

# تحلیل عددی جریان تراکم پذیر دایم و غیر دایم در کسکید پره ها و تأثیر لزجت بر جریان

ابراهیم شیرانی  
استاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

سعادت زیرک  
استادیار

دانشکده مهندسی، دانشگاه ابوعلی سینا

## چکیده

جریان تراکم پذیر در حالت های دایم و غیر دایم، لزج و غیر لزج در کسکید پره ها تحلیل شده است. نحوه شکل گیری و حرکت موج ضربه ای در بین پره ها در یک جریان غیر دایم و همچنین برخورد موج ضربه ای با لایه مرزی و تأثیر آن بر جریان بین پره ها از اهمیت خاصی برخوردار است که در این مقاله به آنها پرداخته می شود. در حل عددی مسئله از روش حجم کنترل جیمسون برای انتگرال گیری بر حسب مکان و روش رانگا کوتای مرتبه چهارم برای انتگرال گیری نسبت به زمان استفاده شده است. سپس جریان لزج و غیر لزج در کسکید VKI بررسی و اثر لزجت، زاویه حمله، فاصله پره ها و فشار پشت، بر جریان تحلیل شده است. نتایج نشان می دهد در حالت ایده آل، توزیع فشار روی پره ها حدود ده درصد خطا دارد. بالاخره جریان غیر دایم شبیه سازی و نحوه شکل گیری و حرکت موج ضربه ای در کسکید پره ها در شروع جریان بررسی شده است.

## *Numerical Analysis of Compressible Steady/Unsteady, and Inviscid/Viscous Flows in Cascads and Effects of Viscosity on the Flows*

E. Shirani  
Professor

Isfahan University of Technology,

S. Zirak  
Assistant Professor  
Boali-Sina University Hamadan

## Abstract

*Compressible flows for unsteady, inviscid and viscous cases have been studied. Important features of flows such as formation of shock waves across the flow in an unsteady flow as well as interaction of shock waves with boundary layers and their effects on the flow around the blades have been analyzed.*

*Jameson control volume approach was used to specially integrate the flow equations and the fourth order Runge-Kutta method was used for time integration. The obtained finite difference equations were used to simulate inviscid and viscous flows in VKI cascades and the effects of viscosity, angle of attack, blade pitches and back pressure on the flow were obtained. It was shown that when the flow was assumed inviscid, the error on the distribution of pressure on the blades were about ten percent. Finally, unsteady flow were simulated and formation of shock waves and their motions were analyzed.*

## Key Words

*Cascades, Jameson method, Viscous flow, Unsteady flow, Compressible flow, Transonic flow, Shock waves, VKI cascades.*

کسکید پره‌ها، روش جیمسون، جریان لزج، غیردایم، تراکم پذیر، گذر صوتی، موج ضربه‌ای، کسکید VKI.

مقدمه

تحلیل جریان در توربو ماشین‌ها به دلیل پیچیدگی جریان و اهمیت آن مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. در دهه ۱۹۵۰ جریان پتانسیل دو بعدی و تراکم پذیر در کسکید پره‌ها به روش توزیع سینگولاریتی و روش پانل حل شد. در این سالها بررسی اثر جریان ثانویه و جریان سه بعدی تراکم ناپذیر چرخشی نیز مدنظر قرار گرفت. در دهه ۱۹۶۰ روش‌های انحنای خط جریان و تابع جریان برای تحلیل جریان دو بعدی غیر لزج و مادون صوت به کار گرفته شد. در همین دهه و سال‌های پس از آن جریان‌های لزج نیز تحلیل و بررسی شد. اهم کارهای انجام گرفته در ارتباط با موضوع این مقاله در زیر به اختصار ارائه می‌شود.

مکدونالد و همکارانش [۱] و دنتون [۲] با استفاده از روش لاکس و ندرروف جریان غیرلزج تراکم پذیر در کسکید پره‌ها را تحلیل نمودند. کرافورد و کیز [۳] جریان دو بعدی در کسکید پره‌ها را با استفاده از حل معادلات لایه مرزی تحلیل نمودند. همچنین لاکشمیناریانا و گویدان [۴] معادلات لایه مرزی متلاطم در کسکید پره‌ها را حل کردند. استگر و دیگران [۵] جریان در کسکید پره‌ها را با استفاده از روش فاکتورگیری در دو حالت لزج و غیر لزج حل کردند. همچنین شامروث و دیگران [۶] از همین روش معادلات ناویر استوکز را در حالت گذر صوتی در کسکید پره‌ها تحلیل کرد. نایت و جوی [۸] نیز با استفاده از روش فاکتورگیری معادلات جریان در کسکید پره‌ها را حل کردند. اون [۷] جریان گذر صوتی در کسکید پره‌ها را در حالت دایم از طریق حل معادلات ناویر استوکز تحلیل کرد. لیو و همکارانش [۹] جریان متلاطم در کسکید پره‌ها را با استفاده از روش جیمسون حل کردند. بارنت و همکارانش [۱۰] با استفاده از روش لکس - وندروف جریان گذر صوتی را در کسکید کمپرسورها شبیه سازی نمودند.

در کار حاضر حل جریان دایم، غیردایم، لزج، غیرلزج و گذر صوتی در کسکید پره‌ها از روش جیمسون بررسی شده است. جیمسون و همکارانش [۱۱] این مسئله را از طریق حل معادلات اولیر و اضافه

کردن جریان عمود بر دیواره‌ها به درون جریان اصلی به طوری که اثرات جریان لزج شبیه سازی شود، حل کردند. در این مقاله عبارت لزج معادلات ناویر استوکز به طور مستقیم به کار گرفته شده است و معادلات دو بعدی ناویر استوکز حل شده‌اند. همچنین در این مقاله حل غیردایم جریان نیز مدنظر بوده است تا شکل گیری موج ضربه‌ای و نحوه حرکت آن و تأثیر آن بر لایه مرزی در شروع حرکت سیال بررسی شوند.

۱- معادلات حاکم

از آنجا که در کسکید پره‌ها جریان برگشتی وجود ندارد و یا اگر نواحی جدایش به وجود آید، این نواحی بسیار کوچک هستند، معادلات جریان را با تقریب لایه نازک نوشته و حل می‌کنیم. البته معادلات بدون این تقریب هم در چند حالت حل شده و نتایج یکسانی را نشان داده‌اند. شکل کلی معادلات حاکم به صورت بقایی و در حالت دو بعدی به شرح زیر است:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G_v}{\partial y} \quad (1)$$

که در آن

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{bmatrix}$$

$$G_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \mu v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\rho$  چگالی،  $u, v$  مؤلفه‌های سرعت،  $E$  انرژی کل و  $H$  آنتالپی کل سیال است.

$$P = \rho RT$$

$$DW_{ij} = D_x W_{ij} + D_y W_{ij} \quad (5)$$

را اضافه می کنیم که در آن

$$D_x = d_{i+\frac{1}{2}j} - d_{i-\frac{1}{2}j}$$

$$D_y = d_{ij+\frac{1}{2}} - d_{ij-\frac{1}{2}}$$

$$d_{i+\frac{1}{2}j} W_{ij} = \frac{\delta \Omega_{i+\frac{1}{2}j}}{\Delta t_{ij}} \left[ \varepsilon_{i+\frac{1}{2}j}^{(2)} (U_{i+1j} - U_{ij}) - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}j}^{(4)} \right]$$

$$(U_{i+2j} - 3U_{i+1j} - 3U_{ij} - U_{i-1j}) \left] \delta \Omega_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2} (\delta \Omega_{ij} + \delta \Omega_{i+1j})\right.$$

به همین ترتیب سایر عبارات در معادله (5) محاسبه می شوند. ضرایب  $\varepsilon^{(2)}$  و  $\varepsilon^{(4)}$  بستگی به گرادینان فشار داشته و از رابطه های زیر محاسبه می شوند.

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}j}^{(2)} = k^{(2)} \text{Max} (v_{ij}, v_{i+1j})$$

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}j}^{(4)} = \text{Max} (0, k^{(4)} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}j}^{(2)})$$

$$v_{ij} = \frac{|P_{i+1j} - 2P_{ij} + P_{i-1j}|}{|P_{i+1j}| - 2|P_{ij}| + |P_{i-1j}|}$$

$k^{(2)}$  و  $k^{(4)}$  اعداد ثابتی بوده و به ترتیب برابر  $1/4$  و  $1/64$  انتخاب شده اند. مشتق زمانی در معادلات حاصل با استفاده از روش رانگاکوتای مرتبه چهار تقریب زده می شود و معادلات به صورت یک دستگاه معادله جبری در می آیند که با رعایت شرط پایداری و انتخاب قدمهای زمانی مناسب، آنها را حل کنیم.

باتوجه به اینکه جریان در ورود و خروج از ناحیه حل را مادون صوت در نظر گرفته ایم، شرایط مرزی را به شرح زیر انتخاب می کنیم. در ورودی فشار سکون، دمای سکون و زاویه ورودی سیال و در خروجی فشار استاتیک سیال به عنوان ورودی به مسئله داده می شوند.

## ۲- نتایج

براساس روش عددی مذکور در این مقاله، یک برنامه کامپیوتری نوشته و از طریق آن جریان در کسکید پره ها بررسی شده است. ابتدا جریان غیر لزج و لزج در کسکید VKI بررسی و مقایسه شده اند. سپس اثر تغییرات زاویه حمله و نیز فاصله پره ها از یکدیگر بر تغییرات فشار

$$E = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

$$H = E + \frac{P}{\rho}$$

و  $\gamma$  ضریب اتمیسیته است.

معادلات فوق براساس روش جیمسون به روش عددی حل می شود. برای این کار از معادله (1) نسبت به حجم ( $\Omega$ ) انتگرال می گیریم تا معادلات به شکل حجم کنترل تقریب زده شوند.

$$\iint \frac{\partial W}{\partial t} d\Omega + \iint \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) d\Omega = \iint \frac{\partial G_v}{\partial y} d\Omega \quad (2)$$

باتوجه به شکل (1) که شبکه بندی حل و حجم های کنترل را نشان می دهد و نیز قضیه گرین، رابطه بالا را برای یک حجم کنترل تقریب می زنیم.

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial t} \delta \Omega_{ij} + \sum_{k=1}^4 (F_k \Delta y_k - G_k \Delta x_k) = \left( \frac{\partial G_v}{\partial y} \right)_{ij} \delta \Omega_{ij} \quad (3)$$

$\Delta y_k$  و  $\Delta x_k$  مقادیر جبری اندازه مؤلفه های وجه  $k$  ام حجم کنترل هستند و  $\delta \Omega_{ij}$  سطح حجم کنترل است که گره  $ij$  در مرکز آن قرار دارد و مقدار آن برابر است با

$$\delta \Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta x_{AC} \Delta y_{BD} - \Delta x_{BD} \Delta y_{AC}) \quad (4)$$

که در آن  $\Delta$ ها مشابه رابطه زیر محاسبه می شوند.

$$\Delta x_{AC} = x_C - x_A$$

$F_k$  و  $G_k$  مقادیر متوسط  $F$  و  $G$  روی وجه  $k$  ام حجم کنترل هستند. عبارت جابجایی در معادله (3) را از روش اختلاف محدود مرتبه دو تقریب می زنیم. به عنوان مثال

$$F_{AD} = F \left( \frac{1}{2} (W_{i-1j} + W_{ij}) \right)$$

عبارات لزجت نیز با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی مرتبه دو تقریب زده می شوند.

از آنجا که عبارات جابجایی با روش اختلاف مرکزی مرتبه دو تقریب زده شده اند. برای جلوگیری از نوسانات از جملات استهلاک با دقت مرتبه دو و چهار در دو جهت استفاده می کنیم. به عبارت دیگر به طرف راست معادله (3) عبارت

وارد بر کسکید پره‌ها و همچنین اثر فشار پشت ( $\frac{Pe}{p_0}$ ) بر روی جریان در کسکید پره‌ها بررسی شده است. بالاخره جریان غیردایم در یک کسکید کمّانی شبیه‌سازی و تحلیل شده است.

## جریان در کسکید VKI

شکل هندسی کسکید VKI و شبکه محاسباتی طراحی شده که از نوع H است، در شکل (۲) نمایش داده شده است. شرایط ورودی و خروجی جریان نیز در شکل نشان داده شده است. در شکل (۳) توزیع فشار در دو طرف پره‌ها و کانتور عدد ماخ در حالتی که جریان ایده‌آل در نظر گرفته شده، رسم شده است. همچنین شکل (۴) نتایج مربوط به همین مسئله را در حالت لزج نشان می‌دهد. همان طوری که دیده می‌شود، در حالت جریان ایده‌آل، فشار در ناحیه پشت پره‌ها خطای نسبتاً زیادی دارد، در حالی که با منظور کردن لزجت سیال، خطا بسیار ناچیز است. علت اختلاف این است که در ناحیه پشت پره به خاطر افزایش نسبتاً زیاد فشار، ارتفاع لایه مرزی افزایش می‌یابد و لذا خطوط جریان نسبت به حالت ایده‌آل تغییر شکل بیشتری می‌دهند و توزیع فشار تغییر می‌کند. این نتیجه نشان می‌دهد که علی‌رغم اینکه عموماً توصیه می‌شود برای تعیین توزیع فشار و نیروی لیفت، حل جریان ایده‌آل کافی است ولی در این مورد خاص، فشار سیال در حالت ایده‌آل بیش از ده درصد خطا دارد. در شکل (۵) اثر فاصله بین پره‌ها بر توزیع فشار در دو طرف پره‌ها، در حالت  $\frac{Pe}{p_0} = 0.7$  و  $\alpha = 5^\circ$ ، نشان داده شده است. با افزایش فاصله پره‌ها به میزان ۲۵ درصد، فشار در طرف پشت پره‌ها تا ۲۰ درصد افزایش نشان می‌دهد. شکل (۶) اثر تغییرات زاویه حمله را بر توزیع فشار در دو طرف پره‌ها در حالت  $\frac{Pe}{p_0} = 0.7$  نشان می‌دهد. همان طوری که دیده می‌شود با افزایش زاویه حمله، فشار در ناحیه جلو پره‌ها تغییر می‌کند، به طوری که نیروی لیفت افزایش می‌یابد، ولی فشار ناحیه انتهایی پره‌ها ثابت می‌ماند.

## جریان در کسکید کمّانی

کسکید کمّانی با ضخامت ۱۰ درصد در شکل (۷) نمایش داده شده است. شکل پره‌ها در این کسکید، کمّانی از دایره است. برای  $\frac{Pe}{p_0} = 0.84$ ، عدد ماخ ورودی  $M_1 = 0.5$  و عدد رینولدز بر مبنای طول وتر پره‌ها  $Re = 8100$ ، نتایج در شکل (۸) نمایش داده شده است. این نتایج با نتایج حل عددی اون [۸] مقایسه شده و

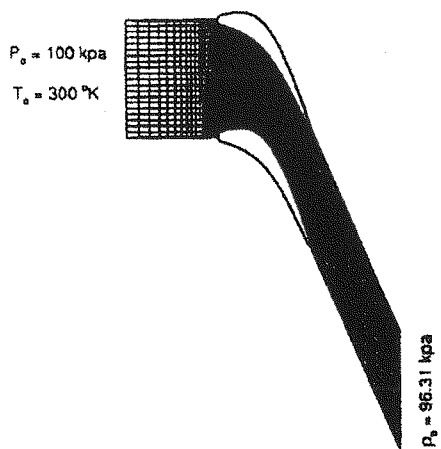
کاملاً مطابقت دارد. در شکل‌های (۹) و (۱۰) کانتوری‌های عدد ماخ و محل ایجاد امواج ضربه‌ای در کسکید کمّانی با ضخامت ۲۰ درصد و نسبت فشارهای مختلف به ترتیب در دو حالت جریان غیرلزج و لزج نشان داده شده است. در این شکل‌ها نسبت فشار خروجی به فشار سکون ورودی از  $0.6/0$  تا  $0.8/0$  تغییر یافته است.

علت اختلاف بین جواب‌های حالت لزج و غیر لزج در این است که در حالت لزج، به خاطر وجود اصطکاک و افت فشار ناشی از آن، سرعت جریان کمتر بوده و موج ضربه‌ای ضعیف‌تری تشکیل می‌شود. از طرفی به علت وجود لایه مرزی و دنباله جریان در پشت کسکید پره‌ها، شکل خطوط جریان متفاوت شده و موج ضربه‌ای در خارج از کسکید نیز ایجاد می‌شود. مقایسه دو شکل (۹) و (۱۰) نیز بر این مسئله تأکید می‌کند که جریان لزج و غیر لزج در کسکید پره‌ها در حالتی که جریان گذر صوتی باشد، می‌تواند تفاوت زیادی داشته باشد و فرض ایده‌آل بودن جریان حتی برای محاسبه نیروی لیفت چندان مناسب نیست.

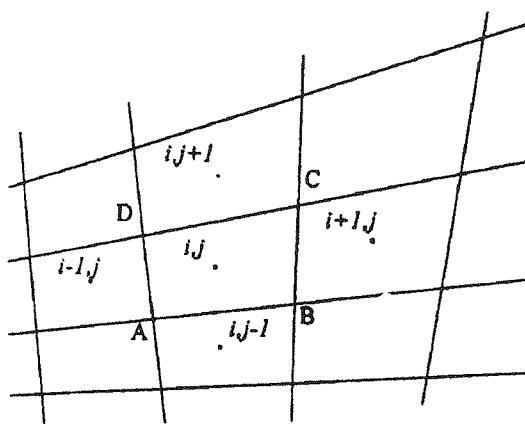
بالاخره شکل (۱۱) جریان غیر دایم و غیر لزج در داخل کسکید کمّانی با مشخصات ضخامت ۲۰ درصد،  $\frac{Pe}{p_0} = 0.75$  را نشان می‌دهد. در این حالت جریان از حالت سکون شروع شده و در نهایت به حالت دایم می‌رسد. در طول این فاصله زمانی، رفتار جریان در کسکید کمّانی نمایش داده شده است. نحوه شکل‌گیری موج ضربه‌ای و حرکت آن از گلوگاه به سمت خروجی کسکید در این شکل‌ها دیده می‌شود.

## نتیجه‌گیری

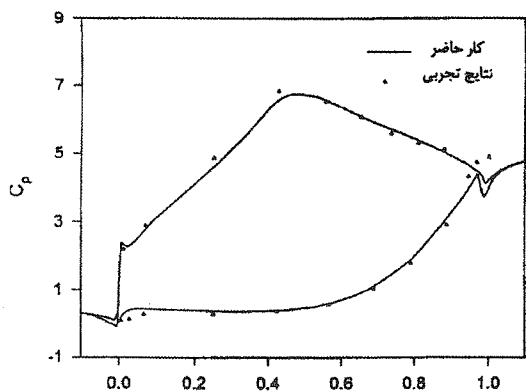
تحلیل جریان در کسکید پره‌ها نشان می‌دهد که روش جیمسون برای تحلیل جریان گذر صوتی لزج و غیر دایم می‌تواند به کار گرفته شود و نتایج مناسبی را ارائه دهد. نتایج نشان می‌دهد که به علت اندرکنش بین امواج ضربه‌ای و لایه‌های مرزی، خطای قابل ملاحظه‌ای بین نتایج حالت لزج و غیر لزج ایجاد می‌شود و نتایج حالت غیر لزج را نمی‌توان ملاک طراحی قرار داد. خصوصیات جریان نسبت به تغییر فاصله بین پره‌ها و نیز فشار خروجی حساس بوده و با افزایش فاصله پره‌ها، فشار پشت پره‌ها تغییر قابل توجهی دارد. همچنین با تغییر فشار پشت پره‌ها، محل موج ضربه‌ای و در نتیجه رفتار جریان تغییر می‌کند. حل غیردایم نشان می‌دهد که موج ضربه‌ای ابتدا در گلوگاه تشکیل می‌شود و با افزایش سرعت سیال به سمت دهانه خروجی کسکید حرکت می‌کند.



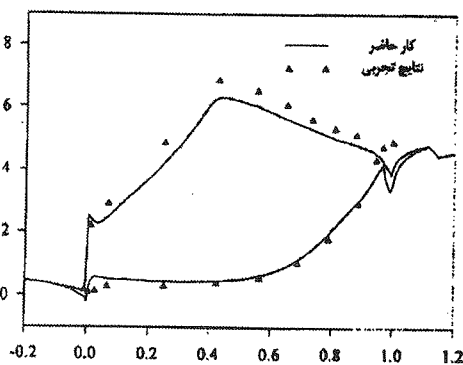
شکل (۲) شبکه محاسباتی بر روی کسکید VKI.



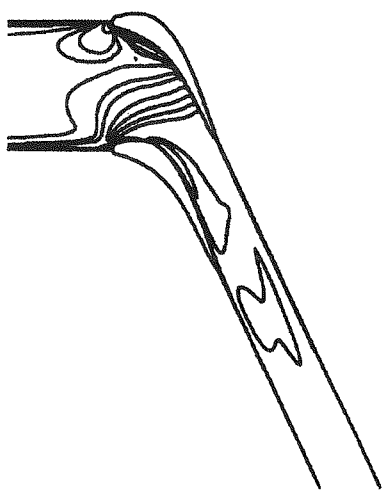
شکل (۱) شبکه حل عددی.



الف

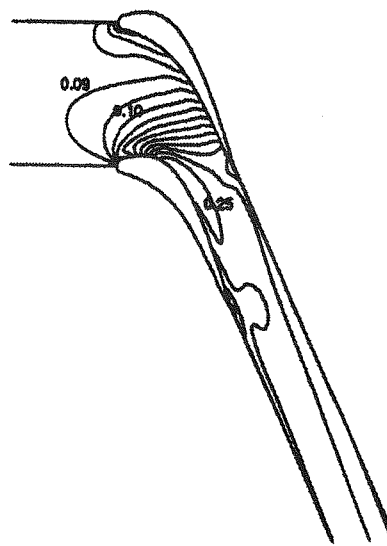


الف



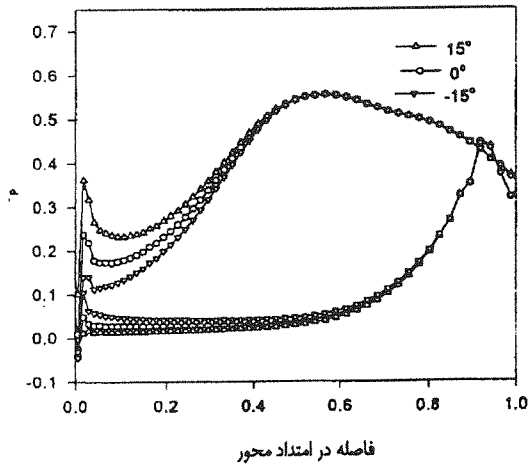
ب

شکل (۴) توزیع فشار در دو طرف پره ها و خطوط هم تراز عدد ماخ جریان لزوج در کسکید VKI.

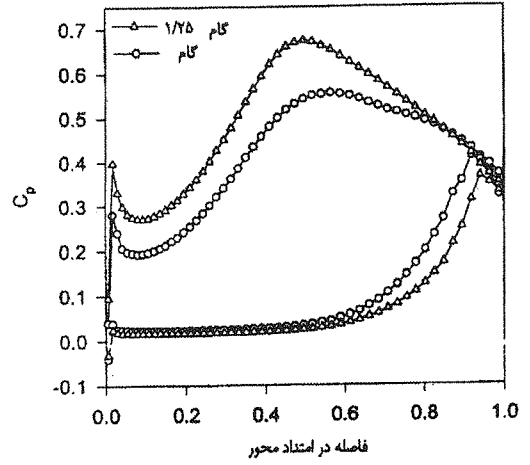


ب

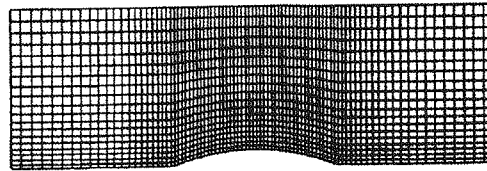
شکل (۳) توزیع فشار در دو طرف پره ها و خطوط هم تراز عدد ماخ جریان ایده آل در کسکید VKI.



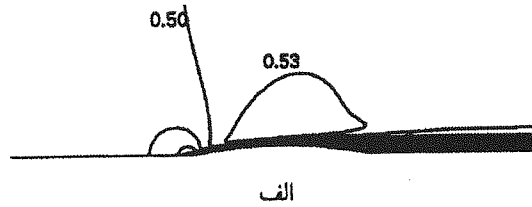
شکل (۶) اثر زاویه حمله بر توزیع فشار دو طرف پره‌ها در کسکید VKI.



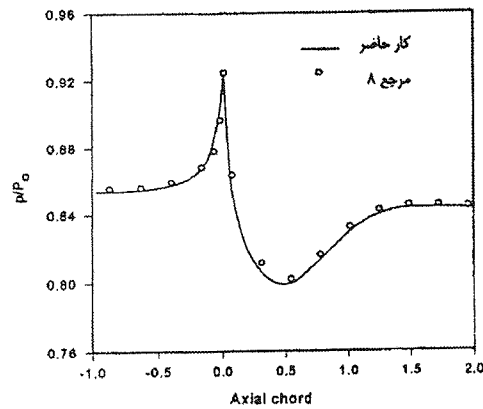
شکل (۵) اثر فاصله بین پره‌ها بر توزیع فشار در کسکید VKI.



شکل (۷) شبکه محاسباتی بر روی کسکید کمانی به ضخامت ۲۰ درصد.

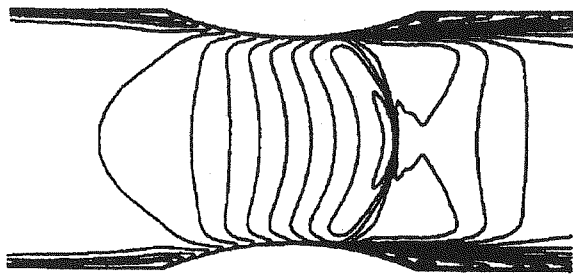


الف

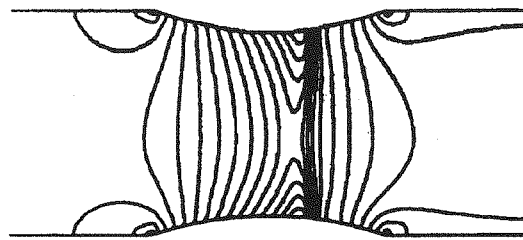


ب

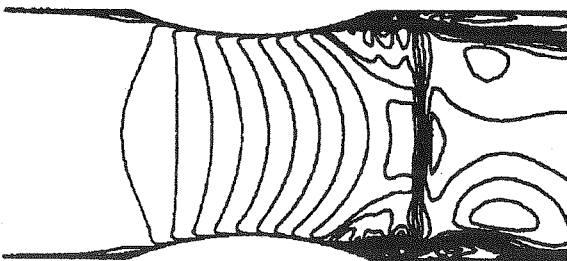
شکل (۸) خطوط هم‌تراز عدد ماخ و توزیع فشار در کسکید کمانی.



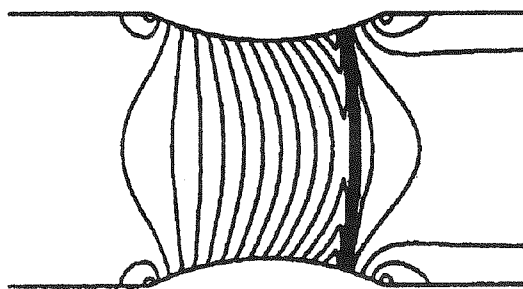
$$p_b/P_o = 0.70$$



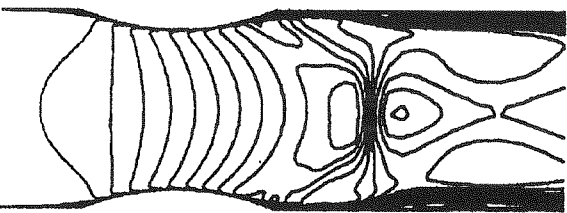
$$p_b/P_o = 0.80$$



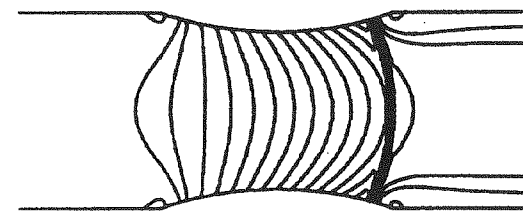
$$p_b/P_o = 0.65$$



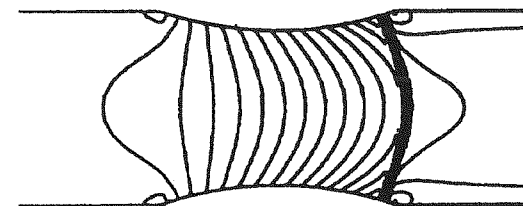
$$p_b/P_o = 0.75$$



$$p_b/P_o = 0.60$$



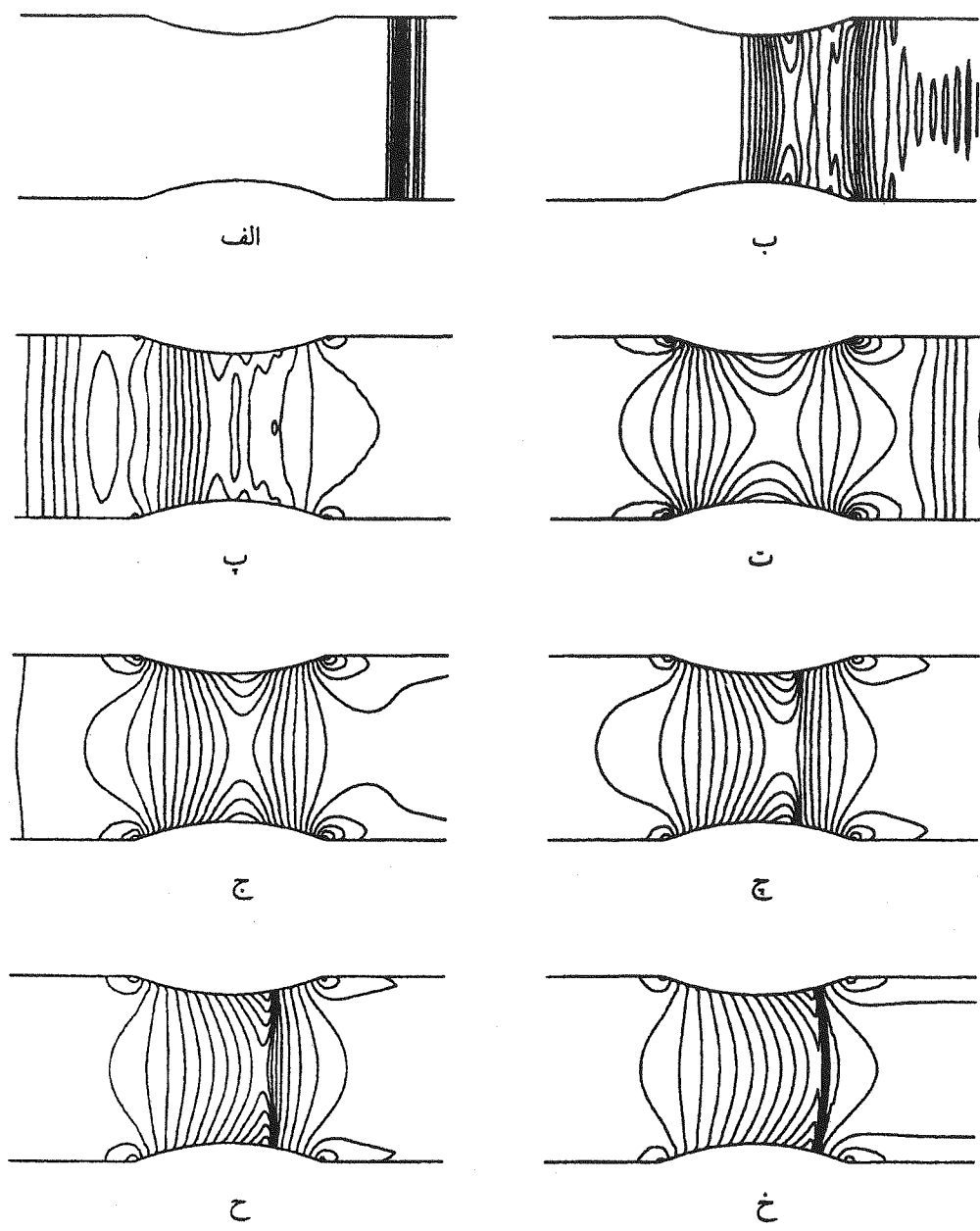
$$p_b/P_o = 0.70$$



$$p_b/P_o = 0.65$$

شکل (۱۰) خطوط هم‌تراز عدد ماخ جریان لزوج در کسکید  
کمانی با نسبت فشارهای مختلف.

شکل (۹) خطوط هم‌تراز عدد ماخ جریان غیر لزوج در  
کسکید کمانی با نسبت فشارهای مختلف.



شکل (۱۱) خطوط هم‌تراز عدد ماخ جریان غیردایم در کسکید کمائی در زمان های مختلف.

### مراجع

[1] McDonald, P.W., et.al., "The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascade", ASME paper 71-GT-89, 1971.

[2] Denton, G.D., "A Time Marching Method for Two and Three-Dimensional Blade-to-Blade Flows", Aeronautical Research Council, R & M 3775, 1975.

[3] Crawford, M.E., and Kays, W.M., "A Program for Numerical Computation of Two-Dimension", NACA CR2742, 1976.

[4] Lakshminarayana, B., and Govindan, T.R., "Analysis of Turbulent Boundary Layer on Cascade", AIAA J., V.19, 1981.

[5] Stager, J.L., Pulliam, T.H., and Chima, R.V., "An Implicit Finite Difference Code for Inviscid



- and Viscous Cascade Flow", AIAA paper, 80-1427, 1980.
- [6] Shamroth, S.J., McDonald, H., Briley, W.R. "Application of Navier-Stokes Analysis of Transonic Cascade Flow Fields", ASME J. of Eng. for Power, 1982.
- [7] Kwon, O.K., "Navier-Stokes Solution for Steady Two-Dimensional Transonic Cascade Flows", J. of Turbomachinery, V. 110, 1988.
- [8] Knight, C.J., and Choi, D., "Development of a Viscous Cascade Code Based on Scalar Implicit Factorization", AIAA J., V. 27, No. 5, 1989.
- [9] Li, J. S. , Sockol, P.N., and Prah1, J. M., "Navier-Stokes Cascade with a Stiff k-e Turbulence Solver", AIAA paper, 88-0594, 1989.
- [10] Barnett, M., Kobbs, D.E., and Edwards, D.E., "Inviscid-Viscous Interaction Analysis of Compressor Cascade Performance", , ASME GT-90-15, 1990.
- [11] Jameson, A., Rizzi, A., Schmidt, W., and Whitfield, D., "Finite Volume Solution for the Euler Equation for Transonic Flow Over Airfoil and Wings Including Viscous Effects", AIAA paper 81-1265, 1981.