تعیین تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر در شبکه های صف

محمّد مدرّس یزدی
استاد
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

امیر آذرون
دانشجوی دکترا
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

تعیین کوتاهترین مسیر و تابع توزیع آن در شبکه های صف مبحثی است که کمتر به آن توجه شده است. در این مقاله شبکه جهت داری را بررسی می کنیم که در آن ایستگاه های خدمت دهی وجوددارد و در عین حال زمان طی شاخه ها نیز می تواند متغیر تصادفی باشد. لذا، شبکه صف مورد نظر کلی تر از شبکه جکسون است. مدت زمان خدمت یا مدت زمان طی شاخه ها دارای توزیع عمومی است و در هر ایستگاه نیز یك یا بی نهایت خدمت دهنده می تواند وجود داشته باشد. ورود مشتریان از خارج به ایستگاه های شبکه از فرایند پواسون تبعیت می کند و فرض می شود سیستم دوره پایدار را طی می کند. در روش پیشنهادی شبکه صف به یك زنجیره مارکوف پیوسته تبدیل می شود. سپس، با استفاده از روابط دوره گذرا در این سیستم ها مدلی به دست می آید که تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر از گره ابتدایی به گره انتهایی را از طریق حل یك دستگاه معادلات دیفرانسیل تعیین می کند.

Distribution Function of Shortest Path in Networks of Queue

M. Modarres Yazdi
Professor
Industrial Engineering Department,
Sharif University of Technology

A. Azaron
Ph.D. Student
Industrial Engineering Department,
Tarbiat Modarres University

Abstract

Finding the shortest path and its distribution function in networks of queue has not been extensively studied. In this paper we develop a method for finding the distribution function of the shortest path in directed acyclic networks in which some nodes contain queueing systems with different specifications. The transition times of the arcs are independent random variables with exponential distributions, but the transition times of the arcs that originate from the source node can have general distributions. Therefore this class of networks of queue are generalized version of Jackson networks. In the proposed method each network of queue is transformed to a stochastic network. Then we find the distribution function of the shrotest path from the source node to the sink node in the steady-state. This is done by solving a system of differential equations that is obtained from a related continuous time Markov process.

کلمات کلیدی

صف، شبکه، کوتاهترین مسیر، مدل های احتمالی.

۱ـ مقدمه

در نظریه صف یکی از زمینه هایی که هم به علت نقش کاربردی آن و هم به علت پیچیدگی موضوع مورد توجه محققین قرار گرفته است، مبحث شبکه هاست. شبکه صف مجموعه ای از ایستگاه هاست که مشتری ها جهت دریافت خدمت به آنها مراجعه می نمایند. کاربرد شبکه های صف از آنجا ناشی می شود که در عمل مسائل تولید یا خدمات معمولاً در چارچوب این شبکه ها قرار می گیرند و به ندرت با یک ایستگاه منفرد سر وکار دارند. روابط حاکم بر شبکه ها به طور کلی قوانین احتمالی است و هدف محاسبه طول صف در قسمت های مختلف شبکه و یا مدت زمان انتظار مشتری های مختلف باتوجه به چنین روابطی است. لیکن به علت پیچیدگی موضوع که عمدتاً ناشی از احتمالی بودن روابط حاکم بر سیستم است محاسبات تحلیلی در بسیاری از سیستم ها امکان پذیر نیست و ناچار از روش های شبیه سازی استفاده می شود.

در این مقاله به مسئله کوتاهترین مسیر در یک شبکه که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است، پرداخته می شود. آنچه در ادبیات این مبحث مشاهده می شود در دو زمینه است اول محاسبه معیارهای صف نظیر مدت زمان انتظار مشتری و طول صف و نظایر آن و دوم بهینه سازی و کنترل. لذا با توجه به عدم بررسی مسئله کوتاهترین مسیر در یک شبکه صف به نظر می رسد مطالعه آن می تواند راهگشای تصمیم گیری هایی درمسائل تولید و خدمات شود.

به طور مشخص در این مقاله یک شبکه جهت دار را مورد مطالعه قرار می دهیم که در آن تعدادی ایستگاه خدمت وجود دارد که در شبکه به عنوان گره منظور می گردد. ورود مشتری ها از خارج سیستم به این گره ها براساس فرایند پواسون همگن یا غیر همگن است. زمان طی شاخه ها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع عمومی است. هدف تعیین تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر درگذر مشتریان از چنین شبکه های احتمالی از گره ابتدایی به گره انتهایی است.

مروری بر ادبیات

اگر چه در زمینه پیدا کردن کوتاهترین مسیر در شبکه های صف کارهای زیادی انجام نشده است، ولی در شبکه های قطعی الگوریتم های متعددی ارائه گردیده است که برای بررسی بیشتر می توان به Bazaraa [2] یا Deo & Pang [4] مراجعه کرد. هنگامی که زمان طی شاخه ها متغیرهای تصادفی باشند مسئله به شکل قابل ملاحظه ای پیچیده تر می شود. Martin [9] تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر را تعیین می کند. لیکن، باتوجه به اینکه نتیجه محاسبات به صورت انتگرال های چندگانه به دست می آید، محاسبه عددی حتی برای شبکه های کوچک بسیار دشوار است. Mirchandani [10] نیز روش دیگری برای همین منظور و برای زمان های گسسته معرفی کرد. محاسبه احتمال آنکه زمان کوتاهترین مسیر شبکه از مقدار مشخصی کمتر باشد توسط Frank [5] انجام گردید.

کاری که بیش از همه با این تحقیق مرتبط است محاسبه تابع توزیع کوتاهترین مسیر در شبکه های احتمالی است که توسط Kulkarni [8] انجام شد ولی در آن مقاله زمان طی شاخه ها متغیرهای تصادفی نمائی فرض شده است. این روش توسط Prieditis [11] تعمیم یافت.

از طرف دیگر در راستای نظریه صف جهت محاسبات دوره گذرا کارهای مختلفی در ادبیات وجود دارد. به عنوان نمونه Stern [13] برای سیستم صف M/M/1 این محاسبات را به صورت تعریف و با محدودیت تنها دو ایستگاه موازی انجام داده است. Tipper & Sundareshan [14] نیز برای مدل سازی شبکه های کامپیوتری تحت شرایط گذرا بامعرفی یک دستگاه متناهی از معادلات دیفرانسیل و استفاده از روش های عددی تابع توزیع حالت سیستم را با تعریف به دست می آورند.

در ادامه این مقاله، ابتدا در بخش ۲ قدم های اصلی روش پیشنهادی ارائه می شود. در این روش شبکه ای که دارای ایستگاه های خدمت است، ابتدا به یک شبکه احتمالی و سپس به یک زنجیره مارکوف پیوسته تبدیل می شود. آنگاه، باتوجه به روابط موجود در زنجیره های مارکوفی مدل تعیین تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر در شبکه طراحی می شود. سپس، حالت کلی تری از شبکه های صف را در بخش ۳ مطالعه می کنیم که مدت خدمت یا زمان بین دو ورود به ایستگاه های خدمت متغیرهای تصادفی غیرمارکوفی است. در این بخش

فرایندهای غیرمارکوفی را با استفاده از مفهوم فرایند پواسون غیرهمگن و تابع نرخ شکست به فرایندهای مارکوفی تبدیل می کنیم و با استفاده از خاصیت لحظه ای این فرایند شبکه های کلی را نیز به زنجیره مارکوف پیوسته تبدیل می کنیم. برای تشریح بیشتر روش پیشنهادی، در بخش ۴ مثالی عددی که حالت های مختلف را شامل می شود، عرضه می گردد.

۲ـ چارچوب روش پیشنهادی

شبکه صف مورد نظر در این مقاله در مقایسه با شبکه های متداول حالت کلی تری دارد. به این معنا که نه تنها در گره ها ایستگاه خدمت دهی ایجاد شده است، بلکه زمان طی هر شاخه (رفتن از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر) نیز می تواند متغیری تصادفی باشد. در حالیکه در شبکه های صف معمولاً چنین زمانی را برابر با صفر فرض می کنند. به این ترتیب، طول یک مسیر در شبکه به معنای مجموع زمان طی شده در شاخه ها و گره های آن مسیر است. مدت زمان صرف شده در یک گره (یا در واقع ایستگاه خدمت) مجموع مدت زمان انتظار در صف و دریافت خدمت است. در روش پیشنهادی ما برای تعیین تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر، قدم های زیر برداشته می شود.

قدم ۱ ـ محاسبه زمان انتظار مشتری ها در سیستم برای هر گره با توجه به روابط نظریه صف.

قدم ۲ ـ تبدیل گره ها به شاخه.

قدم ۳ ـ تبدیل شبکه حاصله به یک زنجیره مارکوف پیوسته.

قدم ۴ ـ بررسی روابط گذرا (Transient) در زنجیره مارکوف به دست آمده و ساختن مدلی متشکل از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل که بیان کننده حالت سیستم باشد ودر نهایت حل این دستگاه.

در قدم ۲ به این ترتیب عمل می شود که چنانچه ورودی به ایستگاه صف k شاخه های $b_1, b_2, .., b_n$ و خروجی آن شاخه های $d_1, d_2, .., d_m$ باشند و مدت زمان انتظار در سیستم برای این ایستگاه برابر با T_k فرض شود، آنگاه در شبکه معادل، گره k تبدیل به شاخه k با همان طول T_K می شود در حالی که ابتدا و انتهای این شاخه به ترتیب دو گره معمولی (بدون ایستگاه) 'k و "k قرار دارند. گره 'K بین شاخه های b_i (به ازای i = 1, ..., n) و شاخه k قرار می گیرد. به همین ترتیب گره "K شاخه k را به شاخه های d_j (به ازای j = 1, ..., m) متصل می سازد. (برای توضیح بیشتر در مورد توجیه تبدیل گره به شاخه به Bondy & Murty [3] مراجعه شود.)

۲ـ۱ـ تبدیل یک شبکه نمائی به یک زنجیره مارکوف پیوسته

در این قسمت حالت خاصی را در نظر می گیریم که زمان طی هر شاخه متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. در قسمت های بعدی به تعمیم این امر یعنی نحوه تبدیل شبکه ای که زمان طی برخی شاخه های آن متغیرهای تصادفی با توزیع عمومی باشند می پردازیم. فرض کنید $G = (V, A)$ یک شبکه جهت دار با مجموعه گره های V و مجموعه شاخه های A و در ضمن s و t دو گره ابتدایی و انتهایی آن باشد. زمان طی شاخه $(u, v) \in A$ را که با $L (u, v)$ نشان می دهیم، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر $\lambda (u, v)$ (معکوس میانگین زمان طی شاخه) است.

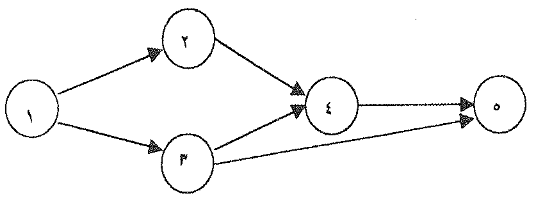
تعریف ۱

به منظور تحلیل فرایند تصادفی $\{X (t), t \geq 0\}$، به ازای هر مجموعه $X \in V$ به طوری که $s \in X$ و $t \in X = V - X$ باشد مجموعه های زیر را تعریف می کنیم.

الف: $X_1 \in X$ مجموعه گره های خارج از مجموعه X است به نحوی که هر مسیری که یک گره این مجموعه را به t (گره پایانی) متصل می سازد، حداقل یک گره از مجموعه X را شامل می شود.

ب: $S (X) = X \cup X_1$

مثال: در شبکه شکل ۱، به ازای $X = \{۱ ، ۲\}$ مجموعه $\overline{X_1} = \varnothing$ و $S (X) = \{۱ ، ۲\}$ است. حال مجموعه $X = \{۱ ، ۴\}$ را در نظر بگیرید. تنها مسیری که گره {۲} را به {۵} متصل می کند از گره {۴} می گذرد، در حالی که برای گره {۳} مسیری وجود دارد که هیچ کدام از گره های X را شامل نمی شود. لذا، $\overline{X_1} = \{۲\}$ و $S (X) = \{۱ ، ۲ ، ۴\}$ خواهد بود.



شکل (۱) شبکه نمونه مربوط به مثال .

تعریف ۲

$$\Omega = \{X \in V : s \in X , t \in \overline{X} , X = S(X)\}$$

$$\Omega^* = \Omega \cup V$$

در مثال فوق {۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱) ، (۴ و ۳ و ۲ و ۱) ، (۴ و ۲ و ۱) ، (۳ و ۲ و ۱) ، (۳ و ۱) ، (۲ و ۱) ، (۱)} = Ω^* است.

برش در شبکه

به ازای هر مجموعه گره‌های X برش زیر را تعریف می‌کنیم.

$$C(X , \overline{X}) = \{ (u, v) \in A : u \in X , v \in \overline{X}\}$$

ثابت می‌شود که یک برش حداقل منحصر به فرد در مجموعه $C(X , \overline{X})$ وجود دارد که آن را با $C(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه زیر نحوه تبدیل یک شبکه احتمالی به زنجیره مارکوف پیوسته را نشان می‌دهد. باتوجه به این که در منابع مختلف و به شکل‌های گوناگون به اثبات این قضیه پرداخته شده است لذا از آن صرفنظر می کنیم. با در نظر گرفتن قراردادهای فوق، برای آشنایی با اثبات این قضیه می‌توان به Kulkarni [8] مراجعه کرد.

قضیه ۱ ـ یک شبکه احتمالی که زمان طی شاخه‌های آن متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی است را می‌توان به یک زنجیره مارکوف زمان پیوسته با فضای حالت Ω^* تبدیل کرد که عناصر ماتریس آهنگ گذار، $q(X, Y)$ یا آهنگ تغییر سیستم از حالت X به Y (با فرض $X, Y \in \Omega^*$) به شرح زیر است.

الف ـ اگر $Y = S(X \cup \{v\})$ باشد آنگاه،

$$q(X, Y) = \sum_{(u, v) \in c(x)} \lambda(u , v)$$

ب ـ اگر $Y = X$ باشد آنگاه،

$$q(X, Y) = - \sum_{(u, v) \in c(x)} \lambda(u , v)$$

ج ـ در غیر این صورت ، $q(X, Y) = 0$ است.

۲ ـ ۲ ـ پیدا کردن کوتاهترین مسیر در زنجیره مارکوف پیوسته

پس از آنکه شبکه به زنجیره مارکوف پیوسته تبدیل شد، لازم است که مقدار T، زمان کوتاهترین مسیر در شبکه باتوجه به حالت اولیه ۱ و حالت نهایی N، را به شرح زیر محاسبه نمود.

$$T = \min \{t > 0 : X(t) = N \mid X(0) = 1\}$$

برای انجام چنین محاسباتی از روابط گذرا در زنجیره مارکوف، معروف به روابط Chapman-Kolmogorov استفاده می‌شود. این روابط به دو صورت پسرو و پیشرو به ترتیب به شرح زیر هستند.

$$P'(t) = Q . P(t)$$

$$P'(t) = P(t) . Q$$

که $P(t)$ معرف بردار حالت سیستم در لحظه t و Q ماتریس آهنگ گذار آن است. هر عنصر بردار $P(t)$ یعنی $p_i(t)$ معرف احتمال تغییر حالت سیستم از i به N در مدت زمان t است. (به مدرس یزدی (۱) یا Gross & Harris [6] مراجعه شود.) به این ترتیب، هدف یافتن $F(t) = P(T \le t)$، تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر در شبکه احتمالی فوق یا به عبارت دیگر، $p_1(t)$، با توجه به رابطه زیر است.

$$F(t) = p_1(t) = P[X(t) = N \mid X(0) = 1]$$

که محاسبات با شروع از $p_N(t) = 1$ و به صورت محاسبات برگشتی انجام می‌شود. به این ترتیب، زمان طی کوتاهترین مسیر در شبکه معادل زمانی است که فرایند تصادفی $\{X(t), t \ge 0\}$ از حالت ۱ شروع و به حالت جاذب نهایی N می‌رسد.

هر کدام از دستگاه معادلات فوق در واقع مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل هستند که برای حل آنها از روش‌های تحلیلی یا عددی استفاده می‌شود. لازم به یادآوری است که اگر چه برای انجام محاسبات کوتاهترین مسیر شبکه در قدم ۴ از روابط گذرا در شبکه صف استفاده می‌شود ولی فرض می‌شود که کل سیستم در دوره پایدار (steady - state) قرار دارد.

به این ترتیب اگر زمان انتظار مشتری در سیستم برای هر ایستگاه متغیر تصادفی با تابع توزیع نمایی

باشد، پس از تبدیل ایستگاه‌ها به شاخه‌ها (قدم ۲ روش کلی)، شبکه حاصل مجموعه‌ای از شاخه‌های نمایی خواهد شد و می توان قضیه ۱ را به طور مستقیم اعمال کرد.

برای تشریح روش کلی پیشنهادی در ادامه این بخش شبکه‌های صفی را بررسی می‌کنیم که مدت زمان خدمت در ایستگاه‌های آن متغیرهای تصادفی با توزیع نمائی باشند و همچنین فرض می‌شود که زمان طی مسافت از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر نیز دارای همین توزیع باشد.

۲-۳- مدل $M/M/\infty$

ساده‌ترین حالت از نقطه نظر تعیین کوتاهترین مسیر، شبکه‌ای است که در گره‌های آن فقط ایستگاه‌های نوع $M/M/\infty$ وجود داشته باشد. البته در این شبکه نیز می توان فرض کرد که زمان طی هر شاخه نیز متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. در این حالت به دلیل این که صفی تشکیل نمی‌شود، زمان انتظار مشتری‌ها در سیستم برابر با مدت زمان دریافت خدمت آنان با توزیع نمایی است. بنابر این می توان به ازای هر گره‌ای که در آن یک ایستگاه صف $M/M/\infty$ با پارامتر μ وجود داشته باشد، یک شاخه با همین نوع توزیع و به شرحی که در کلیات روش گفته شد اضافه کرد. آنگاه با استفاده از قضیه ۱ و معادلات دیفرانسیل دوره گذرا تابع توزیع کوتاهترین مسیر شبکه را تعیین کرد.

۲-۴- مدل $M/M/1$

در این حالت تابع چگالی زمان انتظار مشتری در هر ایستگاه صف $M/M/1$ به شرح زیر است:

$$\omega(t) = (\mu - \lambda)\, e^{-(\mu - \lambda)t}, \quad t > 0$$

که λ و μ به ترتیب برابر آهنگ ورود و خدمت در همان ایستگاه است. لذا توزیع زمان انتظار مشتری در سیستم طبق توزیع نمایی با پارامتر $(\mu-\lambda)$ است. در ضمن برای آنکه سیستم پایدار باشد، لازم است که ضریب بهره وری سیستم کوچکتر از یک یا در واقع $\lambda < \mu$ باشد. (به مدرس یزدی (۱) مراجعه شود).

بنابر این می توان چنین ایستگاهی را با یک شاخه که دارای توزیع نمایی با پارامتر $(\mu-\lambda)$ است، جایگزین کرد و طبق روش کلی پیشنهادی تابع توزیع کوتاهترین مسیر شبکه را تعیین نمود.

۳- شبکه‌های صف با ایستگاه‌های غیرمارکوفی

فرض کنید که زمان طی شاخه‌ای که از گره ابتدایی منشعب می شود متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(t)$ و تابع توزیع $F(t)$ باشد. در این حالت اگر تعداد عبور از این شاخه تا زمان t برابر با $N(t)$ باشد، می‌توان این فرایند را یک فرایند پواسون غیرهمگن تلقی کرد که آهنگ آن $\lambda(t)$ تابعی از زمان است. در این صورت، آهنگ گذر از این شاخه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

به عبارت دیگر، بنا به تعریف فرایند پواسون احتمال گذر از این شاخه در فاصله $[t, t+\Delta t]$، در صورتی که قبلاً عبور نکرده باشند، برابر با $\lambda(t)\,\Delta t$ است چرا که شاخه فوق از لحظه صفر فعال می شود. (به Ross [12] مراجعه شود.)

به این ترتیب با وجودیکه سیستم دیگر مارکوفی نیست، ولی می توان تصور کرد که در هر فاصله کوتاه می توان شبکه را یک سیستم مارکوفی فرض کرد و قوانین دوره گذرا را اعمال نمود. لیکن، باید در نظر داشت که در معادلات دیفرانسیل حاصل پاره‌ای از عناصر ماتریس آهنگ گذار تابعی از t خواهند بود. به عبارت دیگر، ماتریس ضرایب $Q(t)$ در معادلات دیفرانسیل $P'(t) = Q(t)\,P(t)$ غیر ثابت است. در صورتی که این معادلات قابل حل باشد، تابع توزیع زمان طی کوتاهترین مسیر در شبکه را می توان به دست آورد.

۳-۱- شبکه‌های صف با ایستگاه‌های $M/G/\infty$

در این حالت نیز مشتری در صف منتظر نمی ماند ولذا در صورتی که در گره اولیه یک ایستگاه خدمت دهی از این نوع وجود داشته باشد می توان آن را با یک شاخه جایگزین کرد که مدت زمان طی آن برابر با مدت زمان دریافت خدمت است. در این حالت شاخه جدید با توجه به دلیل ذکر شده در بالا دارای آهنگ $\lambda(t)$، برابر با آهنگ خدمت دهی در لحظه t است. لازم به ذکر است با وجودی که تابع توزیع خدمت نمایی نیست، اما مدت زمان بین دو خروج متوالی مشتری‌ها از ایستگاه نمایی است. به عبارت دیگر، فرایند خروج از این ایستگاه نیز فرایندی پواسون است. (برای توضیح بیشتر به Gross & Harris [6] مراجع شود.)

۳ - ۲ - شبکه‌های صف با ایستگاه‌های $M/E_K/1$

در مدل $M/E_K/1$ تابع توزیع زمان انتظار مشتری درسیستم مستقیماً قابل محاسبه نیست و تنها می‌توان تبدیل لاپلاس - استیلتس تابع توزیع زمان انتظار مشتری درسیستم را به دست آورد. بنابر این، برای تحلیل ایستگاه‌های $M/E_K/1$ از تقریب‌های پخشی و باتوجه به فرضیات ترافیک سنگین استفاده می‌شود یعنی آن که ضریب بهره‌وری چنین ایستگاه‌هایی نزدیک به یک باشد. (برای توضیح بیشتر به [6] Gross & Harris یا Klein-rock [7] مراجعه شود.)

قضیه ۲ - ایستگاه خدمت دهی $M/E_K/1$ را می‌توان با تقریب کافی با $K+1$ شاخه سری جایگزین کرد به طوری که پارامترهای آنها به ترتیب برابر با $(-2\gamma)/\sigma^2$ و $\bar{\lambda}, \bar{\lambda}, \dots, \bar{\lambda}$ باشند مشروط بر این که ضریب بهره‌وری ایستگاه به اندازه کافی نزدیک به یک باشد، γ و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در صف در لحظه t و $\bar{\lambda}$ اولین پارامتر توزیع ارلنگ مربوط به خدمت در این ایستگاه است.

اثبات - فرض کنید ضریب بهره‌وری ایستگاه با تقریب کافی نزدیک به یک باشد. میانگین و واریانس زمان انتظار مشتری در صف در لحظه t را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\gamma\, \Delta t = (\lambda\, E(S) - 1)\, \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\sigma^2\, \Delta t = \lambda E(S^2)\, \Delta t + o(\Delta t)$$

که S متغیر تصادفی مدت خدمت و λ آهنگ ورود و $E(S) = 1/\mu$ است. در ضمن برحسب تعریف، $o(t)$ تابعی از t است به طوری که،

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$$

اگر با فرض این که در لحظه صفر زمان انتظار مشتری در صف برابر با X_0 باشد وتابع چگالی زمان انتظار مشتری در صف در لحظه t را با $w_q(X, t | X_0)$ نشان دهیم آنگاه ثابت می‌شود که این کمیت در معادله فوکر - پلانک به صورت زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial w_q(X, t | X_0)}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial w_q(X, t | X_0)}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w_q(X, t | X_0)}{\partial X^2}$$

باتوجه به این که شبکه به حالت پایدار رسیده است و با در نظر گرفتن شرایط حدی زیر،

$$\int_0^\infty w_q(X, t | X_0) = \frac{\lambda}{\mu} \qquad w_q(X, t | X_0) \ge 0$$

می‌توان t در معادله فوق را به سمت بی‌نهایت میل داد و تابع چگالی زمان انتظار مشتری در صف را به صورت معادله دیفرانسیل زیر بیان کرد

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 w_q(X)}{dx^2} - \gamma \frac{dw_q(X)}{dx} = 0$$

این معادله دیفرانسیل از مرتبه دوم با ضرایب ثابت و همگن است. باتوجه به شرایط حدی حالت پایدار $W_q(X) \ge 0$ و همچنین با در نظر گرفتن فرض ترافیک سنگین

$$\int_0^\infty w_q(x)\, dx \cong 1$$

نتیجه می‌شود که

$$w_q(x) = -\frac{2\gamma}{\sigma^2} \exp\left[\frac{2\gamma}{\sigma^2} x\right], \quad x > 0$$

بنابر این تابع چگالی زمان انتظار مشتری درصف در حالت پایدار (باتوجه به تقریب پخشی) نمایی با پارامتر $-2\gamma/\sigma^2$ است. باتوجه به آنکه مدت زمان انتظار مشتری در سیستم مجموع دو زمان انتظار در صف و دریافت خدمت است لذا، تابع توزیع آن نیز برابر با پیچش (Convolution) توابع توزیع این دو کمیت است. براساس فرضیات مسئله و بحث فوق مدت زمان انتظار مشتری در صف متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $-2\gamma/\sigma^2$ است. از طرف دیگر، می‌توان مدت زمان خدمت را نیز به K شاخه نمایی با پارامتر $\bar{\lambda}$ تجزیه کرد.

۳ - ۳ - شبکه‌های صف با ایستگاه‌های G/M/1

در این حالت در هر گره با ایستگاه خدمت دهی G/M/1 با دانستن تابع توزیع زمان بین دو ورود به آن یعنی A (t) ابتدا به پیدا کردن ریشه‌های معادله مشخصه زیر می‌پردازیم.

$$z = \int_0^\infty \exp[-\mu t(1 - z)]\, dA t$$

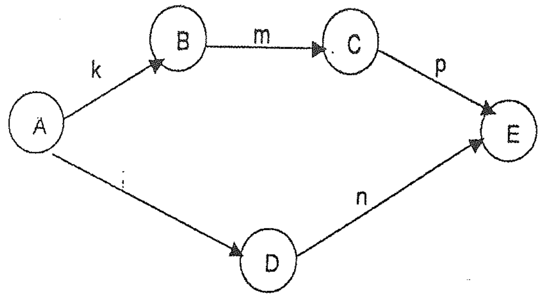
ثابت می‌شود که فقط یکی از ریشه های این معادله عددی بین صفر و یک است که آن را با x_0 نشان می‌دهیم وبا یکی از روش های عددی از قبیل نیوتن ـ رافسون به دست می‌آوریم. تابع چگالی زمان انتظار مشتری درسیستم برای هر ایستگاه صف G/M/1 تابعی از x_0 و به شرح زیر است.

$$w(t) = \mu (1 - x_0) \exp [- \mu (1 - x_0) t] \qquad t > 0$$

که μ آهنگ خدمت درایستگاه است. حال می توان به ازای گره فوق یک شاخه که توزیع زمان طی آن نمایی با پارامتر $\mu (1 - x_0)$ باشد قرار داد و از روش کلی پیشنهادی جهت تعیین تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر اقدام کرد.

٤ ـ مثال

کوتاهترین مسیر شبکه صف شکل ۲ با پنج گره و پنج شاخه و با در نظر گرفتن مفروضات زیر تعیین کنید. هدف یافتن تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر از گره A به گره Eاست.



شکل (۲) شبکه اصلی با چهار ایستگاه صف.

۱ ـ مراجعین از خارج تنها به گره A طبق فرایند پواسون با میانگین $\lambda = ۰/۹۸$ نفر در ساعت مراجعه می‌کنند.

۲ ـ زمان‌های طی شاخه‌های k و l و m و p برابر با صفر است لیکن زمان طی شاخه n متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۳ است.

۳ ـ در گره A مشتری با احتمال یکسان هر کدام از شاخه‌های k یا l را انتخاب می کند.

۴ ـ جدول ۱ وضعیت ایستگاه‌ها را نشان می‌دهد. در گره E ایستگاه خدمت‌دهی وجود ندارد.

جدول (۱) مشخصات ایستگاه های سرویس دهی.

گره	تابع توزیع خدمت	تعداد خدمت دهنده	پارامترهای توزیع
A	وایبل (Weibull)	∞	$(\alpha, \beta) = (1, 2)$
B	ارلانگ (Erlang)	۱	$(\mu_B, \kappa) = (1, 2)$
C	نمائی	۱	$\mu_c = 4$
D	نمائی	۱	$\mu_D = 2$

حل: باتوجه به فرض ۳ به طور میانگین نصف مشتری‌هایی که از گره A خارج می‌شوند به ایستگاه B می روند. به این ترتیب آهنگ ورود این ایستگاه برابر با ۰/۴۹ است و لذا ضریب بهره‌وری در ایستگاه $M/E_2/1$ مستقر در گره B برابر است با، ۱ ≅ ۰/۹۸ =۲(۰/۴۹)= ρ_B لذا از فرض ترافیک سنگین تبعیت می نماید و می‌توان از تقریب پخشی برای تحلیل زمان انتظار در صف ایستگاه مزبور استفاده کرد. باتوجه به فرض ترافیک سنگین $C(t)$، تابع توزیع فواصل زمانی مابین دو عزیمت متوالی از گره B تقریباً برابر با $B(t)$ تابع توزیع زمان خدمت در ایستگاه $M/E_2/1$ است. (برای توضیح بیشتر به Gross & Harris [6] مراجعه شود.)

باتوجه به آنکه گره C تنها از طریق شاخه m با گره B ارتباط دارد می‌توان $C(t)$ را به عنوان $A(t)$ یعنی تابع توزیع فواصل زمانی مابین دو ورود به گره C در نظر گرفت در این صورت روابط زیر نتیجه می شود،

$A(t) = C(t)$ و $C(t) \cong B(t)$ و لذا نتیجه می‌شود که $A(t) \cong B(t)$

اکنون لازم است x_0، تنها ریشه بین صفر و یک

معادله زیر را به دست آورد.

$$z = \int_{0}^{\infty} e^{-4(1-Z)t}\, t\, e^{-t}\, dt$$

با حل معادله فوق به کمک روش نیوتون ـ رافسون خواهیم داشت: $x_0 = ۰/۰۴۲۹$.

اکنون هر گره‌ای که در آن یک ایستگاه خدمت‌دهی وجود دارد را با شاخه‌ای تعویض می‌کنیم که زمان طی آن برابر با زمان انتظار در سیستم برای همان ایستگاه باشد که به این ترتیب، شبکه اصلی صف به شبکه احتمالی (غیر صف) شکل ۳ تبدیل می‌شود.

ایستگاه خدمت‌دهی $M/G/\infty$ در گره A که دارای توزیع وایبل با نرخ شکست $\lambda(t) = 2t$ است با شاخه a جایگزین می‌گردد. از طرف دیگر کل زمان انتظار در ایستگاه B که دارای صفی از نوع $M/E_2/1$ است از دو متغیر تصادفی زمان انتظار در صف و مدت دریافت خدمت تشکیل شده است که اولی براساس فرض ترافیک سنگین دارای توزیع نمایی و دومی دارای توزیع ارلانگ است. متغیر تصادفی اول، زمان انتظار در صف این ایستگاه که در شکل ۳ با شاخه b_1 نشان داده شده است دارای توزیع نمایی است و پارامتر آن به شرح زیر محاسبه می‌شود.

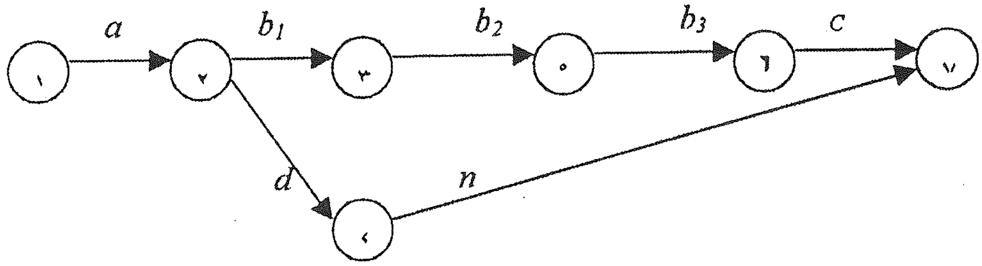
$$\gamma = \frac{\lambda}{2} E(S) - 1 = 0.49 \times 2 - 1 = -0.02$$

$$\sigma^2 = \frac{\lambda}{2} E(s^2) = 0.49\,(Var(s) + (E(s))^2) = 0.49 \times (2+4) = 2.94$$

و

$$\lambda(b_1) = -\frac{2\gamma}{\sigma^2} = 0.0136$$

متغیر تصادفی دوم یعنی مدت خدمت در ایستگاه B دارای توزیع ارلانگ (با دو مرحله) است. لذا، این متغیر نیز با دو شاخه سری، هر دو با توزیع نمایی جایگزین می‌شود. در شبکه شکل ۳ این شاخه‌ها با b_2 و b_3 نشان داده شده اند. پارامترهای هر دو شاخه برابر با ۱ است.



شکل (۳) شبکه احتمالی جایگزین با شبکه اصلی.

شاخه نمایی c مشخص کننده زمان انتظار در سیستم در باجه $G/M/1$ مستقر در گره C و پارامتر آن برابر است با،

$\lambda(c) = \mu_c\,(1-x_0) = ۴ \times (۱ - ۰/۰۴۲۹) = ۳/۸۲۸۴$

به همین ترتیب، زمان طی شاخه n نمایی با پارامتر ۳ = $\lambda(n)$ معرف زمان طی شاخه n در شبکه اولیه و شاخه نمایی d با پارامتر $\lambda(d) = (\mu_D - \lambda/2) = ۲ - ۰/۴۹ = ۱/۵۱$ بیانگر زمان انتظار در سیستم در ایستگاه $M/M/1$ در ایستگاه D است.

در شبکه شکل ۳ گره‌ها فاقد ایستگاه هستند و مدت زمان گذر از آنها برابر با صفر است. هدف یافتن تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر از گره {۱} به گره {۷} است.

فرایند تصادفی $\{X(t), t \geq 0\}$ دارای ۱۰ حالت، به ترتیب از ۱ تا ۱۰ به شرح زیر است.

$\Omega^* = \{(1), (1,2), (1,2,4), (1,2,3), (1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,3,4,5), (1,2,3,5,6), (1,2,3,4,5,6), (1,2,3,4,5,6,7)\}$

بنابر این، ماتریس آهنگ گذار $Q(t)$ دارای ده حالت، به تعداد عناصر مجموعه Ω^* خواهد بود. پارامتر های شاخه‌ها به شرح زیر است.

$\lambda(a) = 2t$
$\lambda(b_1) = 0.014$
$\lambda(b_2) = 1$
$\lambda(b_3) = 1$
$\lambda(c) = 3.83$
$\lambda(d) = 1.51$
$\lambda(n) = 3$

به این ترتیب، پس از جایگذاری مقادیر پارامترها،

State	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-2t	2t								
2		-1.52	1.51	.01						
3			-3.01		.01					3
4				-2.51	1.51	1				
5					-4		1			3
6						-2.51	1.51	1		
7							-4		1	3
8								-5.33	1.51	3.82
9									-6.82	6.82
10										

ماتریس آهنگ گذار Q (t) مربوط به زنجیره مارکوف پیوسته حاصل به شرح زیر در می‌آید:

سپس، دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با ضرایب غیر ثابت زیر را به صورت برگشتی حل می نماییم.

$$P'_{10}(t) = 0$$
$$P'_9(t) = -6.8284\, P_9(t) + 6.828\, P_{10}(t)$$
$$P'_8(t) = -5.3384\, P_8(t) + 1.51\, P_9(t) + 3.8284\, P_{10}(t)$$
$$P'_7(t) = -4\, P_7(t) + P_9(t) + 3P_{10}(t)$$
$$P'_6(t) = -2.51\, P_6(t) + 1.51\, P_7(t) + P_8(t)$$
$$P'_5(t) = -4\, P_5(t) + P_7(t) + 3P_{10}(t)$$
$$P'_4(t) = -2.51\, P_4(t) + 1.51\, P_5(t) + P_6(t)$$
$$P'_3(t) = -3.0136\, P_3(t) + 0.0136\, P_5(t) + 3\, P_{10}(t)$$
$$P'_2(t) = -1.5236\, P_2(t) + 1.51\, P_3(t) + 0.0136\, P_4(t)$$
$$P'_1(t) = -2t\, P_1(t) + 2t\, P_2(t)$$

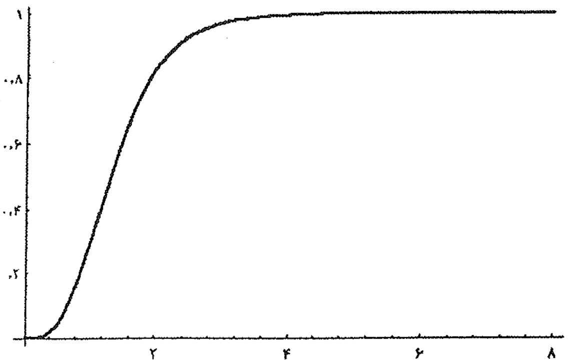
باتوجه به شرایط حدی $p_i(0) = 0$ به ازای $1 \le i \le 9$ و همچنین $p_{10}(0) = 1$ ، در نهایت $F(t) = P_1(t)$ به شکل زیر به دست می‌آید.

$$F(t) = \exp[-t^2] \int_0^t 2\, s \exp[s^2] - 0.001s \exp[s^2$$
$$6.83s] - 0.038s^2 \exp[s^2 - 4s]$$
$$-.073\, s \exp[s^2 - 4s] + 2.1s \exp[s^2 - 3.01s] + 0.004s$$
$$\exp[s^2 - 5/34s]$$
$$+ 0.057s^2 \exp[s^2 - 2.52s] + 0.125\, s \exp[s^2 - 2.521s]$$
$$- 4.15s \exp[s^2 - 1.5236]\, ds$$

میانگین زمان کوتاهترین مسیر در شبکه صف فوق از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu = \int_0^\infty [1 - F(t)]\, dt$$

با استفاده از نرم افزار Mathematica مقدار $\mu = ۱/۴۳۷۰$ به دست می‌آید. همچنین با استفاده از نرم‌افزار فوق شکل تقریبی تابع توزیع F (t) در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل (۴) منحنی تابع توزیع زمان کوتاهترین مسیر شبکه شکل ۲.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی تحلیلی جهت تعیین تابع توزیع کوتاهترین مسیر در شبکه های صف ارائه گردید. طول شاخه های شبکه نیز می تواند احتمالی باشد. برای این منظور از نظریه فرایندهای تصادفی، نظریه صف و همچنین شبکه ها در قدم های مختلف الگوریتم استفاده می‌شود. در روش پیشنهادی شبکه صف ابتدا به یک شبکه احتمالی و سپس به یک زنجیره مارکوف پیوسته تبدیل می‌شود و با استفاده از روابط حاکم بر دوره گذرای زنجیره های مارکوف مدل تعیین تابع توزیع کوتاهترین مسیر ساخته می‌شود. این مدل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است.

چنانچه زمان خدمت و همچنین مدت طی شاخه ها

متغیرهای تصادفی نمایی باشند با مدل ساده تری سر و کار داریم که زنجیره مارکوفی آن همگن و دستگاه معادلات آن دارای ضرایب ثابت است. لیکن، در حالتی که هر کدام از متغیرهای تصادفی فوق عمومی باشند زنجیره مارکوف پیوسته‌ای که به دست می‌آید از نوع غیر همگن است و معادلات دیفرانسیل به دست آمده نیز دارای ضرایب غیر ثابت خواهند بود.

روش پیشنهادی از جهات متعددی از جمله مدل‌های تصمیم‌گیری یا تعیین تابع توزیع زمان بلندترین مسیر قابل توسعه است.

مراجع

[۱] محمد مدرس یزدی، نظریه صف، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰.

[2]Bazaraa, M. and J. Jarvis, and H. Sherali , Linear Programming and Network Flows, 2nd edition, John Wiley (1990).

[3] Bondy, J. and U. Murty, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co., Inc (1976).

[4] Deo, N. and C. Pang, "Shortest Path Algorithms: Taxonomy and Annotation", Networks 14 (1984) 275-323.

[5] Frank, H. "Shortest Paths in Probabilistic Graphs", Operations Res. 17 (1969) 583-599.

[6] Gross, C. and H. Harris, Fundamentals of Queueing Theory, 2nd edition, John Wiley (1985).

[7] Kleinrock, L., Queueing Systems Volume 2: Computer Applications, John Wiley (1975).

[8] Kulkarni. V. "Shortest Paths in Networks with Exponentially Distributed Arc Lengths", Networks 16 (1986) 255-274.

[9] Martin, J. "Distribution of the Time Through a Directed Acyclic Networks", Operations Res. 13 (1965) 46-66.

[10] Mirchandani, P. "Shortest Distance and Reliability of Probabilistic Networks," Computer & Operations Res. 3 (1976) 347-355.

[11] Prieditis, A. and R. Davis, "The Expected Length of a Shortest Path", Information Processing Letters 46 (1993) 135-141.

[12] Ross, S. Stochastic Process, 2nd edition, John Wiley (1996).

[13] Stern, T. "Approximations of Queue Dynamics and Their Application to Adaptive Routing in Computer Communications Networks", IEEE Trans. On Communications 27 (1979) 1331-1335.

[14] Tipper , D. and M. Sundareshan, "Numerical Methods for Modeling Computer Networks Under Nonstationary Conditions", IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 8 (1990) 1982-1695.