

تحلیل غیرخطی محیط های سازه ای دوبعدی با استفاده از روش اجزای مرزی بدون نیاز به انتگرال گیری دامنه

جعفر عسگری مارنانی
دانشجوی دکتری

علی کمک پناه
استادیار

دانشکده فنی و مهندسی، گروه عمران، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

یکی از قوی ترین روش های عددی در تحلیل سازه ها، روش اجزای مرزی (BEM) است. این روش به خاطر تنها نیاز به المان بندی مرز محیط مورد بررسی در تحلیل مسایل با رفتار الاستیک از مزیت بسیار بالایی نسبت به دیگر روش های عددی برخوردار می باشد. کارآیی روش اجزای مرزی در تحلیل سیستم های با رفتار الاستوپلاستیک، به علت ظهور تنش های پلاستیک و ایجاد انتگرال های حجمی ناشی از آنها در فرمول بندی مسأله، به شدت کاسته می گردد چرا که در آن، علیرغم پیچیدگی حاکم بر فرمول بندی روش تحلیل، به المان بندی دامنه به منظور محاسبه انتگرال های روی دامنه نیاز است. در این مقاله به منظور رهایی از این مشکل، به ارزیابی روشی مبتنی بر تکنیک انتگرال گیری ویژه پرداخته شده است که در آن جهت تحلیل مسایل الاستوپلاستیک، مشابه حالت الاستیک تنها نیاز به گسسته سازی مرز دامنه مورد بررسی بوده و دیگر نیازی به المان بندی داخل محیط نمی باشد. مثال های تحلیل شده در انتها، کارآیی و دقت این روش را نشان می دهد.

Non - Linear Analysis of Two-Dimensional Problems by Boundary Element Method Without Domain Integrals

A. Komak Panah
Assistant Professor

J. Asgari Marnani
Ph. D. Student

Tarbiat Modarres University,
Civil Engineering Department

Abstract

One of the more powerful methods of structural analysis is the Boundary Element Method (BEM). Especially for elastic structures, this method specific merits over other numerical methods since only the boundary must be discretized. However, under more severe loading of ductile structures, plastic stresses occur in the plastic zones and the non-linear BEM analysis requires the evaluation of domain integrals. The latter, in turn, destroys the high efficiency of BEM. To get rid of the domain elements, this representation is investigation a version of the "Particular Integral Method" for plane stress or plane strain problems. Only boundary integrals have to be considered. Several examples illustrate the efficiency of that method.

Banerjee در سال ۱۹۸۸ همراه با Henry، [۸] به تشریح مدلی تحت عنوان «روش انتگرال گیری ویژه» مبادرت نمود که در آن معادلات دیفرانسیل غیرهمکن، که معادله حاکم بر محیط با رفتار غیرخطی در تحلیل سازه‌ها نیز از آن جمله است، بدون نیاز به المان بندی دامنه قابل تحلیل است. در این مقاله به استفاده و بسط روش مذکور در تحلیل محیط‌های دوبعدی تحت رفتار الاستوپلاستیک مصالح اقدام شده که در آن بدون نیاز به المان بندی داخل دامنه مورد نظر و تنها با گسسته سازی مرز آن، می‌توان سیستم را در رفتار الاستوپلاستیک تحلیل نمود.

فرمول بندی روش

معادلات انتگرالی حاکم بر یک محیط با دامنه Ω و مرز Γ ، تحت رفتار الاستوپلاستیک را می‌توان به شرح زیر بیان داشت، [۹]:

$$C_{ij} \dot{u}_j = \int_{\Gamma} U_{ij}^* \dot{p}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{jk}^p d\Omega \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma} U_{ijk}^* \dot{p}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ijk}^* \dot{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{kl}^p + g_{ij} (\dot{\sigma}_{kl}^p) \quad (2)$$

به طوری که U^* ، P^* و ε^* عبارتند از حل‌های اساسی مربوط به تحلیل تنش در روش‌های اجزای مرزی و g_{ij} تابعی است که در اثر سینگولاریتی انتگرال روی دامنه در معادله (۲)، حاصل شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، اثرات تنش‌های افزایش پلاستیک σ^p به صورت انتگرال‌های حجمی در فرمول بندی ظاهر شده که روش برطرف کردن این انتگرال‌ها در ادامه تشریح می‌شود.

معادله دیفرانسیل حاکم بر یک محیط با رفتار الاستوپلاستیک را به شرح زیر داریم:

$$\mu \dot{u}_{i,jz} + \frac{\mu}{1-2\nu} \dot{u}_{z,jz} = \dot{\sigma}_{ij,z}^p \quad (3)$$

این همان معادله ناویه است که در آن μ مدول برشی سیستم، ν ضریب پواسن، u_i مقدار افزایش تغییر مکان و

تحلیل مسایل غیرخطی با استفاده از روش‌های اجزای مرزی برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ تحت عنوان فرمول بندی تحلیل الاستوپلاستیک در روش اجزای مرزی توسط Swedlow و Cruse مطرح شده [۱]. در سال ۱۹۷۳ Riccardella الگوریتم حل عددی محیط‌های دوبعدی را براساس روابط پیشنهادی آنان ارائه کرد، [۲]، که روش کاملاً موفقی نبود. سپس Mendelson و Albers، [۳]، در سال ۱۹۷۵ به اصلاح الگوریتم مربوطه پرداختند که راه حل پیشنهادی آنها مبتنی بر روابط کرنش اولیه بود. Mukherjee و Kumar در سال ۱۹۷۷، [۴] الگوریتم ساده تری برای تحلیل پلاستیک مسایل با تقارن محوری مثل استوانه و گوه ارائه نمودند که در آن فرمول بندی قبلی با استفاده از اصل تقارن بسیار ساده تر شده بود. Banerjee با همکاری دو نفر دیگر به نام‌های Cathie و Davies در سال ۱۹۷۹، [۵]، مسائل با رفتار الاستوپلاستیک کامل و همچنین با رفتار سخت شونده و نرم شونده را براساس توزیع روش تنش اولیه مورد تحلیل قرار داد به طوری که کارهای او در این زمینه نقطه عطفی در تحلیل مسائل الاستوپلاستیک، به روش اجزای مرزی شد.

در سال ۱۹۸۱ Brebbia و Telles، [۶]، مدلی کامل تر از تحلیل غیرخطی در روش اجزای مرزی ارائه نمودند که به راحتی قابل برنامه نویسی بود. در این مدل تحلیل غیرخطی، کرنش‌های کل به دو جزء کرنش‌های الاستیک و پلاستیک تفکیک شده و سپس یا با منظور داشتن کرنش‌های پلاستیک به صورت یک سری کرنش‌های اولیه و یا با وارد کردن کرنش‌های پلاستیک در فرمول بندی تنش و منظور داشتن اثرات آنها به صورت تنش‌های اولیه، سیستم تحت رفتار غیرخطی مصالح به صورت گام به گام تا مرحله شکست نهایی مورد تحلیل قرار می‌گرفت.

در این مدل‌های ارائه شده روی رفتار غیرخطی، از آنجا که نیاز به المان بندی داخل دامنه مورد بررسی لازم می‌باشد، از مزیت اصلی استفاده از روش اجزای مرزی نسبت به دیگر روش‌های عددی به شدت کاسته شده است. در طی سال‌های اخیر جهت برطرف کردن این مشکل شاخه‌های جدیدی در تحلیل غیرخطی روش اجزای مرزی گشوده شده است، [۷]، که تاکنون هیچیک از آنها نتوانسته‌اند صد در صد کارا و جوابگوی تمامی حالات مختلف باشند.

در این روابط C_{ijkl} معرف ماتریس سختی سیستم n و بردار نرمال و به سمت خارج وارد بر مرز سیستم مورد بررسی می باشند. با جایگذاری u^2_i از رابطه (۹) در معادله (۵) مقدار بردار گالرکین G_i را بر حسب تنش های افزایشی پلاستیک σ^p_{ij} به دست خواهیم آورد:

$$\dot{G}_i = \frac{1}{1-\nu} \dot{\sigma}^p_{ij,j} \quad (11)$$

با اختیار تابع تنش های پلاستیک به صورت یک تانسور مرتبه دوم h_{ij} مطابق زیر:

$$\dot{h}_{ij,mmnn} = \dot{\sigma}^p_{ij} \quad (12)$$

بردار گالرکین به دست آمده در رابطه (۱۱) را به شرح زیر بر حسب آن خواهیم داشت:

$$\dot{G}_i = \frac{1}{1-\nu} \dot{h}_{ij,j} \quad (13)$$

اگر بردار G_i در رابطه اخیر را در رابطه (۹) جایگذاری کنیم، تغییر مکان های افزایشی حل قسمت خصوصی مطابق رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{u}^2_i = \frac{1}{\mu} \dot{h}_{ij,ikk} - \frac{1}{2\mu(1-\nu)} \dot{h}_{im,iml} \quad (14)$$

باتوجه به نتایج تحلیلی به دست آمده در بسیاری از مسائل سازه ای، h_{ij} را می توان به صورت یک تابع رشته ای مشابه رابطه زیر بیان داشت:

$$\dot{h}_{ij}(x) = \sum_{n=1}^N F(x, \xi_n) \dot{\phi}_{im}(\xi_n) \quad (15)$$

در این رابطه ϕ_{im} عبارت است از تابع دانسیته تنش های فرضی و $F(x, \xi_n)$ معرف یک تابع شکل مناسب می باشد. همچنین متغیرهای x و ξ به ترتیب معرف مفروض و نقطه مورد بررسی در دامنه بوده و N تعداد نقاط مورد بررسی است که مقدار آن بستگی به دقت لازم و پیچیدگی محیط بررسی دارد.

برای تعیین تابع شکل $F(x, \xi_n)$ ، توابع زیادی چون لگاریتمی، نمایی (اکسپوننشال)، سینوسی و کوسینوسی، چند جمله ای و همچنین ترکیبی از آنها مورد بررسی قرار گرفت که بهترین کاندید برای آن در تحلیل مسائل تنش ای یک تابع دوجمله ای به شرح زیر به

σ^p_{ij} به عنوان مقدار افزایش تنش پلاستیک می باشند (علامت نقطه در بالای متغیرها معرف مقدار افزایش آنها است). اگر چنانچه حل این معادله دیفرانسیل ناهمگن را به صورت جمع دو قسمت حل عمومی معادله دیفرانسیل همگن u^1_i و حل خصوصی u^2_i در نظر بگیریم:

$$\mu \dot{u}^1_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu} \dot{u}^1_{j,ij} = 0 \quad (4)$$

$$\mu \dot{u}^2_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu} \dot{u}^2_{j,ij} = \dot{\sigma}^p_{ij,j} \quad (5)$$

در آن صورت مقادیر واقعی افزایش تغییر مکان u_i ، بارگذاری p_i و تنش های کل σ_{ij} را بر طبق روابط زیر خواهیم داشت:

$$\dot{u}_i = \dot{u}^1_i + \dot{u}^2_i, \quad \dot{p}_i = \dot{p}^1_i + \dot{p}^2_i, \quad \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}^1_{ij} + \dot{\sigma}^2_{ij} \quad (6)$$

دستگاه معادلات مبتنی بر قسمت جواب خصوصی مسأله، مطابق رابطه (۴) به فرم ماتریسی زیر در روش اجزای مرزی به دست می آیند:

$$H_c \dot{U}^1 = G_c \dot{P}^1 \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}^1 = D_c \dot{P}^1 - S_c \dot{U}^1 \quad (8)$$

در این روابط U^1 و P^1 به ترتیب بردارهای افزایشی تغییر مکان و بارگذاری در قسمت حل عمومی سیستم، H_c و G_c ماتریس های ضریب در معادله مرزی، مطابق رابطه (۱) و D_c و S_c ماتریس های ضرایب معادلات تنشی، مطابق رابطه (۲) می باشند.

برای جواب خصوصی مسأله، مطابق رابطه (۵) با استفاده از بردار گالرکین G_i می توان نوشت:

$$\dot{u}^2_i = \frac{1-\nu}{\mu} \dot{G}_{i,kk} - \frac{1}{2\mu} \dot{G}_{k,ki} \quad (9)$$

در آن صورت مقادیر افزایش کرنش ϵ^2_{ij} ، تنش σ^2_{ij} و بارگذاری p^2_i به شرح روابط زیر قابل تعیین هستند:

$$\dot{\epsilon}^2_{ij} = 1/2(\dot{u}^2_{ij} + \dot{u}^2_{ji}), \quad \dot{\sigma}_{ij} = \dot{C}_{ijkl} \dot{\epsilon}^2_{kl} + \dot{\sigma}^p_{ij}, \quad \dot{p}^2_i = \dot{\sigma}^2_{ij} n_j \quad (10)$$

بردارهای افزایشی تغییر مکان، بارگذاری، تنش کل و تنش پلاستیک در قسمت حل خصوصی سیستم می‌باشند. ϕ نیز معرف بردار دانسیته تنش های افزایشی فرضی است که اگر آن را از رابطه اول در (۲۰) به دست آورده و در سه رابطه دیگر جایگذاری کنیم، مقادیر مربوط به جواب خصوصی بر حسب تنش های افزایشی پلاستیک σ^p به شرح زیر به دست می‌آیند:

$$\dot{U}^2 = D_p Q_p^{-1} \dot{\sigma}^p, \quad \dot{P}^2 = T_p Q_p^{-1} \dot{\sigma}^p, \quad \dot{\sigma}^2 = S_p Q_p^{-1} \dot{\sigma}^p \quad (21)$$

سیستم معادلات

بر اساس روابط (۷) و (۸) به دست آمده از قسمت حل عمومی معادله و جایگذاری مقادیر U^1, P^1, σ^1 از روابط بیان شده در (۶)، خواهیم داشت:

$$G_c (\dot{P} - \dot{P}^2) - H_c (\dot{U} - \dot{U}^2) = 0 \quad (22)$$

$$\sigma = D_c (\dot{P} - \dot{P}^2) - S_c (\dot{U} - \dot{U}^2) + \dot{\sigma}^2 \quad (23)$$

با مرتب کردن دو رابطه اخیر و جایگذاری مقادیر قسمت حل خصوصی مطابق روابط بیان شده در (۲۱)، دسته معادلات حاکم بر سیستم را به شرح زیر به دست خواهیم آورد:

$$G_c \dot{P} - H_c \dot{U} + B_{dt} \dot{\sigma}^p = 0 \quad (24)$$

$$\dot{\sigma} = D_c \dot{P} - S_c \dot{U} + B_s \dot{\sigma}^p \quad (25)$$

که در آنها

$$B_{dt} = (H_c D_p - G_c T_p) Q_p^{-1} \quad (26)$$

$$B_s = (S_c D_p - D_c T_p + S_p) Q_p^{-1} \quad (27)$$

در نهایت با مرتب کردن معادلات (۲۴) و (۲۵) بر حسب مقادیر معلوم Y و مقادیر مجهول X ، دستگاه معادلات سیستم به دست می‌آید:

$$A_h \dot{X} = A_g \dot{Y} + B_{dt} \dot{\sigma}^p \quad (28)$$

$$F(x, \xi_n) = a_4 r^4 - a_5 r^5 \quad (16)$$

به طوری که r فاصله بین نقطه مفروض x و نقطه مورد بررسی ξ بوده و ضرایب a_4 و a_5 مقادیر ثابتی هستند که بسته به خصوصیات مقاومت مصالحی سیستم مورد بررسی به دست می‌آیند.

با جایگذاری h_{ij} از رابطه (۱۵) در (۱۲)، تابع تنش های افزایشی پلاستیک را مطابق رابطه زیر خواهیم داشت:

$$\dot{\sigma}_{ij}^p = \sum_{n=1}^N q(x, \xi_n) \dot{\phi}_{im}(\xi_n) \quad (17)$$

که با منظور داشتن تابع $F(x, \xi_n)$ مطابق رابطه (۱۶)، تابع $q(x, \xi_n)$ به صورت تابعی خطی بر حسب r حاصل می‌شود.

$$q(x, \xi_n) = (64 a_4 - 225 a_5 r) \quad (18)$$

همچنین با جایگذاری تابع h_{ij} از رابطه (۱۵) در (۱۴) و ترکیب نتیجه حاصل با معادلات تعریف شده در (۱۰) خواهیم داشت:

$$\dot{u}_i^2 = \sum_{n=1}^N d_{im1}(x, \xi_n) \dot{\phi}_{m1}(\xi_n)$$

$$\dot{p}_i^2 = \sum_{n=1}^N t_{im1}(x, \xi_n) \dot{\phi}_{m1}(\xi_n)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^2 = \sum_{n=1}^N S_{ijm1}(x, \xi_n) \dot{\phi}_{m1}(\xi_n) \quad (19)$$

بر اساس تابع شکل $F(x, \xi_n)$ تعریف شده در رابطه (۱۶)، توابع $d_{im1}(x, \xi_n)$ ، $t_{im1}(x, \xi_n)$ و $S_{ijm1}(x, \xi_n)$ نیز به دست می‌آیند که در ضمیمه آورده شده‌اند. با اعمال این توابع بر روی کلیه نقاط مورد بررسی در دامنه، دسته روابط کلی سیستم به فرم ماتریسی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{\sigma}^p = Q_p \dot{\phi}, \quad \dot{U}^2 = D_p \dot{\phi}, \quad \dot{P}^2 = T_p \dot{\phi}, \quad \dot{\sigma}^2 = S_p \dot{\phi} \quad (20)$$

در معادلات اخیر، U^2, P^2, σ^2 و σ^p به ترتیب معرف

$$\sigma = A'_h \dot{X} - A'_g \dot{Y} + B_s \dot{\sigma}^p \quad (29)$$

دستگاه معادلات اخیر به صورت یک روش افزایشی - تکراری قابل تحلیل می باشد. بدین طریق که تحلیل دامنه مورد بررسی گام به گام با افزایش مرحله ای بارگذاری و تا مرحله شکست نهایی سیستم به پیش خواهد رفت. لازم به ذکر است برای تعریف نقاط داخل دامنه که تعداد آنها بستگی به دقت مورد نظر و میزان پیچیدگی مسأله دارد، نیازی به ایجاد نقاطی علاوه بر گره های مرزی نیست چرا که با استفاده از تکنیک های عددی در ایجاد نقاط داخل یک دامنه [۱۰]، می توان این کار را توسط خود برنامه انجام داد. لذا با تعریف گره های مرزی به تنهایی می توان تحلیل پلاستیک را انجام داد درست همانگونه که در تحلیل الاستیک عمل می شود.

پارامترهای ویژه

نکته قابل توجه در این روش تعیین پارامترهای ویژه B_0 و A_0 و b_0 در تعریف توابع $d_{iml}(X, \xi_n)$ ، $t_{iml}(X, \xi_n)$ و $S_{ijml}(X, \xi_n)$ که در ضمیمه آورده شده اند، می باشد. برای تعیین این ضرایب، که بستگی به توزیع تنش پلاستیک در دامنه مورد بررسی دارند، لازم است تابع توزیع تنش های افزایشی را داشت. از آنجا که تنش های پلاستیک تابعی از خصوصیات مصالح، بارگذاری و نوع سیستم مورد بررسی می باشند، لذا این ضرایب نیز تابعی از این ویژگی ها خواهند بود.

در بسیاری از مسائل تابع تنش پلاستیک مشخص نیست، لذا براساس نتایج به دست آمده از دیگر روش های عددی چون اجزای محدود یا اجزای مرزی همراه با المان های حجمی، این ضرایب را به روش سعی و خطا می توان به دست آورد. بدین صورت که در ابتدا مقدار واحد برای هر یک از آنها اختیار کرده و سیستم را تحلیل می کنیم. سپس با مقایسه نتایج حاصل از تحلیل انجام گرفته با نتایج موجود، کنترل می کنیم که آیا اختلاف حاصل قابل ملاحظه است یا خیر. در صورتی که اختلاف زیاد باشد با تغییر این ضرایب در راستای نزدیک شدن به نتایج موجود تحلیل را آنقدر تکرار می کنیم تا به بهترین مقدار لازم برای هر یک از این پارامترهای ویژه دست یابیم.

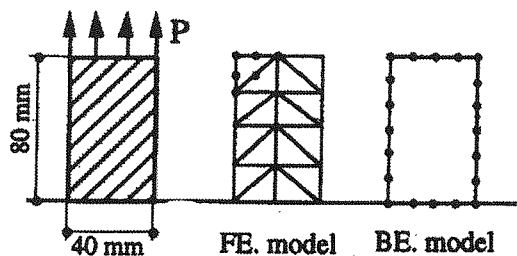
در صورتی که نتایجی از تحلیل سیستم مورد نظر در دست نداشته باشیم، این پارامترها را می توان براساس اندازه گیری های روی نمونه آزمایشگاهی و یا برخی از

نقاط کنترل قابل حصول به روش های تحلیلی مثل حداکثر بارپذیری سیستم و یا شیب منحنی تسلیم به دست آورد (تحقیق در این زمینه در حال انجام است). همچنین با تغییر یکی از خصوصیات مقاومت مصالحی محیط مورد بررسی، مثل پارامتر کار سختی و یا ضریب پواسن، می توان هر یک از این ضرایب ویژه را به صورت تابعی بر حسب آنها به دست آورد. در ادامه ضمن ارائه مثال هایی نمونه، پارامترهای ویژه تعیین شده برای آنها نیز آورده شده است.

مسائل نمونه

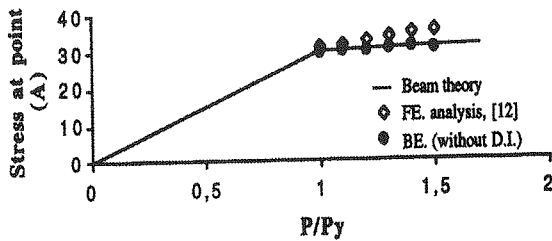
صفحه نازک: اولین مثال یک صفحه نازک چهارگوشه است. شکل این صفحه و مشخصات مقاومت مصالحی آن در تصویر (۱) مشاهده می گردد. منحنی نیرو - تغییر مکان به دست آمده از تحلیل آن با استفاده از روش اجزای محدود، [۱۱] و روش توسعه داده شده در تصویر (۲) آورده شده است. برای این مسأله (با نسبت طول به عرض ۲ به ۱) برحسب تغییرات پارامتر کارسختی، H/E پارامترهای ویژه به شرح زیر تعیین شده اند.

$$b_0 = 0.1975 + 0.675H/E, A_0 = 0.0125, B_0 = 1.0$$

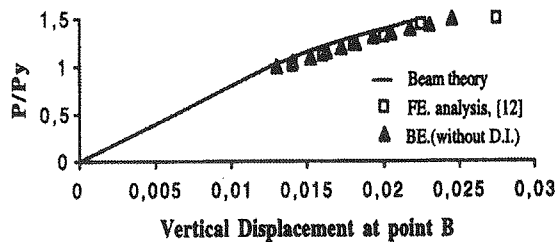


شکل (۱) صفحه نازک تحت بار صفحه ای یکنواخت P
 $E = 7000 \text{ dN/mm}^2, \sigma_y = 30 \text{ dN/mm}^2,$
 $\nu = 0.33, t = 1 \text{ mm}$

همانگونه که در شکل (۲) مشاهده می گردد، تغییر شکل های پلاستیک در تراز بار $P_y = 30 \text{ dN/mm}$ (معادل نیروی اعمالی $F_y = 1200 \text{ dN}$) مطابق با تغییر مکان قائم $0.243 / \text{میلیمتر}$ شروع می شود. نکته قابل توجه در تحلیل این مسأله این است که وقتی مقدار H صفر فرض می شود (رفتار الاستوپلاستیک کامل) برنامه در اولین گام افزایش بار همگرا نمی شود و این نشانگر این است



شکل (۳) تغییرات تنش نرمال در نقطه A برحسب بارگذاری P_y . عبارت است از مقدار بار اعمالی به سیستم در آستانه ایجاد تغییر شکل های پلاستیک.

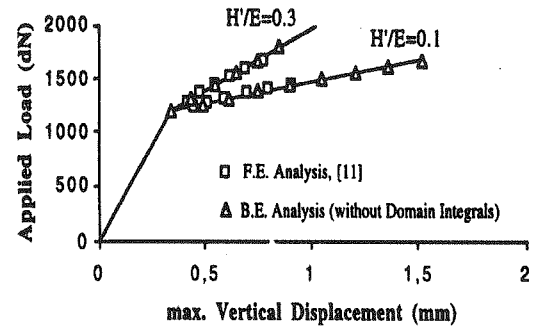


شکل (۵) منحنی تغییر شکل قائم سیستم در نقطه B برحسب بارگذاری P_y . عبارت است از مقدار بار اعمالی به سیستم در آستانه ایجاد تغییر شکل های پلاستیک.

صفحه شیاردار - این مسأله به لحاظ ویژگی های خاص خود در نحوه شروع و توزیع تنش های پلاستیک یکی از عمومی ترین و مهمترین مسائل در تحلیل الاستوپلاستیک مصالح به شمار می آید. در تصویر (۶) شکل این صفحه شیاردار تحت اعمال نیروی یکنواخت P و همچنین خصوصیات مقاومت مصالحی آن دیده می شود و همانگونه که ملاحظه می گردد به لحاظ تقارن حاکم بر این سیستم تنها یک چهارم آن مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل (۷) مقادیر نیرو - تغییر مکان منتج از تحلیل سیستم با استفاده از روش توسعه یافته انتگرال گیری ویژه، با مقادیر حاصل از تحلیل براساس روش های اجزای محدود و همچنین روش های اجزای مرزی شامل انتگرال های دامنه (DI)، [۱۳]، مشاهده می شود. همانگونه که ملاحظه می شود این سیستم در دو حالت رفتار کرنش مسطح و رفتار تنش مسطح، مدل و تحلیل شده است.

برای این مسأله با رفتار الاستوپلاستیک کامل، پارامترهای ویژه بر حسب تابعی از ضریب پواسن ν به شرح زیر محاسبه شده است:

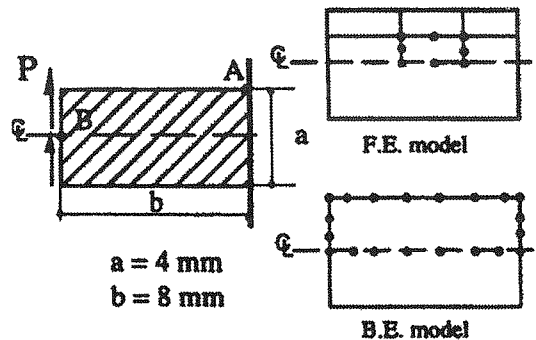
که منحنی نیرو - تغییر مکان از محل تسلیم سیستم، به صورت یک خط افقی درآمده است.



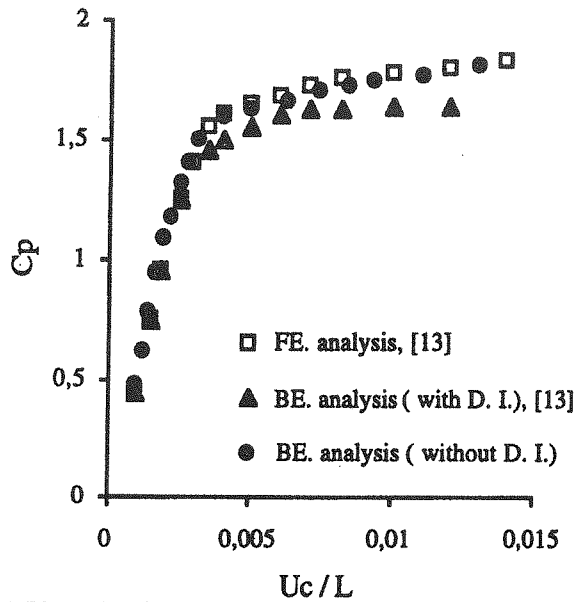
شکل (۲) منحنی های نیرو - تغییر مکان صفحه نازک، برای دو مقدار پارامتر کار سختی H'/E .

تیر عمیق - یک تیر عمیق طره ای با رفتار تنش مسطح که شکل و خصوصیات مقاومت مصالحی آن در تصویر (۳) آورده شده است را به عنوان دومین مثال داریم. در تصویرهای (۴) و (۵) نتایج حاصل از تحلیل این سیستم به وسیله روش انتگرال گیری ویژه (بدون نیاز به المان بندی دامنه) با مقادیر به دست آمده به وسیله روش اجزای محدود [۱۲] مقایسه شده است. برای این مسأله، پارامترهای ویژه به صورت زیر به دست آمده است:

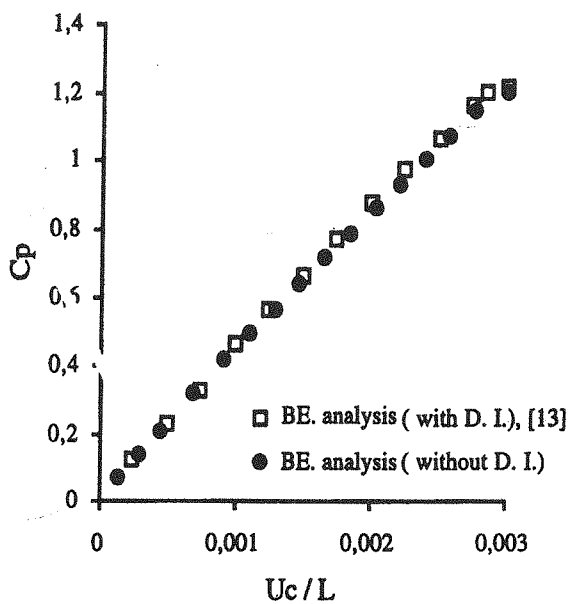
$$b_0 = 0.8, A_0 = 0.1, B_0 = 1.175$$



شکل (۳) تیر عمیق طره ای تحت بار یکنواخت P اعمالی بر لبه آزاد آن.
 $E = 21000 \text{ dN/mm}^2, \sigma_y = 30 \text{ dN/mm}^2,$
 $\nu = 0.3, H'/E = 0.1, t = 1 \text{ mm}$



a) Plane Strain



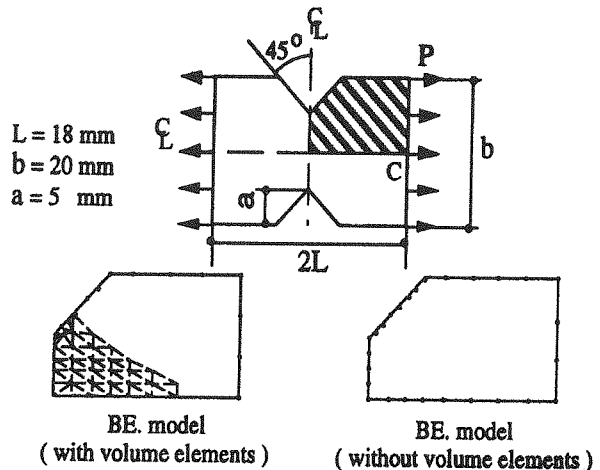
b) Plane Stress

شکل (۷) منحنی نیرو - تغییر مکان در نقطه C برای صفحه شیاردار،
 $(C_p = 2P/\sigma_y)$

نتیجه گیری

باتوجه به نتایج حاصل از تحلیل سازه ها براساس روش مبتنی بر انتگرال گیری ویژه، که تشریح شد، نه تنها زمان محاسبات به میزان قابل توجهی نسبت به دیگر روش های عددی کاهش می یابد، بلکه به لحاظ یک سری

$b_0 = 1.5 - 3v$, $A_0 = 15.25 - 94.5v$, $B_0 = 3-9v$
 این مقادیر برای حالت کرنش مسطح بیان شده و در حالت تنش مسطح لازم است ضریب پواسن ν را با مقدار $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ جایگذاری کرد.



شکل (۶) صفحه شیاردار و دو مدل مبتنی بر روش های اجزای مرزی
 $(E = 7000 \text{ dN/mm}^2$, $\sigma_y = 24.3 \text{ dN/mm}^2$,
 $\nu = 0.2$, $H' = 0)$

همانگونه که در تصویر (۷) مشخص شده در مدل کرنش مسطح، شکست سیستم در تراز بارگذاری در روش تحلیل مبتنی بر اجزای محدود و در مقدار $2p/\sigma_y = 1/85$ در روش تحلیل مبتنی بر اجزای مرزی شامل انتگرال های دامنه روی می دهد، [۱۳] و این در حالی است که در روش توسعه یافته، شکست در سطح بار $2p/\sigma_y = 1/80.4$ اتفاق می افتد. در مدل تنش مسطح (شکل ۷) شکست سیستم در فاصله تغییرات عبارت $2p/\sigma_y$ بین $1/19$ تا $1/23$ در روش تحلیل مبتنی بر اجزای محدود اتفاق می افتد، [۱۳]، که در روش توسعه یافته اجزای مرزی بدون انتگرال های دامنه، شکست در سطح بار $2p/\sigma_y = 1/20.6$ رخ داده است.

همچنین شروع و توسعه تنش های پلاستیک از محل لبه داخلی شیاردار اتفاق می افتد که تمامی اینها به عنوان نقاط کنترل علاوه بر منحنی های موجود از تحلیل، در حصول دقیق پارامترهای ویژه بسیار حایز اهمیت می باشند. لازم به توضیح است که پارامترهای ویژه تنها یک بار برای یک سیستم معین می شود و برای ابعاد، نوع و مقدار بارگذاری مختلف بلا تغییر می باشند.

$$+ (f_5/r^3) r_i r_m r_l r_j n_j\}} \quad (A2)$$

$$S_{ijm11}(x, \zeta_n) = B_0 \{ (e_2 + f_2 r) \delta_{jm} \delta_{jl} + (e_3 + f_3 r) \delta_{ij} \delta_{im} + (e_4 + f_4 r) \delta_{im} \delta_{jl} + (f_1/r) (r_i r_j \delta_{ml} + r_j r_m \delta_{il} + r_i r_m \delta_{lj}) + (f_2/r) (r_i r_l \delta_{jm} + r_j r_l \delta_{im}) + (f_3/r) r_m r_l \delta_{ij} + (f_5/r^3) r_i r_j r_m r_l \}$$

(A3)

به طوری که

$$\begin{aligned} A_0 &= g(a_4, a_5, \text{kind of loading}), B_0 = f(a_4, a_5, \\ r_i &= x_i - (x, \zeta_n) \text{ kind of loading}, b_0 = a_5 / a_4 \\ d_1 &= -8 / 2\mu (1 - \nu) \\ d_2 &= 15b_0 / 2\mu (1 - \nu) \\ d_3 &= d_1 + 32/\mu \\ d_4 &= d_2 - 72b_0 / \mu \\ e_1 &= 2\mu d_1 \\ e_2 &= (d_1 + d_3) \mu \\ e_3 &= e_1 + 2\mu\nu (3d_1 + d_3) / (1 - 2\nu) \\ e_4 &= e_2 - 64 \\ f_1 &= 2\mu d_2 \\ f_2 &= (d_2 + d_4) \mu \\ f_3 &= f_1 + 2\mu\nu (4d_2 + d_4) / (1 - 2\nu) \\ f_4 &= f_2 + 225b_0 \\ f_5 &= -f_1 \end{aligned}$$

این روابط برای حالت کرنش صفحه ای نوشته شده و در حالت استفاده در روابط تنش صفحه ای لازم است ضریب پواسن ν یا مقدار $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu}$ جایگذاری شود.

- [1] Swedlow, J. L., Cruse, T. A., "Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow", Int. J. Solids Structures, Vol. 7, 1673-1681, (1971).
- [2] Riccardella, P.C., "An implementation of the boundary integral technique for planar problems of elasticity and elastoplasticity", Report No. SM-73-10 Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon University, Pittsburg, (1973).

مزیت هایی که در زیر اشاره ای به آنها می شود، از دقت به مراتب بالاتری نیز برخوردار است. از جمله مهمترین ویژگی های این روش عبارتند از:

- عدم نیاز به المان بندی دامنه، در صورتی که نقاط داخل محیط توسط خود برنامه تعیین شوند، لزومی به تعریف نقاط داخل دامنه هم نمی باشد.
- سرعت بالا، در مقایسه با روش تحلیل مبتنی بر انتگرال های دامنه این روش نیاز به زمان محاسبه به مراتب کمتری دارد.
- دقت زیاد، به علت محاسبه نسبتاً دقیق جواب قسمت خصوصی معادله دیفرانسیل حاکم، روش از دقت بالایی برخوردار است.
- عدم نیاز به المان با درجه آزادی بالا در اطراف گره های با تمرکز تنش در داخل دامنه مورد بررسی.

ضمیمه

با جایگذاری تابع $F(x, \zeta_n)$ از رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵) و محاسبه $h_{ij}(x)$ و به دنبال آن جایگذاری تابع $h_{ij}(x)$ در رابطه (۱۴) و محاسبه u_i^2 و با توجه به تعریف توابع p_i^2 و σ_{ij}^2 در رابطه (۱۰)، توابع $t_{im1}(x, \zeta_n)$ ، $d_{im1}(x, \zeta_n)$ و $S_{ijm1}(x, \zeta_n)$ (که در روابط تعریف شده در (۱۹) به کار رفته اند) به شرح معادلات زیر به دست خواهند آمد.

$$d_{im1}(x, \zeta_n) = A_0 \{ (d_1 + d_2 r) (r_i \delta_{ml} + r_m \delta_{il}) + (d_3 + d_4 r) r_l \delta_{im} + (d_2/r) r_i r_m r_l \}$$

(A1)

$$t_{im1}(x, \zeta_n) = B_0 \{ (e_2 + f_2 r) \delta_{il} n_m + (e_3 + f_3 r) \delta_{im} n_l + (e_4 + f_4 r) \delta_{im} n_i + (f_1/r) (n_j r_j r_i \delta_{ml} + n_j r_j r_m \delta_{il} + r_i r_m n_l) + (f_2/r) (n_j r_j r_l \delta_{im} + r_l r_l n_m) + (f_3/r) r_m r_l n_i \}$$

مراجع

- [3] Mendelson, A., Albers, L. U., "Application of boundary integral equations to elasto-plastic problems, in boundary integral equation method", Computational Applications in Applied Mechanics (T. A. Cruse and F. J. Rizzo, Eds.) ASME, New York, 47-84, (1975).
- [4] Kumar, V., Mukherjee, S., "A boundary integral equation formulation for time-dependent inelastic deformation in metals", Int. J. Mech. Sci.,

- Vol. 19, 713-724, (1977).
- [5] Banerjee, P.K., Cathie, D.N., Davies, T. G., "Two and three-dimensional problems of elasto-plasticity", *Developments in Boundary Element Methods I*, Applied Science Publishers, London, 65-95, (1979).
- [6] Tells, J. C. F., Brebbia, C.A., "The boundary element in plasticity", *Appl. Math. Modelling* Vol. 5, 275-281, (1981).
- [7] Atluri, S.N., Zhu, T.L., "A new meshless local perov-galerkin approach to nonlinear problems in computers modelling and simulation", *Computer Modelling and Simulation in Engng.*, Vol. 3, No. 3, 187-196, (1998).
- [8] Henry, D.P., Banerjee, P. K., "A new BEM formulation for two-and three-dimensional elasto-plasticity using partucular integrals", *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 26, 2079-2096, (1988).
- [9] Banerjee, P. K., "The boundary element methods in engineering" McGraw-Hill Book Company, (1994).
- [10] Shaw, R. D., Pitchen, G. R., "Modifications to the Suhara-Fukuda method of network generation", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol. 12, 93-99, (1978).
- [11] Kalev, I., Gluck, J., "Elasto-plastic finite element analysis", *Int. J. Num. Meth. engng.*, Vol. 11, 875-881, (1977).
- [12] Valliappan, S., Boonalauaohr, P. Lee, I.K., "Non-linear analysis for anisotropic materials", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, 597-606, (1976).
- [13] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, (1984).