حل دو نوع مسأله معکوس هدایت حرارت
با استفاده از روش اجزاء مرزی

محمّد رحیم همتیان
استادیار
بخش مهندسی هسته‌ای، دانشگاه شیراز

قدرت ا... کرمی
استاد
بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

چکیده

در این مقاله روشی برای آنالیز اجزاء مرزی مسأله معکوس هدایت حرارت غیرخطی شامل منابع تولید حرارت نقطه‌ای و خطی ارائه می‌شود. اثر منابع تولید حرارت نقطه‌ای و خطی به طور دقیق و بدون احتیاج به انتگرال گیری در دامنه اعمال می‌شود. در رابطه با منابع تولید حرارت دو نوع مسأله معکوس تعریف می‌شود. در مسأله معکوس نوع اول، هدف بدست آوردن شدت منابع تولید حرارت برای دستیابی به شرایط مورد نظر در نقاط مختلف دامنه یا مرز است و در مسأله معکوس نوع دوم مجهول مسأله محل و وضعیت قرار گرفتن منبع تولید حرارت است. مسأله معکوس نوع اول ناسالم (Ill-posed) و مسأله معکوس نوع دوم یک مسأله بهینه سازی چند متغیره است. برای هموارسازی جواب های حاصل از مسأله معکوس نوع اول از روش حداقل مربعات (Least squares) با افزودن جمله هموارساز استفاده گردیده است و برای حل مسأله بهینه سازی مربوط به مسأله معکوس نوع دوم یک روش با مرتبه مشتق گیری صفر پیشنهاد شده است. هنگامی که ضریب هدایت حرارت به دما وابسته باشد در مسأله رفتار غیرخطی ظاهر می‌شود. در اینجا با استفاده از تبدیل کیرشهف (Kirchhoff) رفتار غیرخطی به مرز انتقال داده شده است تا احتیاجی به تقسیم‌بندی دامنه نباشد.

Solution to Two Types of Inverse Heat Conduction Problems by Boundary Elements Method

M. R. Hematiyan
Assistant Professor
Department of Nuclear Engineering,
Shiraz University

G. Karami
Professor
Department of Mechanical Engineering,
Shiraz University

Abstract

A method for the analysis of inverse nonlinear heat conduction having point or line distributed heat sources is presented. The contribution due to the loading vector coming from either point or line heat sources integrlas are evaluated analytically and in an exact manner. The inverse solution may be categorized into; finding either the solution of the problem in the form of the intensity of the loading at a specific location or finding the location and orientation of the generators assuming the intensity is known. The first category is an ill-posed type problem, whereas the solution to the second category type problems may be found by an optimization procedure. To regularize the solution to the first category type, least squares method is employed in conjunction with an addition of regularization term. To find the solution to the second categry a new algorithm to be called "A Good Neighbouring" is devised which make use of derivatives of order zero. For the problems with thermal conductivity temperature dependent a nonlinear behaviour is expected which would be dealt with Kirchhoff's transformation. The efficiency and accuracy of the methods are explored through several examples.

مقدمه

روش اجـزاء مـرزی (BEM) به عنوان یک الگوریتم محاسباتی نسبتاً دقیق کاربردهای فراوانی در حل مسائل مختلف پیدا کرده است. با استفاده از این روش مسأله هدایت حرارت و مسائل شبیه آن توسط محققینی در این زمینه [3-1] مدل سازی شده است. اما در مورد بکارگیری آن در حل مسأله معکوس انتقال حرارت فقط در سال های اخیر اقداماتی شروع شده است که در این مورد می توان به مراجع [9-5] اشاره نمود. بعضی از محققین [4, 5]، مسائل معکوس هدایت حرارت دائمی و تعدادی از آنها به حل مسائل معکوس هدایت حرارت گذرا [9-5] پرداخته اند. در اغلب این تحقیقات هدف از حل مسأله معکوس بدست آوردن شرایط مجهول در قسمت هایی از مرز بوده است [9-5]. مارتین (Martin) و دالیک رویچ(Dulikravich) [4] در حل مسأله معکوس علاوه بر شرایط مرزی، شدت منبع تولید حرارت گسترده در نقاط مختلف دامنه را نیز به عنوان مجهول مسأله در نظر گرفته اند. آنها برای اعمال اثر منبع تولید حرارت گسترده دامنه را تقسیم بندی کرده و انتگرال گیری مربوط به منابع تولید حرارت را روی دامنه انجام داده اند. سیلوانتو (Silva Neto) و ازیسیک (Ozisik) [10] به حل نوعی از مسأله معکوس هدایت حرارت یک بعدی پرداخته اند که در آن مکان و شدت یک منبع نقطه ای نسبت به زمان مجهول بوده است. آنها این مسأله معکوس را بدون استفاده از روش اجزاء مرزی و با بکارگیری روش گرادیان مزدوج (Conjugate gradient) و تعریف مسأله مکمل (Adjoint problem) حل کرده اند.

در این مقاله منابع تولید حرارت از نوع نقطه ای و خطی در نظر گرفته شده اند. در منبع نقطه ای، تولید حرارت در یک نقطه و در منبع خطی تولید حرارت روی یک پاره خط متمرکز است. منبع تولید حرارت خطی به صورتی در نظر گرفته می شود که دارای شدتی با توزیع خطی در طول منبع باشد. با استفاده از منبع خطی می توان تولید حرارت روی یک مسیر دلخواه با شدت دلخواه را نیز مدل سازی نمود. اثر منبع تولید حرارت خطی به صورت یک انتگرال یک بعدی ظاهر می شود که حاصل این انتگرال به صورت تحلیلی و دقیق بیان می گردد. بررسی منابع تولید حرارت نقطه ای و خطی دارای کاربردهای عملی است که برای نمونه می توان به طراحی حرارتی قطعات الکترونیکی اشاره نمود.

در رابطه با منابع نقطه ای و خطی دو نوع مسأله معکوس را می توان تعریف کرد. در نوع اول محل و وضعیت منبع مشخص است و باتوجه به معلومات اضافی که در نقاط داخلی دامنه یا روی مرز داده شده است باید شدت منبع را محاسبه نمود. در این حالت برای هر منبع نقطه ای یک مجهول و برای هر منبع خطی دو مجهول (شدت در ابتدا و انتها) در نظر گرفته می شود. در حل مسأله مستقیم هدایت حرارت در صورت وجود خطا در شرایط مرزی و اطلاعات ورودی تأثیر آن در دماهایی که در داخل دامنه بدست می آید نسبتاً کم می باشد [11]، به عبارت دیگر مسأله مستقیم هدایت حرارت یک مسأله سالم (Well-posed) می باشد، در صورتیکه مسائل معکوس نسبت به اطلاعات ورودی بسیار حساس هستند و اصطلاحاً ناسالم می باشند [12, 13]. حل مسأله معکوس به علت ناسالم بودن آن معمولاً به جواب های نوسانی منجر می شود و لازم است که در این مورد یک روش ویژه بکار گرفته شود. در این مورد می توان به روش حداقل مربعات با افزودن جمله هموار ساز [14]، روش تابع تشخیص (Function specification) [13, 15] و روش هموارسازی تکراری (Iterative regularization) [16] اشاره نمود. همچنین در این رابطه روش های بهینه سازی گرادیان مزدوج (Conjugate gradient) [10, 17] نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

در نوع دوم مسأله معکوس که در رابطه با منابع تولید حرارت تعریف می شود، شدت منبع مشخص است و باتوجه به معلومات اضافی که در نقاط داخلی دامنه یا روی مرز داده شده است، باید محل و وضعیت قرارگیری منبع را جستجو نمود. در مورد منبع نقطه ای باید مختصات آن و در مورد منبع خطی باید مختصات مرکز و جهت قرارگیری آن را بدست آورد. مسأله معکوس نوع دوم که از مسائل بهینه سازی است توسط یک روش ابتکاری تحت عنوان «یک همسایه خوب» حل می شود. روش یک همسایه خوب از لحاظ مشتق گیری در مرتبه صفر قرار دارد.

وقتیکه ضریب هدایت حرارت به دما بستگی دارد، مسأله هدایت حرارت به صورت غیرخطی در می آید. با استفاده از تبدیل کیرشهف می توان رفتار غیرخطی را از معادله حاکم به شرایط مرزی منتقل نمود. هنگامیکه در شرایط مرزی رفتار غیرخطی وجود دارد با استفاده از

روش‌های تکرار ساده (Simple iteration) یا نیوتن (Newton) می‌توان دستگاه معادلات حاصل را حل نمود. بنابر این حتی در حالتی که مسأله هدایت حرارت دائمی غیرخطی است احتیاجی به تقسیم‌بندی دامنه نمی‌باشد.

فرمولبندی اجزاء مرزی

معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله هدایت حرارت دائمی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla \cdot (k(T)\nabla T) + g = 0 \qquad (۱)$$

در این معادله T معرف درجه حرارت است و g شدت منبع تولید حرارت را در نقاط مختلف دامنه بیان می‌کند. $k(T)$ ضریب هدایت حرارت است که وابسته به دما در نظر گرفته شده است. این مسأله ممکن است تحت شرایط مرزی دیریشله (Dirichlet)، نیومن (Neumann) یا جابجایی قرار گیرد. همچنین شرط مرزی غیرخطی تشعشع نیز برای این مسأله قابل تعریف است. معادله غیرخطی هدایت حرارت را با تبدیل کیرشهف می‌توان به صورت خطی درآورد [18]. برای این منظور ابتدا یک متغیر جدید U به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U(T) = \int_0^T \frac{k(T')}{k_0}\, dT'$$

که در آن k_0 مقدار ضریب هدایت حرارت در دمای صفر است. با استفاده از این تبدیل، معادله (۱) به فرم خطی در می‌آید. برای ارضاء شرط مرزی نیومن رابطه زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{k(T)}{k_0}\frac{\partial T}{\partial n}$$

نظر به اینکه معادله غیرخطی هدایت حرارت دائمی را با تبدیل کیرشهف می‌توان به صورت خطی درآورد، لذا بدون از دست دادن عمومیت، فرمولبندی مسأله را فقط برای حالتی که ضریب هدایت حرارت ثابت است بررسی می‌کنیم. با بکارگیری روش مستقیم اجزاء مرزی معادله انتگرالی هدایت حرارت به صورت زیر بدست می‌آید [19, 20].

$$C_i T_i + \int_\Gamma T \frac{\partial T_i^*}{\partial n} d\Gamma = \int_\Gamma T_i^* \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{k}\int_\Omega g T_i^*\, d\Omega \qquad (۲)$$

در معادله (۲) Γ و Ω به ترتیب مرز ودامنه مسأله را بیان می‌کنند. n جهت عمود بر مرز و i معرف نقطه‌ای از مرز یا دامنه است. C_i ضریب هندسی نقطه i است که برای نقاط داخل دامنه ۱ و برای نقاط مرزی باتوجه به شکل هندسی محاسبه می‌شود. $T_i^* = \frac{1}{2\pi}\ln(\frac{1}{r_i})$ جواب اساسی و $\frac{\partial T_i^*}{\partial n} = \frac{-1}{2\pi r_i^2}\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}$ مشتق نرمال آن در مسأله دو بعدی است. $\mathbf{r}_i$ معرف بردار فاصله هر نقطه تا نقطه دید i است. مقدار این بردار با r_i مشخص شده است و $\mathbf{n}$ بیان کننده بردار واحد عمود بر مرز است. برای تبدیل معادله انتگرالی (۲) به معادله ماتریسی، مرز مسأله به تعدادی المان مرزی تقسیم بندی می‌شود سپس هر یک از انتگرال‌های مرزی محاسبه می‌شوند. در این رابطه می‌توان به مرجع [19] اشاره کرد. در اینجا فقط نحوه محاسبه انتگرال مربوط به منبع تولید حرارت برای منابع نقطه‌ای و خطی بیان می‌شود.

۲ - ۱ - محاسبه انتگرال دامنه‌ای منابع تولید حرارت

انتگرال دامنه‌ای $\frac{1}{k}\int_\Omega g T_i^* d\Omega$ که اثر منابع تولید حرارت داخل دامنه را شامل می‌شود، در دو حالت بررسی می‌کنیم. در مورد اول حالتی را در نظر می‌گیریم که منبع تولید حرارت به صورت نقطه‌ای باشد ودر مورد دیگر منبع تولید حرارت خطی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

منظور از منبع تولید حرارت نقطه‌ای منبعی است که سطح آن به صفر میل می‌کند ودارای شدت G_M است یعنی:

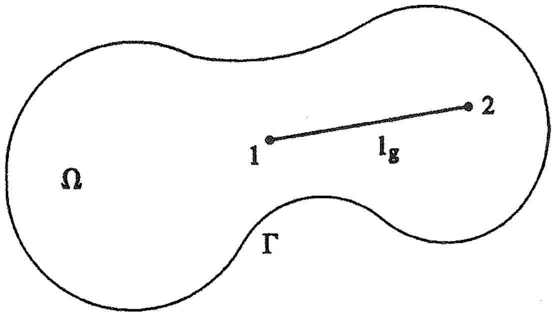
$$g = G_M\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \qquad (۳)$$

در رابطه (۳) موقعیت منبع که در نقطه M قرار دارد با r_M نشان داده شده است و δ بیان کننده تابع دلتای دیراک است. انتگرال مربوط به منبع تولید حرارت نقطه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود.

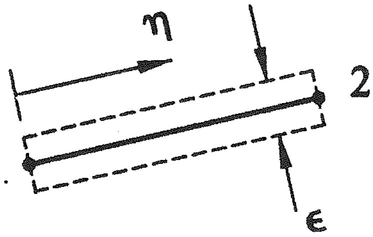
$$I_D = \frac{-1}{2k\pi}\int_\Omega G_M\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \ln r_i\, d\Omega = \frac{-G_M}{2k\pi}\ln(r_i)\Big|_{\text{point } M}$$

در حالت دیگر که منبع از نوع خطی است، تولید حرارت روی یک پاره خط متمرکز است. شکل (۱) دامنه Ω را نشان می‌دهد که در آن یک منبع تولید حرارت خطی به طول l_g قرار داده شده است. شدت منبع در نقاط ۱ و ۲ به ترتیب g_1 و g_2 می‌باشد و در حد فاصل دو نقطه ۱ و ۲

تغییرات خطی برای شدت منبع در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است که مقادیر g_1 و g_2 در واحد طول در نظر گرفته می‌شوند.



شکل (۱) منبع تولید حرارت خطی.



شکل (۲) مختصه محلی برای منبع خطی.

شکل (۲) مختصه جدید η را روی منبع خطی نشان می‌دهد. در این شکل سطحی با پهنای بی‌نهایت کوچک ε در اطراف منبع در نظر گرفته شده است که آن را Ω_ε می‌نامیم. برای محاسبه انتگرال مربوط به این منبع داریم:

$$I_D = \frac{1}{k}\int_{\Omega} g T_i^* d\Omega = \frac{1}{k}\int_{\Omega\varepsilon} g T_i^* d\Omega$$

با در نظر گرفتن توزیع خطی برای شدت منبع خواهیم داشت،

$$I_D = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{(1-\eta)\, g_1 + \eta g_2}{\varepsilon} T_i^* \varepsilon l_g \, d\eta \qquad (۴)$$

حاصل انتگرال (۴) را می‌توان به صورت عددی یا تحلیلی محاسبه نمود. حاصل تحلیلی این انتگرال عبارتست از،

$$I_D = \frac{-l_g}{2k\pi} I_1(a, b, c, d, e, 0, 1)$$

که در آن،

$$a = g_1, \quad b = g_2 - g_1$$

$$c = l_g^2, \quad d = r_{i2}^2 - l_g^2 - r_{i1}^2, \quad \varepsilon = r_{i1}^2$$

در روابط اخیر r_{i1} و r_{i2} بیان کننده فاصله نقطه دید i تا دو انتهای منبع خطی هستند، همچنین داریم:

$$I_1(a, b, c, d, e, g, h) = \int_g^h (a + b\xi) \ln \sqrt{c\xi^2 + d\xi + e}\, d\xi$$

$$= \Big\{ a \Big[\xi \ln \sqrt{c\xi^2 + d\xi + e} - \frac{1}{2} I_2(2c, d, 0, c, d, e, 0, \xi)\Big] + \frac{b}{4}\Big[\frac{d}{c}\xi - \xi^2 + 2\xi^2 \ln \sqrt{c\xi^2 + d\xi + e} - I_2\Big(0, \frac{d^2}{c} - 2e, \frac{de}{c}, c, d, e, 0, \xi\Big)\Big] \Big\}_{\xi = g}^{\xi = h} \qquad (۵)$$

در رابطه (۵)، I_2 انتگرال دیگری است که به صورت زیر به دست می‌آید

$$I_2(a, b, c, d, e, f, g, h) = \int_g^h \frac{a\xi^2 + b\xi + c}{d\xi^2 + e\xi + f} d\xi$$

برای وقتی که $\varepsilon^2 - 4df \neq 0$ داریم

$$I_2(a, b, c, d, e, f, g, h) = \Bigg\{ \frac{a}{d}\xi + \frac{\left(b - \frac{ae}{d}\right)}{2d} \ln\left(\xi^2 + \frac{e}{d}\xi + \frac{f}{d}\right) + \frac{1}{d^2}\left(cd - af - \frac{eb}{2} + \frac{ae^2}{2d}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{f}{d} - \frac{e^2}{4d^2}}} \tan^{-1} \frac{\xi + \frac{e}{2d}}{\sqrt{\frac{f}{d} - \frac{e^2}{4d^2}}} \Bigg\}_{\xi = g}^{\xi = h}$$

و اگر $e^2 - 4df = 0$ داریم

$$I_2(a, b, c, d, e, f, g, h) = \Bigg\{ \frac{a}{d}\xi + \left(\frac{b}{d} - \frac{ae}{d^2}\right) \Big[\ln\left(\xi + \frac{e}{2d}\right) - \left(\frac{cd - af}{bd - ae} - \frac{e}{2d}\right) \frac{1}{\xi + \frac{e}{2d}} \Big] \Bigg\}_{\xi = g}^{\xi = h}$$

ملاحظه می‌شود که اثر منبع تولید حرارت خطی را می‌توان به صورت دقیق اعمال نمود. همچنین با تقسیم‌بندی یک مسیر به تعدادی پاره خط می‌توان اثر منبع تولید حرارت روی یک مسیر را نیز به راحتی اعمال

کرد. در فرمولبندی اجزاء مرزی، اثر منابع تولید حرارت گسترده را نیز می‌توان اعمال نمود. در رابطه با اعمال اثر منابع تولید حرارت گسترده در مسائل دو بعدی و سه بعدی در مرجع [20] توضیحات مفصلی داده شده است.

۳ـ روابط ماتریسی

معادله ماتریسی نهایی را با در نظر گرفتن r نقطه مرزی، n_p منبع نقطه‌ای و n_l منبع خطی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{HT} = \mathbf{GQ} + \mathbf{A}_{gp}\mathbf{F}_{gp} + \mathbf{A}_{gl}\mathbf{F}_{gl} \qquad (۶)$$

که در آن:

$\mathbf{H},\mathbf{G}$: ماتریسهای ضرایب وابسته به شکل هندسی $(r \times r)$

$\mathbf{T}$: بردار دمای r نقطه مرزی $(r \times 1)$

$\mathbf{Q}$: بردار مشتقات نرمال r نقطه مرزی $(r \times 1)$

$\mathbf{F}_{gp}$: بردار شدت حرارت منابع نقطه‌ای $(n_p \times 1)$

$\mathbf{A}_{gp}$: ماتریس ضرایب وابسته به موقعیت منابع نقطه‌ای $(r \times n_p)$

$\mathbf{F}_{gl}$: بردار شدت حرارت منابع خطی $(2n_l \times 1)$

$\mathbf{A}_{gl}$: ماتریس ضرایب وابسته به موقعیت منابع خطی $(r \times 2n_l)$

همچنین برای 'r نقطه داخلی رابطه ماتریسی زیر حاصل می‌شود

$$\mathbf{H'T} + \mathbf{IT'} = \mathbf{G'Q} + \mathbf{A'}_{gp}\mathbf{F}_{gp} + \mathbf{A'}_{gl}\mathbf{F}_{gl} \qquad (۷)$$

در معادله ماتریسی (۷) I ماتریس واحد، 'T بردار دمای نقاط داخلی و بقیه ماتریس‌ها مشابه با ماتریس‌های تعریف شده در رابطه (۶) هستند. با قرار دادن معادلات (۶) و (۷) در کنار یکدیگر به معادله ماتریسی کلی زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{o} & -\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{gp} & -\mathbf{A}_{gl} \\ \mathbf{H'} & \mathbf{I} & -\mathbf{G'} & -\mathbf{A'}_{gp} & -\mathbf{A'}_{gl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{T'} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{F}_{gp} \\ \mathbf{F}_{gl} \end{bmatrix} = 0 \qquad (۸)$$

از بین اعضای بردارهای $\mathbf{T}, \mathbf{T'}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}_{gp}$ و $\mathbf{F}_{gl}$ معلومات را جایگزین کرده دستگاه را به صورت $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ مرتب می‌کنیم. در مسأله مستقیم $\mathbf{F}_{gp}$ و $\mathbf{F}_{gl}$ معلوم بوده و به ازای هر نقطه مرزی یک عضو از $\mathbf{T}$ یا $\mathbf{Q}$ معلوم می‌باشد.

بدین ترتیب دستگاه معادلات حاصل از لحاظ تعداد معادلات با مجهولات همخوانی خواهد داشت و دستگاه حاصل سالم می‌باشد. در مسأله معکوس این امکان وجود دارد که بعضی از اعضای بردارهای $\mathbf{T}, \mathbf{T'}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}_{gp}$ و $\mathbf{F}_{gl}$ معلوم و بعضی دیگر مجهول باشد. مقادیری از $\mathbf{T'}$ که معلوم در نظر گرفته می‌شوند، مقادیر نمونه برداری نامیده می‌شود. همچنین اگر در یک نقطه مرزی هر دو مقدار دما و مشتق نرمال دما معلوم باشد، شرایط مرزی در آن نقطه را از نوع فوق مشخص (Over determined boundary condition) می‌نامیم. بعد از جایگذاری معلومات و مرتب کردن معادله (۸) دستگاه معادلاتی به فرم زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \qquad (۹)$$

در معادله (۹) یا تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر است یا اینکه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است. در حالتیکه تعداد مقادیر نمونه برداری زیاد باشد دستگاه حاصل دارای تعداد معادلات بیشتری نسبت به مجهولات خواهد بود که در این صورت دستگاه مزبور فوق مشخص (Over determined) می‌باشد و برای حل آن می‌توان از روش‌هایی مانند حداقل مربعات و یا تفکیک مقدار منفرد (Singular value decomposition) [4] استفاده نمود. دستگاه (۹) بسیار حساس است و در صورت وجود اندکی خطا در مقادیر نمونه برداری (که کمابیش وجود دارد) خطای بسیار بزرگی در نتایج ظاهر می‌شود. برای کم شدن حساسیت می‌توان تعداد مقادیر نمونه برداری را زیادتر کرد و از روش‌های هموارسازی [14] استفاده نمود. در یک روش هموارسازی منسوب به تیخانوف [14] حل دستگاه (۹) از مینیمم سازی زیر بدست می‌آید.

$$\min \left\{ \| \mathbf{AX} - \mathbf{B} \|^2 + \mu \| \mathbf{RX} \|^2 \right\} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\mathbf{R}$ ماتریس انتخابگر عضوهای مورد نظر از بردار مجهولات $\mathbf{X}$ است و μ بیان کننده مقدار هموارساز است. حل مسأله بهینه سازی (۱۰) عبارتست از:

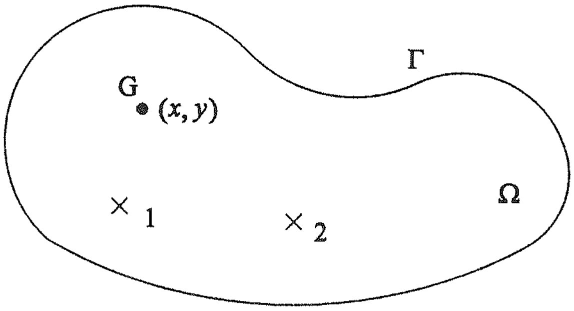
$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu\mathbf{R}^T\mathbf{R})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{B}$$

اگر برای μ عدد کوچکی در نظر گرفته شود، جواب به

صورت نوسانی در می‌آید و به جواب روش حداقل مربعات نزدیک می‌شود و اگر برای μ مقدار بزرگی در نظر گرفته شود جواب هموارتر می‌شود و از مقدار دقیق دور می‌شود. در حالتیکه μ به صورت مناسب انتخاب شود $\|AX - B\|$ نسبت $\|B\|$ عدد کوچکی است و جواب نیز هموار می‌باشد. البته این شرایط در صورتی بدست می‌آید که تعداد نقاط نمونه برداری به اندازه کافی باشد.

۴ـ مسأله معکوس تعیین محل و وضعیت قرارگیری منابع تولید حرارت نقطه ای و خطی، روش یک همسایه خوب

مطابق با شکل (۳) در نظر بگیرید قرار است مختصات یک منبع تولیدحرارت نقطه‌ای با شدت G را چنان بدست آوریم که دما در نقاط ۱ و ۲ به ترتیب $\hat{T}_1$ و $\hat{T}_2$ باشد.



شکل (۳) دامنه ای با یك منبع تولید حرارت نقطه ای و دو نقطه نمونه برداری.

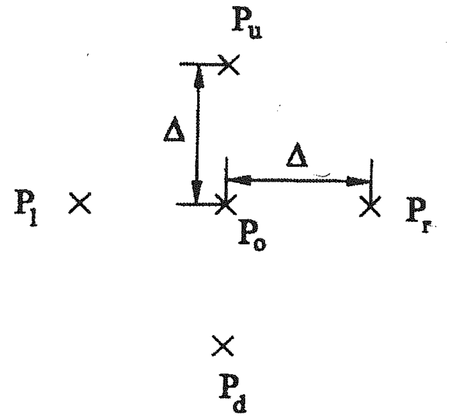
برای حل مسأله یک تابع ارزش به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f = \sqrt{(T_1 - \hat{T}_1)^2 + (T_2 - \hat{T}_2)^2}$$

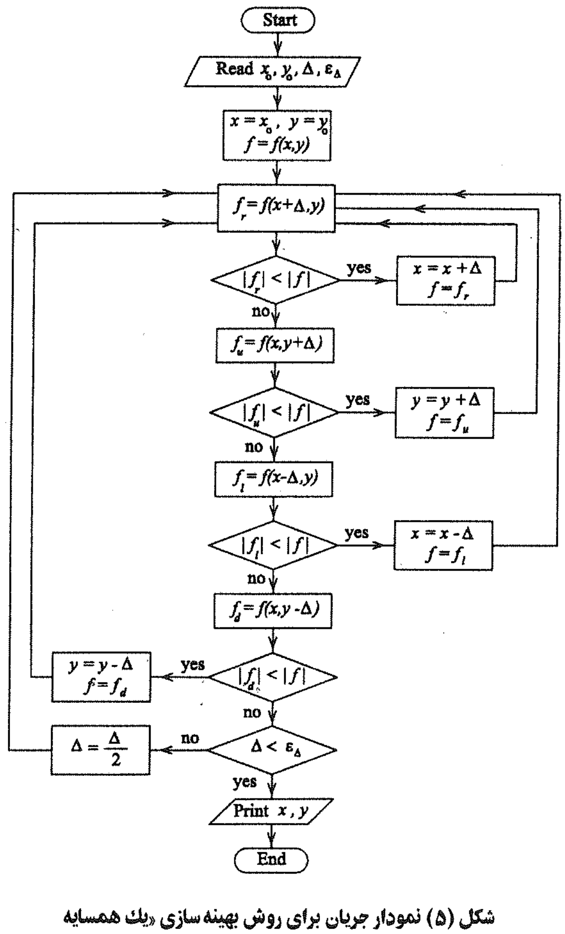
T_1 و T_2 دما در نقاط ۱ و ۲ هستند که با در نظر گرفتن منبع در نقطه‌ای به مختصات (x, y) بدست می‌آیند. بنابر این T_1 و T_2 توابعی از x و y هستند و در نتیجه f هم تابعی از متغیرهای x و y می‌باشد. هدف کمینه کردن تابع ارزش f با متغیرهای طراحی x و y است. برای حل این مسأله بهینه سازی چند متغیره می‌توان از روش شدیدترین کاهش (Steepest descent) استفاده کرد. اما نظر به اینکه f بر حسب x و y به صورت صریح موجود نمی‌باشد، لذا مشتق‌گیری از f را باید به صورت عددی انجام داد که این موضوع مشکلاتی را در رابطه با حجم محاسبات و نرخ همگرایی بوجود می‌آورد. در اینجا از یک روش پیشنهادی با مرتبه مشتق‌گیری صفر استفاده می‌کنیم. این روش را که با عنوان «یک همسایه خوب» معرفی می کنیم به شرح ذیل بکار برده می‌شود.

در ابتدا محل منبع را در نقطه P_0 با مختصات (x_0 , y_0) به عنوان حدس اولیه در نظر می‌گیریم و مقدار تابع ارزش را محاسبه می‌کنیم. مقدار اولیه برای تابع ارزش را f_0 می‌نامیم، اکنون مطابق شکل (۴) چهار نقطه P_u, P_r, P_l و P_d را در چهار طرف نقطه P_0 به فاصله Δ از آن در نظر می‌گیریم (شکل ۴). تابع ارزش را در هریک از این چهار نقطه بدست آورده و در هر مورد که تابع ارزش کاهش پیدا کند، منبع را به آن نقطه انتقال می‌دهیم. اگر مقدار تابع ارزش در یک نقطه از چهار همسایه کاهش پیدا کند منبع را به آن نقطه انتقال می‌دهیم و احتیاجی نیست که مقدار تابع ارزش را در همسایه‌های دیگر جهت بدست آوردن بهترین همسایه ارزیابی کنیم. در صورتی که مقدار تابع ارزش در هر چهار همسایه بیشتر از مقدار آن در نقطه P_0 باشد، مقدار Δ را نصف می‌کنیم. بدیهی است که با انجام مراحل این روش مقدار تابع ارزش کاهش پیدا می‌کند. مراحل مختلف این روش را تا زمانی که Δ به اندازه کافی کوچک شود، ادامه می‌دهیم. همچنین شرط توقف را می‌توان کوچک شدن تابع ارزش به اندازه دلخواه در نظر گرفت. در حالتی که مختصات چند منبع نقطه‌ای مجهول است، در هر مرحله چهار طرف تمام منابع را جهت کاهش دادن تابع ارزش بررسی می‌کنیم. در شرایطی که تعداد مجهولات (مختصات منابع که دو برابر تعداد آنها است) از تعداد دماهای داده شده در نقاط نمونه برداری بیشتر نیست، می‌توان انتظار داشت که تابع ارزش در شرایط ایده‌آل به صفر برسد. البته روشی که در اینجا ارائه گردید جواب بهینه نسبی را بدست می‌آورد که در بعضی از مسائل ممکن است جواب بهینه نسبی جواب بهینه کلی نباشد. در این موارد باید حدس اولیه نقاط شروع را در چند اجرا در مناطق مختلف در نظر گرفت تا در نهایت به جواب بهینه کلی دست پیدا کنیم. در شکل (۵) نمودار جریان روش یک همسایه خوب جهت حل مسأله معکوس با یک منبع نقطه‌ای نشان داده شده است. در انواع دیگر مسائل معکوس که هدف بدست آوردن محل و جهت قرارگیری منبع خطی است، تابع ارزش مشابه قبل تعریف می‌شود. متغیرهای طراحی مختصات نقطه وسط منبع خطی (یا هر نقطه

دیگر آن) و زاویه قرارگیری آن است. در این مورد نیز برای حل مسأله بهینه سازی از روش یک همسایه خوب استفاده می کنیم. البته بعد از هر حرکت منبع، باید زاویه بهینه منبع در آن نقطه را بدست آورد. زاویه قرارگیری منبع خطی زاویه‌ای بین صفر تا ۳۶۰ خواهد بود.



شکل (۴) نقطه فعلی و چهار همسایه آن در روش یك همسایه خوب.



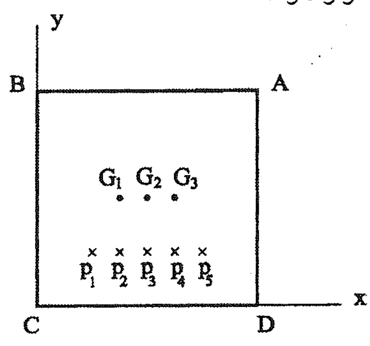
شکل (۵) نمودار جریان برای روش بهینه سازی «یك همسایه خوب» وقتیکه فقط یك منبع وجود داشته باشد.

۵- مثال‌ها

در این قسمت با ارائه پنج مثال عددی دقت و کارایی روش‌های بیان شده بررسی می شود. دو مثال اول به مسائل معکوس نوع اول مربوط می شود که در آنها مجهول مسأله شدت منابع تولید حرارت نقطه‌ای و خطی است. همچنین سه مثال دیگر در رابطه با مسائل معکوس نوع دوم مطرح می شود که در آنها به ترتیب موقعیت یک منبع نقطه‌ای، موقعیت دو منبع نقطه‌ای و موقعیت و وضعیت یک منبع خطی به عنوان مجهولات مسأله در نظر گرفته می شوند.

۵-۱- بدست آوردن شدت منابع نقطه‌ای در داخل دامنه

در شکل (۶) یک دامنه که تحت شرایط مرزی دیریشله قرار دارد، نشان داده شده است. طول ضلع مربع ۲ متر است و دما در چهار رأس مربع $T_A = 10°C$ ،$T_B = 20°C$ ، $T_C = 30°C$ و $T_D = 40°C$ می باشد و توزیع دما روی هر ضلع به صورت خطی در نظر گرفته شده است. مقدار ضریب هدایت حرارت $k = 1 \ \frac{W}{m°C}$ می باشد. در این مسأله سه منبع نقطه‌ای G_1 ، G_2 و G_3 در نقاط $(-0.25, 0)$، $(0, 0)$ و $(0.25, 0)$ در نظر گرفته شده است. این مثال ابتدا به صورت مستقیم با در نظر گرفتن $G_1 = G_2 = G_3 = 100W$ و با ۳۲ المان مرزی (تقسیم بندی ریز) حل گردیده است تا دما در نقاط P_1 تا P_5 با دقت نسبتاً خوب به دست آید. در مرحله بعد در حل مسأله معکوس مقادیر G_1، G_2 و G_3 مجهول در نظر گرفته شده است و مقادیر دماها در نقاط P_1 تا P_5 که از حل مسأله با تقسیم بندی ریز بدست آمده است به عنوان ورودی بکار برده شده است. هنگام حل مسأله معکوس ۱۶ المان مرزی (تقسیم بندی درشت) بکار برده شده است. نقاط P_1 تا P_5 در $y = 0.5$ و به فاصله ۰/۲۵ از یکدیگر قرار دارند.



شکل (۶) مسأله معکوس با سه منبع نقطه‌ای.

جدول (۱) نتایج حل مسأله معکوس با اطلاعات ورودی کم خطا را نشان می‌دهد. دمای نقاط P_1 تا P_5 که از حل مسأله مستقیم با تقسیم بندی ریز بدست آمده است، به عنوان ورودی مسأله معکوس در نظر گرفته شده است. عبارت خطا جهت مقادیری که برای شدت منابع بدست می‌آید به صورت زیر تعریف شده است.

$$error = \sqrt{(G_1 - 100)^2 + (G_2 - 100)^2 + (G_3 - 100)^2}$$

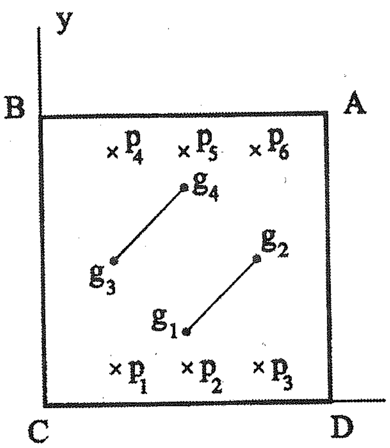
با مشاهده این جدول ملاحظه می‌شود که به علت کم خطا بودن اطلاعات ورودی در نظر گرفتن ضریب هموارساز μ ضروری نمی‌باشد و اختصاص دادن مقداری به آن تأثیری در بهبودی نتایج ندارد. همچنین دیده می‌شود که مقدار $\|AX\text{-}B\|$ در حد قابل قبولی قرار دارد. جواب دقیق این مسأله معکوس (در صورتیکه اطلاعات ورودی کاملاً دقیق باشد) عبارتست از $G_1 = G_2 = G_3 = 100$ و جواب های بدست آمده در جدول (۱) خطایی در حدود ۱٪ را نشان می‌دهد. جدول (۲) اجرای دیگری را نشان می‌دهد که در آن اطلاعات ورودی با ۲٪ خطا (افزایش یا کاهش مقادیر دماها در نقاط P_1 تا P_5 به طور اتفاقی) بکار برده شده‌اند. در این جدول برخلاف جدول (۱) دیده می‌شود که اختصاص دادن مقدار غیر صفر برای ضریب هموارساز μ تأثیر چشم‌گیری در هموارسازی نتایج دارد. هنگامیکه $\mu = 10^{-4}$ در نظر گرفته شود، مقدار $\|AX\text{-}B\|$ تنها اندکی نسبت به مقدار آن در $\mu = 0$ اختلاف دارد. در حالیکه جواب های گرفته شده به مراتب هموارتر می‌باشد.

در اجرای دیگر مسأله معکوس با در نظر گرفتن خطای ۵٪ برای اطلاعات ورودی حل گردیده است. یعنی دماهای بدست آمده از حل مسأله مستقیم با تقسیم بندی ریز پس از تغییر ۵٪ در حل مسأله معکوس بکار برده شده‌اند. نتایج این اجرا در جدول (۳) نشان داده شده است. در این مورد برای وقتیکه $\mu = 0$ است، نوسان جواب ها نسبتاً شدید است و ملاحظه می‌شود که به ازای $\mu = 10^{-3}$ نوسان جواب ها تا حدود زیادی کاهش پیدا کرده است. البته در نتایج بدست آمده خطاهایی وجود دارد که از خطای موجود در اطلاعات ورودی نتیجه شده است.

با بررسی جدول های (۱) تا (۳) این نتیجه بدست می‌آید که هنگام حل مسأله معکوس جهت بدست آوردن شدت منابع نقطه‌ای، در صورت کم بودن خطای اطلاعات نمونه برداری می‌توان از مقادیر کم (حتی صفر) برای ضریب هموارساز استفاده نمود، ولی در صورتی که اطلاعات نمونه برداری دارای خطایی بیشتری باشند، باید مقدار بیشتری را برای ضریب هموارساز در نظر گرفت.

۲-۵- بدست آوردن شدت منابع خطی در داخل دامنه

در شکل (۷) یک دامنه مربعی شکل با طول ضلع ۲ متر نشان داده شده است. دما در چهار رأس مربع $T_A = 10°C$, $T_B = 20°C$, $T_C = 30°C$ و $T_D = 40°C$ است و توزیع دما روی هر ضلع به صورت خطی در نظر گرفته شده است. مقدار ضریب هدایت حرارت $k = 1 \frac{W}{m°C}$ می باشد. در این مسأله دو منبع خطی l_1 و l_2 با نقاط انتهایی $(0, -0.5)$، $(0.5,0)$، $(-0.5,0)$ و $(0, 0.5)$ در نظر گرفته شده است. این مسأله ابتدا به صورت مستقیم با در نظر گرفتن $g_1 = 250 \frac{W}{m}$, $g_2 = 500 \frac{W}{m}$, $g_3 = 100 \frac{W}{m}$ و $g_4 = 600 \frac{W}{m}$ و با ۳۲ المان مرزی (تقسیم بندی ریز) حل گردیده است تا دما در نقاط P_1 تا P_6 با دقت نسبتاً خوب بدست آید. برای حل مسأله معکوس در حالت های مختلف ۱۶ المان مرزی (تقسیم بندی درشت) بکار گرفته شده است و نتایج بدست آمده از تقسیم بندی ریز به عنوان اطلاعات ورودی برای مسأله معکوس بکار برده شده است.



شکل (۷) مسأله معکوس با دو منبع خطی.

در جدول (۴) نتایج حل چند مسأله معکوس به صورت خلاصه نوشته شده است. در حالت اول به عنوان اطلاعات ورودی چهار دمای نمونه برداری و در حالت های بعد پنج و شش دمای نمونه برداری در نظر

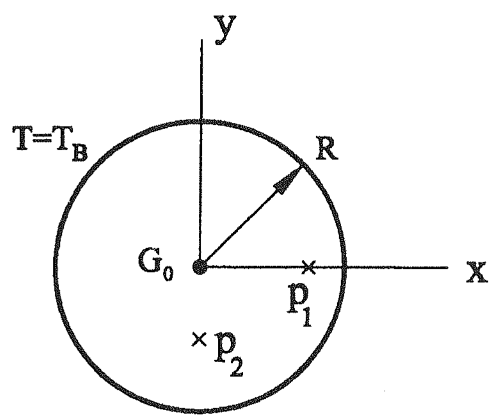
گرفته شده است. در هر مورد مناسب ترین مقدار برای ضریب هموارساز چنان انتخاب گردیده است که خطا (error) مینیمم باشد. در این مسأله خطا به صورت زیر محاسبه گردیده است.

$$error = \sqrt{(g_1 - 250)^2 + (g_2 - 500)^2 + (g_3 - 200)^2 + + (g_4 - 600)^2}$$

با مشاهده جدول (۴) ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد دماهای نمونه برداری خطای نتایج بدست آمده کمتر می‌شود و مقدار ضریب هموارساز کمتری لازم خواهد بود. در حالت دیگر اطلاعات ورودی با ۱٪ خطا بکاربرده شده‌اند و نتایج در جدول (۵) قید گردیده است. در این مورد نیز دیده می‌شود که با افزایش تعداد نقاط نمونه برداری حساسیت مسأله کاهش پیدا کرده و خطای نتایج کمتر شده است.

۳-۵- بدست آوردن موقعیت یک منبع تولید حرارت نقطه‌ای

در شکل (۸) یک مسأله با دامنه دایره‌ای شکل نشان داده شده است. در مرکز این دایره یک منبع نقطه‌ای با شدت G_0 وجود دارد. شعاع دایره R و مرز آن تحت شرط مرزی $T = T_B$ قرار گرفته است. ضریب هدایت حرارت وابسته به دما و به صورت $k = k_0 + \alpha T$ در نظر گرفته می‌شود.



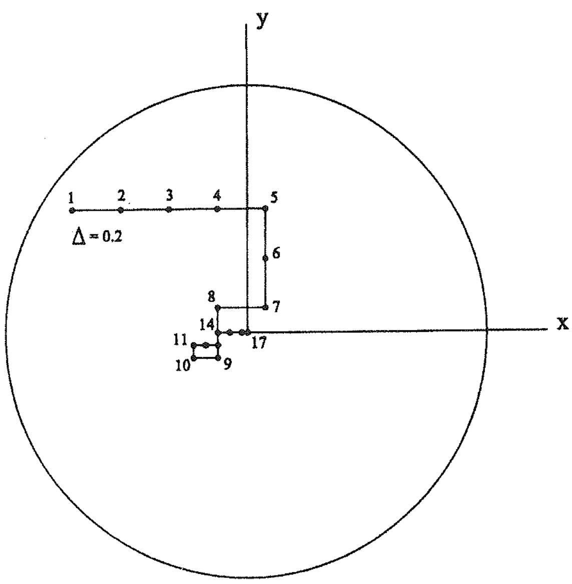
شکل (۸) مسأله غیرخطی با یک منبع نقطه‌ای.

درجه حرارت دقیق در نقاط مختلف دامنه در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$k_0 (T - T_B) + \frac{1}{2} \alpha (T^2 - T_B^2) = \frac{-G_0}{2\pi} \ln \frac{\rho}{R} \qquad (۱۱)$$

در این رابطه ρ فاصله یک نقطه دلخواه از مرکز دایره و T درجه حرارت آن نقطه است. در صورتیکه $\alpha = 0.02 \frac{W}{m^\circ C^2}$, $k_0 = 1 \frac{W}{m^\circ C^2}$, $G_0 = 20W$, $R = 1m$ و $T_B = 10^\circ C$ انتخاب شوند، درجه حرارت در نقاط P_1 (0.75, 0) و P_2 (0, -0.5) با استفاده از رابطه (۱۱) به ترتیب $T_1 = 10.758$ و $T_2 = 11.811$ بدست می‌آید.

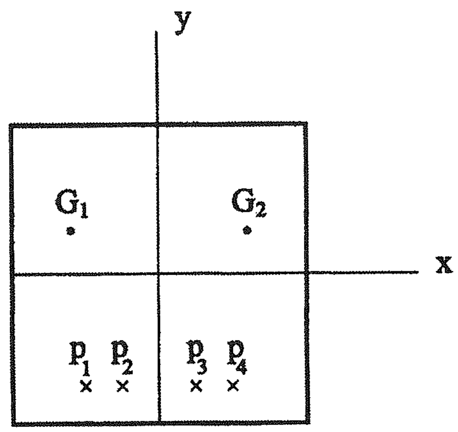
در حل مسأله معکوس، مرز مسأله به ۱۲ المان مرزی تقسیم بندی شده است و دما در نقاط P_1 و P_2 معلوم و برابر با نتایج بدست آمده از حل دقیق در نظر گرفته شده است. به عنوان حدس اولیه منبع در نقطه (-۰/۷۲۵ ، ۰/۵) قرار داده شده و با استفاده از روش یک همسایه خوب جستجوی جواب بهینه انجام گرفته است. پیشروی روش بهینه سازی در شکل (۹) نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در مراحل آخر منبع نقطه‌ای به مرکز دایره نزدیک شده است.



شکل (۹) پیشروی منبع نقطه‌ای به طرف نقطه بهینه.

۴-۵- بدست آوردن موقعیت دو منبع تولید حرارت نقطه‌ای

مثال قبل یک مسأله بهینه سازی دو متغیره بود در حالیکه مثالی که اکنون مورد بررسی قرار می‌گیرد یک مسأله بهینه سازی چهار متغیره است. در شکل (۱۰) یک مسأله با دامنه مربعی شکل به طول ضلع ۲m نشان داده شده است. این دامنه تحت شرایط مرزی دیرشله به صورت $T_B = 10^\circ C$ قرار دارد و مقدار ضریب هدایت حرارت $k = 1 \frac{W}{m^\circ C}$ می‌باشد.



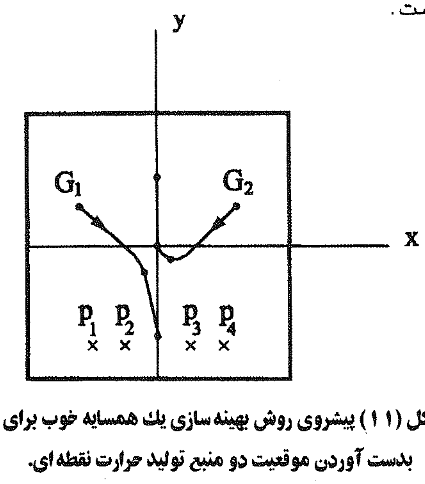
شکل (۱۰) مسأله بدست آوردن موقعیت دو منبع نقطه ای.

هدف بدست آوردن مکان دو منبع نقطه ای $G_1 = 50W$ و $G_2 = 50W$ است طوری که دما در نقاط P_1 (-0.5, -0.75), P_2 (-0.25, -0.75) , P_3 (0.25, - 0.75) و P_4 (0.5 , 0.75) به ترتیب 13°C , 17°C , 17°C و 13°C باشد. برای شروع، منابع G_1 و G_2 به ترتیب در نقاط $(x_1 , y_1) = (-0.6, 0.3)$ و $(x_2, y_2) = (0.6, 0.3)$ در نظر گرفته شده اند. همچنین در شروع، فاصله همسایگی برابر با $\Delta = 0.1$ انتخاب گردیده است. پیشروی روش بهینه سازی به صورت خلاصه در جدول (۶) بیان گردیده است.

در این مسأله در هر مرحله خطا به صورت زیر محاسبه گردیده است

$$\text{error} = \sqrt{(T_1 - 13)^2 + (T_2 - 17)^2 + (T_3 - 17)^2 + (T_4 - 13)^2}$$

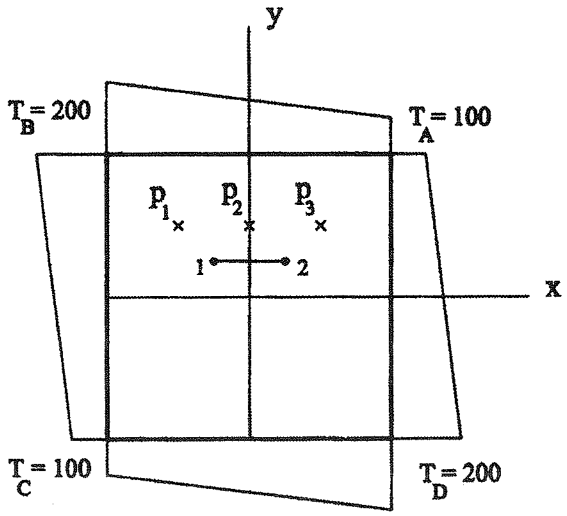
در شکل (۱۱) چگونگی پیشروی روش بهینه سازی با نمایش مکان منابع در چند مرحله منتخب نشان داده شده است.



شکل (۱۱) پیشروی روش بهینه سازی یك همسایه خوب برای بدست آوردن موقعیت دو منبع تولید حرارت نقطه ای.

۵-۵- بدست آوردن موقعیت و وضعیت قرارگیری منبع تولید حرارت خطی

در شکل (۱۲) یک مسأله با دامنه مربعی شکل به طول ضلع ۲m نشان داده شده است. این دامنه مطابق شکل (۱۲) تحت شرایط مرزی دیریشله قرار دارد و ضریب هدایت حرارت $k = 1 \frac{W}{m^\circ C}$ است.



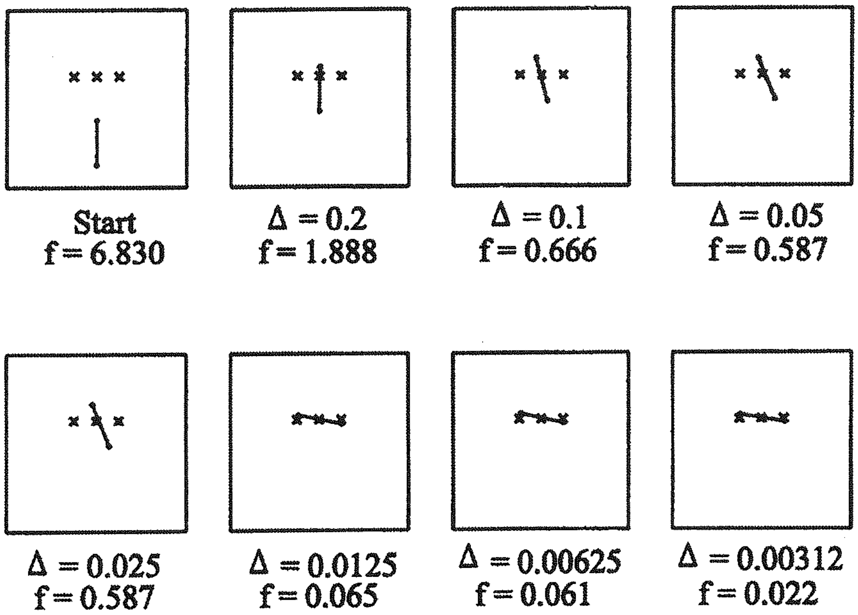
شکل (۱۲) دامنه مربعی با منبع تولید حرارت خطی.

ابتدا یک مسأله مستقیم با در نظر گرفتن یک منبع خطی حل گردیده است. منبع خطی که دارای طول ۰/۵m است در $y = 0.25$ قرار دارد و شدت تولید حرارت در ابتدا و انتهای آن $g_1 = 50 \frac{W}{m}$ و $g_2 = 100 \frac{W}{m}$ است. با حل مسأله مستقیم، دما در سه نقطه P_1 (-0.5, 0.5), P_2 (0, 0.5) و P_3 (0.5, 0.5) بدست آمده است و به عنوان اطلاعات ورودی برای مسأله معکوس بکار برده شده است. در مسأله معکوس در شروع، منبع خطی با زاویه$\pi/2$ و در نقطه (۰/۵- ، ۰) (مرکز منبع) قرار داده شده است. همچنین فاصله همسایگی در ابتدا $\Delta = ۰/۲$ در نظر گرفته شده است. در شکل (۱۳) وضعیت منبع در شروع و در مراحل بعد نشان داده شده است.

۶- نتیجه گیری

در روش اجزاء مرزی اثر منابع تولید حرارت نقطه ای و خطی به طور دقیق اعمال می شود. در رابطه با این منابع دو نوع مسأله معکوس تعریف شد. در مسأله معکوس نوع اول که محل و وضعیت قرارگیری منابع

معلوم است و باید شدت منابع بدست آورده شود، روش حداقل مربعات با افزودن جمله هموارساز کارایی خوبی را نشان داد. در مسأله معکوس نوع دوم که شدت منابع معلوم است وباید محل و وضعیت قرارگیری منابع بدست آورده شود، روش پیشنهادی یک همسایه خوب مورد استفاده قرار گرفت. با استفاده از چند مثال کارایی روش های ارائه شده و همچنین چگونگی همگرایی روش یک همسایه خوب در مسائل خطی و غیرخطی ملاحظه گردید.



شکل (۱۳) پیشروی روش بهینه سازی یك همسایه خوب برای بدست آوردن موقعیت منبع تولید حرارت خطی.

جدول (۱) نتایج حل مسأله معکوس برای بدست آوردن شدت منابع نقطه ای با اطلاعات ورودی کم خطا، دمای نقاط P_1 تا P_5 که از حل مسأله مستقیم با تقسیم بندی ریز بدست آمده است به عنوان ورودی مسأله معکوس در نظر گرفته شده است.

μ	G_1	G_2	G_3	$\|AX-B\|$	$\|B\|$	error
۰	۹۹/۱	۱۰۱/۱	۹۹/۱	۰/۰۰۶۱	۸۹/۰	۱/۶۸
$۱۰^{-۶}$	۹۹/۰	۱۰۱/۲	۹۹/۰	۰/۰۰۶۴	۸۹/۰	۱/۸۵
$۱۰^{-۵}$	۹۸/۵	۱۰۲/۰	۹۸/۵	۰/۰۱۹۵	۸۹/۰	۲/۹۲
$۱۰^{-۴}$	۹۶/۱	۱۰۶/۵	۹۵/۷	۰/۱۵۰۸	۸۹/۰	۸/۷۲

جدول (۲) نتایج حل مسأله معکوس برای بدست آوردن شدت منابع نقطه ای با ۲ ٪ خطا در اطلاعات ورودی، دمای نقاط P_1 تا P_5 که از حل مسأله مستقیم با تقسیم بندی ریز بدست آمده است با در نظر گرفتن ۲ ٪ افزایش یا کاهش (به طور اتفاقی) به عنوان ورودی مسأله معکوس در نظر گرفته شده است.

μ	G_1	G_2	G_3	$\|AX-B\|$	$\|B\|$	error
۰	۱۰۷/۱	۸۳/۲	۱۱۱/۲	۱/۵۶۹۱	۸۹/۱	۱۴/۹
$۱۰^{-۵}$	۱۰۵/۸	۸۵/۶	۱۰۹/۸	۱/۵۶۹۵	۸۹/۱	۱۲/۲
$۱۰^{-۴}$	۹۹/۶	۹۷/۰	۱۰۲/۹	۱/۵۸۶۰	۸۹/۱	۴/۱۹
$۱۰^{-۳}$	۹۲/۶	۱۰۸/۵	۹۳/۷	۲/۰۳۴۷	۸۹/۱	۱۲/۹۱

جدول (۳) نتایج حل مسأله معکوس برای بدست آوردن شدت منابع نقطه ای با ۵ ٪ خطا در اطلاعات ورودی، دمای نقاط P_1 تا P_5 که از حل مسأله مستقیم با تقسیم بندی ریز بدست آمده است با در نظر گرفتن ۵ ٪ افزایش یا کاهش (به طور اتفاقی) به عنوان ورودی مسأله معکوس در نظر گرفته شده است.

μ	G_1	G_2	G_3	$\|AX-B\|$	$\|B\|$	error
۰	۱۳۹/۱	۱۱/۶	۱۵۹/۸	۷/۸۴۸۵	۸۹/۹	۱۱۳/۷
$۱۰^{-۵}$	۱۳۴/۷	۱۹/۸	۱۵۵/۱	۷/۸۴۹۳	۸۹/۹	۱۰۳/۳
$۱۰^{-۴}$	۱۱۴/۰	۵۹/۱	۱۳۲	۷/۸۷۶۵	۸۹/۹	۵۳/۸
$۱۰^{-۳}$	۹۱/۴	۱۰۱/۸	۱۰۳/۸	۸/۰۵۰۰	۸۹/۹	۹/۵۷

جدول(۴) نتایج حل مسأله معکوس برای بدست آوردن شدت منابع خطی، در حالت اول چهار دمای نمونه برداری و در حالت های بعد پنج و شش دمای نمونه برداری در نظر گرفته شده است.

معلومات	g_1	g_2	g_3	g_4	مقدار بهینهٔ μ	error
T_1, T_3, T_4, T_6	۲۳۶/۴	۵۱۰/۷	۲۲۶/۱	۵۷۲/۵	۸×۱۰^{-۷}	۴۱/۷۰
T_1, T_2, T_3, T_4, T_6	۲۴۵/۹	۵۰۱/۶	۲۰۴/۷	۵۹۱/۶	۰	۱۰/۵۴
$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$	۲۴۸/۱	۴۹۸/۹	۱۹۸/۷	۵۹۷/۴	۰	۳/۶۲

جدول (۵) نتایج حل مسأله معکوس برای بدست آوردن شدت منابع خطی ، در حالت اول چهار دمای نمونه برداری و در حالتهای بعد پنج و شش دمای نمونه برداری با اعمال ۱ ٪ خطا در نظر گرفته شده است.

معلومات	g_1	g_2	g_3	g_4	مقدار بهینهٔ	error
T_1, T_3, T_4, T_6	۲۵۷/۳	۴۶۶/۸	۳۰۰/۱	۵۰۳/۳	$۱۰^{-۶}$	۱۴۳/۹
T_1, T_2, T_3, T_4, T_6	۲۴۱/۱	۵۲۸/۲	۲۸۴/۴	۵۰۲/۱	۷×۱۰^{-۷}	۱۳۲/۶
$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$	۲۷۰/۲	۵۰۰/۳	۲۱۴/۴	۵۶۴/۸		۴۳/۱

جدول (۶) پیشروی روش بهینه سازی یک همسایه خوب برای بدست آوردن موقعیت دو منبع تولید حرارت نقطه ای.

Δ	x_1	y_1	x_2	y_2	error
start	-۰/۶	۰/۳	۰/۶	۰/۳	۸/۰۲۶
۰/۱	-۰/۱	-۰/۲	۰/۱	-۰/۱	۲/۱۶
۰/۰۵	۰	-۰/۶۵	۰	۰/۵	۰/۰۸۴۵
۰/۰۲۵	۰	-۰/۶۵	۰	۰/۵۲۵	۰/۰۳۳۹
۰/۰۱۲۵	۰	-۰/۶۵	۰	۰/۵۲۵	۰/۰۳۳۹
۰/۰۰۶۲۵	۰	-۰/۶۵	۰	۰/۵۱۸۷۵	۰/۰۳۰۰
۰/۰۰۳۱۲۵	۰	-۰/۶۵۳۱۲۵	۰	۰/۵۱۵۶۲۶	۰/۰۱۲۵

مراجع

[1] M. X. Khadar and M. C. Henna, An Iterative Boundary Numerical Solution for General Steady Heat Conduction Problems, Trans. ASME J. Heat. Transfer, Vol. 103, 26-31, (1981).

[2] C. A. Brebbia and L. C. Wrobel , The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Nonlinear Diffusion Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 65, 147-164, (1987).

[3] J. L. Wearing and M. Sheikh, A Regular Indirect Boundary Element Method for Thermal Analysis , Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 25, 495-515, (1988).

[4] T. J. Martin and G. S. Dulikravich, Inverse Determination of Boundary Conditions and Sources in Steady Heat Conduction with Heat Generation, Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 118, 546-554, (1996).

[5] T. Pasquetti and C. Le Nitliot, Boundary Element Approach for Inverse Heat Conduction Problems: Application to Bidimensional Transient Numerical Experiment, Num. Heat Transfer, Part B, Vol. 20, 169-489, (1991).

[6] D. Lesnic, D. Eliot and D. B. Igham, Application of the Boundary Element Method to Inverse Heat Conduction Problems, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, No. 7, 1503-1517, (1996).

[7] C. Le Niliot, C. Papini and R. Paquetti, Boundary Element Method for Inverse Heat Conduction Problems, In Advanced Computational Methods in Heat Transfer, (Edited by Brebbia, C. A.), 285-295, Springer, New York, (1990).

[8] K, Kuroisz and A. J. Nowak, Boundary Element Approach to Inverse Heat Conduction Problems, Engng. Anal. Bound. Elem., Vol. 10, 291-297, (1992).

[9] D. B. Ingham, Y. Yuan and H. Han, The Boundary Element Method for an Improperly Posed Problem, IMAJ., Appl. Math., Vol. 47, 661-700, (1991).

[10] A. J. Silva Neto and m. N. Ozisik, Simultaneous Estimation of Location and Timewise-Varying Strength of a Plane Heat Source, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 24, 467-477, (1993).

[11] R. G. Hills, M. Raynaud and E. Hensel, Surface Variance Estimates Using and Adjoint Formulation for a One dimensional Nonlinear Inverse Heat Conduction Technique, Numer. Heat Transfer, Vol. 10, 441-461, (1986).

[12] J. Hadamard , Lectures on the Cauchy Problems in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press, New Haven, (1923).

[13] H. V. Beck, B. Blackwell and C. R. ST. Clair, Inverse Heat Conduction, Ill Posed Problems, Wiley Interscience, New York, (1985).

[14] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solution of Ill-Posed Problems, Winston and Sons, Washington D. C., (1977).

[15] J. Beck, Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 13, 703-715, (1970).

[16] O. M. Alifanov, Inverse Heat Transfer Problems, Springer, New York, (1994).

[17] Y. Jarny, M. N. Ozisik and J. P. Bardon, A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, 2911-2919, (1991).

[18] M. N. Ozisik, Heat Conduction, Wiley Interscience, New York, (1985).

[19] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering , Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York and Tokyo, (1984).

[۲۰] قدرت ا... کرمی و محمد رحیم همتیان، تحلیل اجزاء مرزی هدایت گرمای غیرخطی شامل منابع تولید گرمی نقطه ای، خطی و گسترده با انتگرال گیری تحلیلی، مجله استقلال، سال ۱۸،