac{\beta J}{2m}\right)$$

$$B_3 = \langle +- | e^{-\Delta\tau H} | +- \rangle = \langle -+ | e^{-\Delta\tau H} | -+ \rangle = \exp\left(\frac{\beta J}{4m}\right) \sinh\left(\frac{\beta J}{2m}\right)$$

هر یک از وزن های فوق، یکی از اشکال شکل (۳) را نشان می دهند.

۴- محاسبه کمیت های فیزیکی

حال می توانیم مقدار چشمداشتی عملگرهای $\langle H \rangle$ و $\langle H^2 \rangle$ را جهت محاسبه انرژی و ظرفیت گرمایی بدست آوریم. برای محاسبه انرژی می بایست به بررسی کمیست

$$e^{i\pi S_j^z} S_j^z S_{j+1}^z e^{-i\pi S_j^z}$$

بدلیل جابجا شدن عملگرهای اسپینی در جایگاه های مختلف شبکه و بعلاوه جابجایی $e^{i\pi S_j^z}$ و S_j^z داریم:

$$e^{i\pi S_j^z} S_j^z S_{j+1}^z e^{-i\pi S_j^z} = S_j^z S_{j+1}^z$$

برای بقیه جملات داریم:

$$e^{i\pi S_j^z} S_j^x S_{j+1}^x e^{-i\pi S_j^z} = \left(e^{i\pi S_j^z} S_j^x e^{-i\pi S_j^z} \right) S_{j+1}^x = \hat{A} S_{j+1}^x$$

$$e^{i\pi S_j^z} S_j^y S_{j+1}^y e^{-i\pi S_j^z} = \left(e^{i\pi S_j^z} S_j^y e^{-i\pi S_j^z} \right) S_{j+1}^y = \hat{B} S_{j+1}^y$$

برای محاسبه عملگرهای \hat{A} و \hat{B} توجه داریم که:

$$\exp(i\pi S_j^z) S_j^x \exp(-i\pi S_j^z) = S_j^x + i\pi [S_j^z, S_j^x] +$$

$$\left(\frac{i\pi}{2!}\right)^2 [S_j^z, [S_j^z, S_j^x]] + \left(\frac{i\pi}{3!}\right)^3 [S_j^z, [S_j^z, [S_j^z, S_j^x]]] +$$

$$\dots = S_j^x - \pi S_j^y - \frac{\pi^2}{2!} S_j^x + \frac{\pi^3}{3!} S_j^y + \dots$$

$$= S_j^x \cos\pi - S_j^y \sin\pi = -S_j^x$$

بنابراین به ازای $(\hbar=1)$ داریم:

$$\hat{A} = -S_j^x$$

و با روش مشابه بدست می آوریم:

$$\hat{B} = -S_j^y$$

بطور خلاصه اثر تبدیل یکانی روی هامیلتونی چنین است:

$$S_j^x \Rightarrow -S_j^x, \quad S_j^y \Rightarrow -S_j^y, \quad S_j^z \Rightarrow S_j^z$$

و در نتیجه هامیلتونی معادله (۱) بصورت زیر در می آید:

$$\langle H \rangle = \frac{-\sum_k \frac{\partial W(k)}{\partial b} / P(k)}{\sum_k W(k) / P(k)}$$

$$= \frac{1}{Mm} \sum_{k=1}^M \left[N_1(k) \frac{J}{4} - N_2(k) \frac{J}{2} \left[\text{Tanh} \left(\frac{\beta J}{2m} \right) + \frac{1}{2} \right] - N_3(k) \frac{J}{2} \left[\text{Coth} \left(\frac{\beta J}{2m} \right) + \frac{1}{2} \right] \right]$$

و برای ظرفیت گرمایی داریم:

$$C = \frac{1}{MK_B T^2 m^2} \sum_k \left(\langle E^2(k) \rangle - \langle E(k) \rangle^2 \right)$$

که با محاسبه $\langle E^2(K) \rangle$ به سادگی می توان مقدار C را محاسبه کرد:

$$C = \frac{1}{MK_B T^2 m^2} \sum_{k=1}^M \left[\frac{J^2}{4m} \left[1 - \text{Tanh} \left(\frac{\beta J}{2m} \right) \right] N_2(k) + \frac{J^2}{4m} \left[1 - \text{Coth} \left(\frac{\beta J}{2m} \right) \right] N_3(k) \right]$$

۵- الگوریتم

اندازه گیریها و محاسباتی که در بخش های قبل شرح داده شد، از طریق الگوریتم زیر، شبیه سازی کامپیوتری انجام می پذیرد:

مرحله ۱- یک ردیف از ذرات را بطور تصادفی ایجاد می کنیم. مرحله ۲- آرایش ردیف اول را برای هر گام زمانی تکرار می نمائیم و شرایط مرزی دوره ای را اعمال می کنیم.

مرحله ۳- تک تک مربع های بدون سایه را در نظر می گیریم (مطابق شکل ۲)، احتمال $P = \frac{R}{1+R}$ را برای هر حالت مورد نظر محاسبه و عدد تصادفی r را بین صفر و یک ایجاد می کنیم. اگر $r < P$ باشد، تغییر مربوطه مورد قبول واقع می شود و در غیر اینصورت مردود می گردد.

مرحله ۴- پس از به تعادل رسیدن سیستم می بایست به ذخیره سازی اطلاعات به منظور محاسبه میانگین های مورد نظر پردازیم.

مرحله ۵- سیستم را M بار جاروب می کنیم (M پیکربندی جدید ایجاد می کنیم).

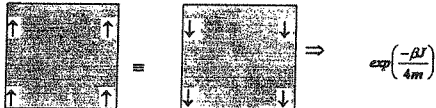
۶- نتایج عددی

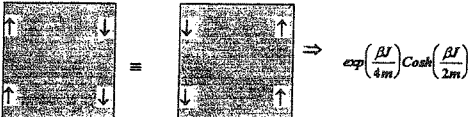
برای مدل هایزنبرگ با هامیلتونی (۱) و اسپین $\frac{1}{2}$ با استفاده از روش مونت کارلو محاسبات انرژی داخلی و ظرفیت گرمایی انجام گردیده و نتایج حاصله با نتایج مرجع [12] مقایسه گردیده اند. در اینجا شباهت و انطباق مناسبی بین جوابها وجود دارد. همچنین تعدادی از جوابها به صورت نمودار ارائه گردیده اند.

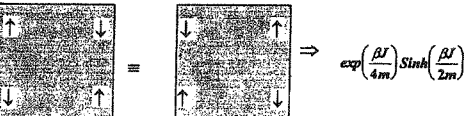
در جدول زیر ثابت های پلانک و بولتزمن برابر یک فرض

$$\frac{\langle i_1(k) | \text{He}^{-\Delta\tau H_{j,j+1}} | i_2(k) \rangle}{\langle i_1(k) | e^{-\Delta\tau H_{j,j+1}} | i_2(k) \rangle}$$

بپردازیم که منجر به محاسبه مقادیر زیر می شوند:

(a) 

(b) 

(c) 

شکل (۳) نمایش وزن های بولتزمن غیر صفر.

$$E(+, +; +, +) = E(-, -; -, -) = \frac{J}{4}$$

$$E(+, -; +, -) = E(-, +; -, +) = -\frac{J}{2} \left[\text{Tanh} \left(\frac{\beta J}{2m} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$E(-, +; +, -) = E(+, -; -, +) = -\frac{J}{2} \left[\text{Coth} \left(\frac{\beta J}{2m} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

برای ساده تر شدن محاسبه انرژی و ظرفیت گرمایی، تابع پارش را بصورت زیر نمایش می دهیم:

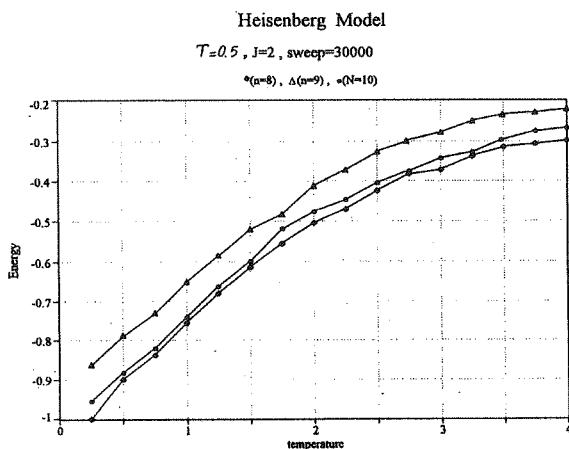
$$Z = \sum_K W(k) = \sum_K B_1^{N_1(k)} B_2^{N_2(k)} B_3^{N_3(k)} \quad (34)$$

که در آن $N_1(k)$ ، $N_2(k)$ و $N_3(k)$ به ترتیب تعداد مربع های بر هم کنشی نوع a ، b ، c در شکل (۲) برای پیکربندی k ام را نشان می دهند. B_3 و B_2 ، B_1 نیز ضرایب بولتزمن می باشند. همچنین با توجه به نماد گذاری فوق انرژی برابر است با:

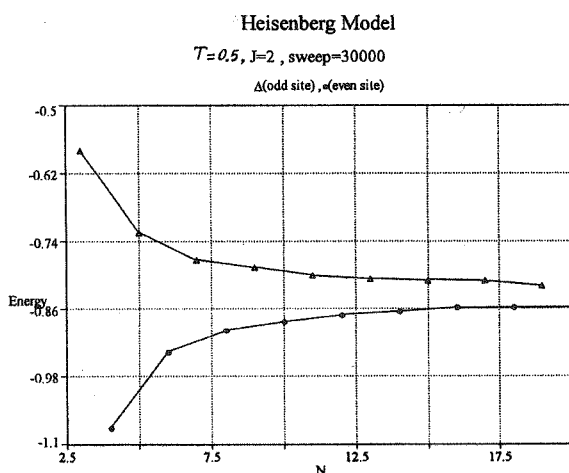
$$\langle H \rangle = \frac{-\partial Z / \partial \beta}{Z} = \frac{-\sum_K \partial W(k) / \partial \beta}{\sum_K W(k)}$$

از آنجائیکه در فرمول فوق، می بایست اثر ایجاد هر پیکربندی k ام را با احتمال $p(k)$ ملحوظ کنیم بنابراین خواهیم داشت:

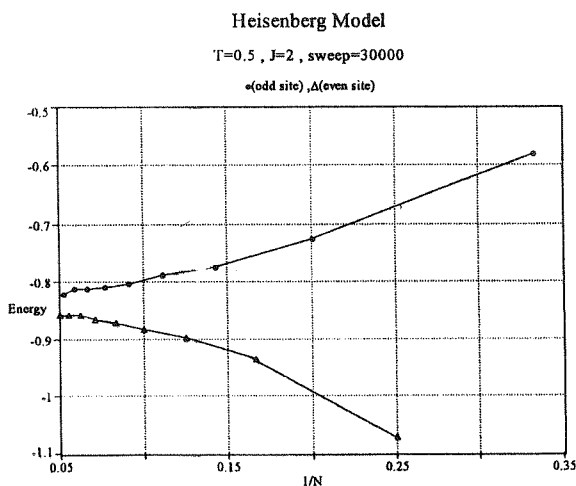
- مطالعه اثرات ناهمگنی در دستگاههای کوانتومی -
 - تعمیم این روش به مدل‌های نسبیتی



شکل (۴) نمودار تغییرات انرژی داخلی بر حسب T.



شکل (۵) نمودار تغییرات انرژی داخلی بر حسب N.



شکل (۶) نمودار تغییرات انرژی داخلی بر حسب 1/N.

شده اند. N تعداد جایگاه شبکه، N/2 تعداد فرمیونها و m نیز نمایانگر عدد تروتر است. همچنین، اندیس exact به حل دقیق کمیت مورد نظر مربوط می شود که در مرجع [12] ارائه گردیدند. اندیس های M.C (10000) و M.C (30000) به ترتیب برای 10000 و 30000 اندازه گیری مربوط می شوند که با استفاده از روش مونت کارلو بدست آمده اند. نتایج بدست آمده نسبت به نتایج دقیق کمتر از ۳٪ انحراف دارند.

۷- نتیجه گیری

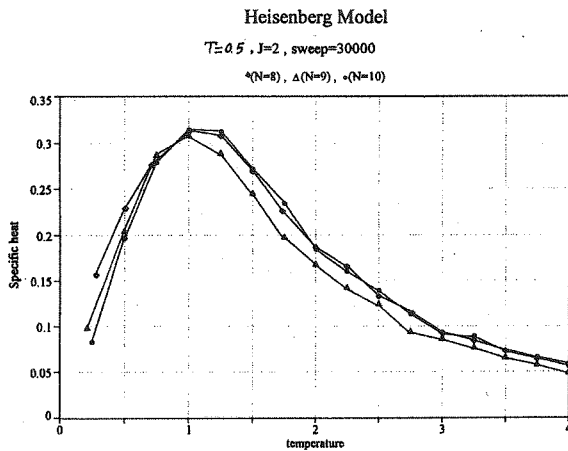
روش معرفی شده در این مقاله، امکان مطالعه اغلب دستگاههای برهم کنشی (فرمیونی، بوزونی و اسپینی) در شبکه یک بعدی را فراهم می سازد. این روش امکان مطالعه دستگاههای بزرگ را دارد. برای نمونه، در مدل هایزنبرگ یک بعدی، قطری کردن هامیلتونی برای دستگاههای بزرگتر از ۸ جایگاه بسیار مشکل است، اما با استفاده از این روش، بسادگی می توان محاسبات را برای دستگاههای تا ۱۰۰ جایگاه در هر یک از مدل های برهم کنشی انجام داد. برای بعضی از دستگاههای کوانتومی، ممکن است حل های دقیقی برای تابع موج و انرژی حالت زمینه یافت شود، اما با استفاده از این تکنیک می توانیم خواص ترمودینامیکی را در دماهای کمی بالاتر از حالت زمینه، بسادگی تعیین کرد. این روش را می توان به ابعاد بالاتر تعمیم داد. برای مثال، در دو بعد، می توان هامیلتونی را بصورت $H = H_{ox} + H_{oy} + H_{ex} + H_{ey}$ تجزیه کرد، که در آن H_{ox} و H_{oy} شامل باندهای فرد و H_{ex} و H_{ey} شامل باندهای زوج در امتداد محورهای x و y هستند.

همه عناصر ماتریسی را می توان براحتی محاسبه کرد، بجز اینکه حاصلضرب همه عناصر ماتریسی برای ترکیبات فرمیونی، منفی می شوند. برای رفع این مشکل، مقدار چشمداشتی عملگر O را می توان بصورت زیر نوشت:

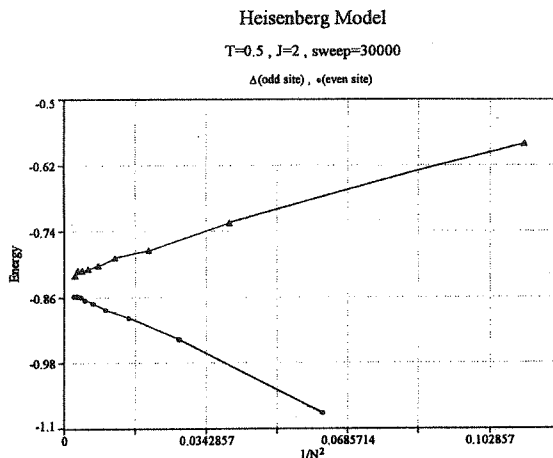
$$\langle O \rangle = \frac{\text{tr}(O \text{ sign}B |B\rangle)}{\text{tr}(\text{sign}B |B\rangle)} \equiv \frac{\langle O \text{ sign}B \rangle_{|B\rangle}}{\langle \text{sign}B \rangle_{|B\rangle}} \quad (2)$$

که در آن B به عناصر ماتریسی تقسیم شده بوسیله تابع پارش مربوط می شود (وزن بولتزن) و $|B\rangle$ قدر مطلق وزن بولتزن است که در صورت و مخرج معادله (۲) ظاهر می شود.

بهمین ترتیب می توان این تکنیک را به سه بعد تعمیم داد. از این روش، همچنین می توان برای مطالعه موارد زیر استفاده کرد.
 - مطالعه دستگاههای برهم کنشی فرمیون - بوزون
 - بررسی اثر میدان مغناطیسی در دستگاههای کوانتومی



شکل (۸) نمودار تغییرات ظرفیت گرمایی بر حسب T.



شکل (۷) نمودار تغییرات انرژی داخلی بر حسب $1/N^2$.

زیر نویس ها

- 1- Time slice
- 2- Siles
- 3- World line
- 4- Updating
- 5- flip trial

جدول (۱) انرژی داخلی و گرمای ویژه بر واحد جایگاه ($\tau=0.5, J=2, \Delta\tau=0.1$)

N	E_{exact}	$E_{M.C(10000)}$	$E_{M.C(30000)}$	$C_{M.C(10000)}$	$C_{M.C(30000)}$
3	-0.500	-0.581	-0.582	0.635	0.642
4	-1.000	-1.073	-1.072	0.691	0.713
5	-0.747	-0.728	-0.726	0.472	0.464
6	-0.934	-0.937	-0.938	0.330	0.310
7	-0.815	-0.770	-0.775	0.372	0.344
8	-0.912	-0.899	-0.899	0.234	0.247
9	-0.843	-0.793	-0.789	0.307	0.299
10	-0.903	-0.881	-0.884	0.233	0.218
11	-0.857	-0.800	-0.803	0.267	0.265
12	-0.897	-0.873	-0.873	0.204	0.213

مراجع

- [1] Masuo Suzuki; prog. theor. phys. 56, 1454 (1976)
 [2] Masuo Suzuki; Commun. Math. phys. vol 51, 183 (1976)
 [3] Masuo Suzuki; phys. Rev. B31, 2957 (1985)
 [4] Masuo Suzuki, seiji miyashita, akira Kuroda; prog theor. phys. 58, 1377 (1977)
 [5] Masuo Suzuki; J. Math. phys. 26, 601 (1985)
 [6] Masuo Suzuki; phys. Lett. A 146, 319 (1990)
 [7] Masuo Suzuki; phys. Lett. A113, 299 (1985)
 [8] Malvin H. Kalos; Monte Carlo Methods in Quantum problems, D. Reidel publishing Company (1982)
 [9] J. E. Hrisch, R. L. Sugar, D. J. Scalapiono, R. Blankenbecler; phys. Rev. B26, 5033 (1982)
 [10] Masuo Suzuki; Quantum Monte Carlo Methods in Codensed Matter physics, World scientific (1993)
 [11] Miloje S. Makivic & Hong - Qiang Ding; phys. Rev. B43, 3562 (1991)
 [12] Jill C. Bonner & Michael E. Fisher; phys. Rev., vol A 135- 3, 640 (1964)