

# تحلیل جریان فلز در نورد گرم صفحه و ورق با بکارگیری عملگر ماتریسی در ساخت میدان پلاستیک خطوط لغزش

محمود سلیمی

استادیار

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

صابر محمدی

مربی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی

## چکیده

در این مقاله روش عملگر ماتریسی<sup>۱</sup> در حل میدان خطوط لغزش<sup>۲</sup> کرنش صفحه ای برای استخراج یک میدان عمومی خطوط لغزش و هیدوگراف مربوطه در نورد گرم ورق ارائه گردیده است. به کمک میدان خطوط لغزش و هیدوگراف به دست آمده، توزیع کرنش و جریان مواد در مقطع با استفاده از کار لازم برای عبور واحد حجم موادی که در موقعیت های مختلف از ناحیه پلاستیکی عبور می کنند محاسبه شده است.

## *Metal Flow Analysis in Hot Rolling of Plate and Strip Using Matrix Operator Method For Constructing Plastic Slip Line Field*

M. Salimi

Assistant Professor

Mechanical Engineering Department,  
Isfahan University of Technology

S. Mohammadi

Lecturer

Mechanical Engineering Department,  
Razi University

## Abstract

*In this paper matrix operator method in solving plane strain slip line field to obtain a general slip line field and the corresponding hodograph for hot rolling of strip is used. Using the slip line field and the corresponding hodograph, metal flow and strain distribution is obtained by applying the required input work per unit volume of material crossing the plastic region at different position.*

یکی از مهمترین فرآیندهای شکل دهی نورد گرم می باشد و مسائل مربوط به آن در صنعت اهمیت ویژه ای دارد. شکل و مرز پلاستیکی در این فرآیند به وسیله شرایط مرزی سرعت معین می شود و شرط حالت یکنواخت تقریب خوبی از فرآیند پیوسته را ارائه می کند. سرعت مستقل از زمان بوده و توزیع تنش از لحاظ استاتیکی نامعین می باشد. در نورد گرم نرخ کار سختی و نرخ نرم شدن حرارتی قابل مقایسه بوده و یکدیگر را تا حدودی جبران می کنند. از این رو عموماً در هر قفسه تنش جریان تغییرات زیادی نمی کند.

با وجود اینکه در سال های اخیر روش های محاسباتی جدید و سریع تری برای تحلیل تغییر شکل مواد بوجود آمده است، استفاده از تئوری خطوط لغزش به دلیل ارائه درک بهتر از فیزیک مسئله اهمیت خود را از دست نداده است. اگرچه در این تئوری با فرضیات محدود کننده ای مانند فرض کاملاً صلب - پلاستیک بودن مواد در محاسبات روبرو هستیم و از اینرسی مواد صرف نظر می شود، نتایجی که براساس این تئوری ارائه می گردد، اطلاعات بسیار مفیدی برای طراحان در این زمینه را فراهم می آورد که از روش های دیگر قابل حصول نیست.

اطلاعات نسبتاً کاملی در زمینه تئوری میدان خطوط لغزش با مراجعه به منابع [۱] تا [۴] قابل دسترسی می باشد. نخستین میدان خطوط لغزش برای نورد گرم صفحه در حالت متقارن با روش ترسیمی توسط الکساندر [۵] به کمک تکنیک ترسیمی پراگر<sup>۲</sup> بدست آمده است. همچنین چیتکارا<sup>۴</sup> و جانسون<sup>۵</sup> با همین روش میدان ساده تری از خطوط لغزش را ارائه کرده اند [۳].

در سال ۱۹۶۷ اوئینگ<sup>۶</sup> روش سری توانی را برای ساختن میدان های خط لغزش بیان کرد [۶] که با استفاده از آن دیورست<sup>۷</sup> و کالین<sup>۸</sup> روش عملگر ماتریس را ایجاد نمودند. دیورست، کالین و جانسون میدان خطوط لغزش برای نورد گرم در حالت متقارن را با استفاده از عملگرهای ماتریسی و فرض پوشش کامل سطح تماس به وسیله ناحیه صلب به دست آورده اند [۷]. حل مسئله فوق در حالت نامتقارن نیز توسط کالین و دیورست [۸] ارائه گردیده است.

تحقیقات در زمینه خطوط لغزش در گذشته عموماً به حالت دائم و کرنش صفحه ای محدود می شد اما در سال های اخیر جنبه های دیگر نیز مورد کنکاش بوده

است به عنوان مثال در دهه ۱۹۹۰ در زمینه ساخت میدان خطوط لغزش در فرآیندهای متقارن محوری نیز کوشش هایی به عمل آمده است [۴] و همچنین مکانیزم و سینتیک گذاری تغییر شکل به کمک خطوط لغزش توسط بابرو [۹] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

از آنجا که نورد گرم یک فرآیند نوع غیرمستقیم می باشد، میدان خطوط لغزش از ابتدا معین نمی باشد. با فرض ایجاد شرایط مرزی مناسب، نتایج به دست آمده از فرمول های ریاضی یا روش عملگرهای ماتریسی و استفاده از نتایج تجربی می توان میدان خطوط لغزش را به دست آورد.

روش عملگر ماتریسی برای تعیین میدان خط لغزش و هدو گراف در نورد گرم متقارن، هندسه نورد، گشتاور، نیروی جدایش غلتک ها و زاویه تماس در کاهش ضخامت مشخصی توسط محققین مختلف به کار گرفته شده است. ولی اطلاعات کافی در زمینه توزیع کرنش در نورد گرم در دسترس نیست.

در این مقاله هدف به دست آوردن توزیع کرنش در مقطع می باشد. اما از آنجا که این توزیع مبتنی بر تعیین خطوط لغزش و هدوگراف در فرآیند است خلاصه ای از روش تعیین خطوط لغزش و هدوگراف ارائه می شود، تا علاوه بر توزیع کرنش، نیرو و گشتاور غلتک ها به دست آید.

به طور کلی تحلیل میدان خط لغزش برای نورد گرم در این تحقیق طبق مراحل و محدودیت های زیر انجام گرفته است:

الف) یک هسته مواد صلب (ناحیه مرده<sup>۹</sup>) کل سطح تماس غلتک را می پوشانند، به عبارتی تنش های مماسی حداکثر مساوی تنش برشی مواد فرض شده و شرایط چسبندگی بین سطح تماس مواد و غلطک در نظر گرفته می شود.

ب) خطوط لغزش منحنی شکل در ورود و خروج که بر مبنای معادلات پراگر در اصل این خطوط منحنی های یک سیکلوئیدی هستند، وجود دارند ولی برای سادگی در مراحل اولیه به صورت کمان دایره ای در نظر گرفته می شوند.

ج) در ورود به ناحیه تغییر شکل، تغییر شکل پلاستیکی به صورت پیوسته در نظر گرفته می شود، اما در خروج از ناحیه تغییر شکل (خط لغزش خروجی) امکان ناپیوستگی سرعت وجود دارد.

د) در صورت عدم وجود کشش از جلو یا عقب، شرط تعادل ایجاب می‌کند که برآیند نیروها روی خط لغزش ورودی و همچنین روی خط لغزش خروجی به سمت چپ و راست صفر باشد.

باتوجه به شرایط فوق میدان خطوط لغزش مورد بحث میدان ساده شده‌ای است که یک حد بالایی را برای مسئله ارائه می‌کند. تفاوت حل کامل خطوط لغزش توسط تارنوسکی [۱۲] و گرین و الکساندر [۱۳] در ضریب شکل‌های مورد بحث  $0 < h/l < 0.2$  تفاوت در ناحیه پلاستیک خروجی است. الکساندر [۵] به وسیله سعی و خطا با سازگاری بین میدان خطوط لغزش و هیدوگراف منحنی خط لغزش خروجی را به دست آورده است اما ما در این تحلیل آن را کمائی از دایره فرض می‌کنیم که در هر دو حالت این منحنی در نقطه خروجی بر سطح غلتک‌ها مماس می‌باشد. الکساندر نشان داد که حل فقط با خط لغزش منحنی در طرف ورود به ناحیه پلاستیک ممکن می‌باشد بنابراین این خطوط مجاور خط لغزش ورودی نیز منحنی می‌باشند.

## فرموله کردن مسئله با استفاده از عملگرهای ماتریسی

روش عمومی حل به کمک عملگر ماتریسی به شرح زیر است:

- ۱- ترسیم یک میدان خط لغزش تقریبی
  - ۲- محاسبه بردار ستونی برای هر خط لغزش مرزی در میدان به کمک عملگرهای ماتریسی که در جهت‌های اصلی به طور همزمان تعیین شده باشند.
  - ۳- محاسبه یا تعیین شعاع انحناء هر خط لغزش و مختصات همه نقاط میدان.
  - ۴- ارضاء کلیه شرایط مرزی.
- راه ساده‌ای برای اطمینان یافتن از سازگاری میدان خط لغزش فرض شده با شرایط مرزی شرکت دادن دیاگرام بردار سرعت در ساختن میدان خط لغزش است. میدان‌های خط لغزش که به طور سینماتیکی میدان‌های سرعت قابل قبولی تشکیل می‌دهند حل‌های حد بالا هستند. سرعت‌های ناحیه‌های صلب نیز باید با شرایط مرزی مسئله سازگاری داشته باشد حتی اگر تنش‌ها در ناحیه صلب نیز بررسی نشوند.

چون در فرآیند نورد هیچ خط لغزش اولیه‌ای و تصویر آن در هیدوگراف مشخص نیست باتوجه به شرایط فیزیکی مسئله به صورت تقریبی خط لغزش

ورودی اولیه از نقطه ورودی A (نقطه منفرد تنش) شکل (۱) خارج شده و با زاویه  $45^\circ$  محور تقارن در نقطه C را قطع می‌کند ترسیم می‌شود. برد زاویه‌ای این خط  $\theta$  در نظر گرفته می‌شود. این خط لغزش ورودی محدوده فن را مشخص می‌نماید. به کمک استفاده از روش‌های بیان شده توسط HILL [۹] و [۱۰] با فرض اینکه زاویه فن مرکزی  $\psi$  و خط لغزش خروجی به صورت کمائی از دایره با شعاع  $(1 + \sqrt{2/2})h_0$  است که در نقطه خروجی بر سطح غلتک مماس می‌باشد، فن مزبور گسترش می‌یابد.

روش مورد استفاده برای گسترش فن به صورتی است که خطوط در نقاط گرهی متعامد می‌باشند. برای این منظور خطوط لغزش را ادامه داده و در بین راه چنان می‌شکنیم که زاویه آنها در گره بعدی همان زاویه خط لغزش باشد. به عنوان مثال اگر میدان فن به کمان‌های  $\frac{\psi}{4}$  تقسیم شود، برای تعیین نقطه گرهی N در شکل ۲- الف خطی از نقطه F با شیب  $(\pi/4 - \psi/4)$  - یعنی در امتداد مماس خط لغزش AF در نقطه F رسم می‌شود. این خط سپس در بین راه شکسته شده و با شیب  $45^\circ$  ادامه می‌یابد تا محور تقارن را در نقطه N قطع کند محل نقاط دیگر شبکه با روش مشابه تعیین می‌شود در این صورت میدان فن مرکزی تا نقطه D گسترش می‌یابد قبل از تعیین هر نقطه، شیب خطوط لغزش در آن نقطه با توجه به قضیه اول هنکی<sup>۱</sup> محاسبه می‌شود، به عنوان مثال در نقطه L شیب خط لغزش GL به صورت زیر محاسبه می‌شود. با توجه به شبکه منحنی الخط GFNL رابطه زیر را برای شیب خطوط لغزش در نقاط شبکه داریم:

$$\varphi_G - \varphi_F = \varphi_L - \varphi_N$$

در این رابطه مقادیر زوایای  $\varphi_G$ ،  $\varphi_F$ ،  $\varphi_N$  و  $\varphi_L$  معلوم و فقط  $\varphi_L$  زاویه مجهول می‌باشد در نهایت خط لغزش خروجی از نقطه D با زاویه  $45^\circ$  نسبت به محور تقارن خارج شده و در نقطه E بر سطح غلتک مماس می‌شود.

برای رسم هیدوگراف یک المان را که از نقاط مختلف ناحیه پلاستیکی عبور می‌کند در نظر می‌گیریم هنگام عبور المان از هر خط لغزش، مؤلفه مماسی سرعت تغییر کرده ولی مؤلفه عمودی آن بدون تغییر می‌ماند (شرط حجم ثابت). برای رسم هیدوگراف نقط شروع مناسب سرعت ورودی  $u$  و خروجی  $v_{out} = \frac{h_i}{h_0} u$  می‌باشد. باتوجه به تقارن جریان سرعت ذرات روی محور تقارن باید موازی با محور افقی باشد بنابراین بردار سرعت

$$X_{CB} = Q_{\theta\psi} X_{AB} \quad (1)$$

$$X_{DB} = T^{-1}_{\psi} Q_{\theta\psi} X_{AB} \quad (2)$$

$Q_{\theta\psi}$  عملگر ماتریسی است که در تعیین بردار شعاعی خط لغزش از خانواده دیگر باتوجه به خط لغزش پایه به کار گرفته می شود. عملگر  $T^{-1}_{\psi}$  بردار شعاعی خط لغزش مجهول طرف محذب خط لغزش پایه را معرفی می کند. بنابراین اگر سرعت زاویه ای غلطک  $\omega$  باشد، بردار شعاعی ستونی منحنی  $db$  در هدوگراف عبارتست از:

$$X_{db} = \omega T^{-1}_{\psi} Q_{\theta\psi} X_{AB} \quad (3)$$

به طوری که  $X_{cb}$  به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$X_{cb} = T^{-1}_{\psi} (\omega T^{-1}_{\psi} Q_{\theta\psi} X_{AB} + \rho C) \quad (4)$$

که  $\rho$  اندازه ناپیوستگی سرعت بین ناحیه پلاستیک و صلب مربوطه می باشد و  $C$  بردار واحد دایره ای می باشد.

$$C = [1, 0, \dots]^T \quad \text{و یا}$$

از آنجا که ناحیه صلب  $ABDE$  با سرعت زاویه ای  $\omega$  همراه با غلطک دوران می کند تصویر  $ABDE$  در دیاگرام هدوگراف  $abde$  و به صورت هندسی مشابه، اما در جهت  $\omega$  به اندازه  $90^\circ$  دوران کرده است. خط لغزش خروجی  $DE$  و تصویرش در هدوگراف  $de$  هر دو کمان های دایره ای می باشند که به ترتیب دارای شعاع انحنا  $\rho/\omega$  و  $\rho$  می باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$X_{ab} = \omega X_{AB}$$

$$X_{ab'} = \omega X_{AB} - \rho C \quad (5)$$

$$X_{cb'} = Q^{-1}_{\psi\theta} (\omega X_{ab} - \rho C) \quad (6)$$

که  $Q^{-1}_{\psi\theta}$  ماتریس معکوس عملگر ماتریسی  $Q_{\psi\theta}$  می باشد. با حذف  $X_{cb'}$  بین معادلات ۴ و ۶ معادله زیر برای  $X_{AB}$  به دست می آید.

نقاطی نظیر  $C, D, P, M, N$  در امتداد  $oo'$  (شکل ۲ ب) بوجود می آید. سطح تماس غلتک خط جریان ذرات در تماس با آن می باشد و تمامی این ذرات روی سطح تماس باید سرعتی مماس با سطح غلتک داشته باشد. بنابر این تصویر سطح تماس غلتک در هدوگراف به طور هندسی مشابه بوده و در جهت سرعت زاویه ای  $\omega$  به اندازه  $90^\circ$  چرخیده است و فقط اندازه آن به وسیله فاکتور اندازه  $\omega$  تغییر می کند. همچنین گستره زاویه آن برابر با زاویه تماس غلتک می باشد.

چون ناحیه مواد چسبنده به صورت جسم صلب دوران می کند، مرزهای  $ABD$  و  $DE$  در هدوگراف به صورت هندسی به ترتیب به صورت منحنی های مشابه  $abd$  و  $de$  نقش می شوند، که به اندازه  $90^\circ$  درجه در جهت دوران غلتک چرخیده اند. بنابر این منحنی  $de$  کمان دایره ای با شعاع  $\omega.r$  برابر اندازه ناپیوستگی سرعت روی خط لغزش خروجی می باشد. برد زاویه ای هر خط لغزش و تصویر آن در هدوگراف یکسان است.

در این مسئله از تغییر شکل الاستیکی غلتک ها صرف نظر شده است و در ناحیه  $ABDC$  (ناحیه پلاستیکی) مواد به صورت پیوسته تغییر شکل می یابند و ناپیوستگی در سرعت مماسی روی منحنی  $ABDE$  تحمیل می شود. همچنین چون سرعت محیطی غلطک  $\omega.R$  می باشد بنابر این سرعت خروج فلز نورد شده برابر با  $V_{out} = (\omega.R + r)$  است که شعاع غلتک ها و  $r$  شعاع خط لغزش خروجی می باشد. به این صورت میدان خط لغزش و هدوگراف مربوطه برای نورد گرم به صورت تقریبی به دست می آید. با استفاده از روش عملگر ماتریسی یک سیستم معادلات جبر خطی پیچیده برحسب پارامترهای  $\psi, \theta, \rho$  و  $\omega$  حاصل می شود. با دو زاویه  $\psi$  و  $\theta$  میدان خط لغزش به طور کامل تعیین می شود. نیرو و گشتاور غلتک با انتگرال گیری عددی به موازات مرز  $ABDE$  محاسبه می شوند.

(لازم به ذکر است که موقعیت نقاط نظیر  $c$  و زوایای  $\psi, \theta$  و انحنا خطوط در ابتدا تقریبی می باشد و بعداً با ارضاء شدن شرایط مرزی سرعت و نیروها در نرم افزار تهیه شده مقادیر دقیق به دست می آیند).

اشکال (۲) ترسیم خطوط لغزش و هدوگراف مربوطه را به صورت تقریبی نشان می دهد. باتوجه به این اشکال اگر خط لغزش  $AB$  با بردار ستونی  $X_{AB}$  نشان داده شود آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_0^{\phi} R(z) \sin(\phi - z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\phi^n}{n!}$$

$$\int_0^{\phi} R(z) \sin(\phi - z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} \frac{\phi^n}{n!} \quad (10)$$

که ضرایب  $c_n$  به وسیله روابط مربوطه به دست می‌آیند و سپس مؤلفه‌های نیرو در مختصات کارتزین (غیر محلی) به صورت به دست می‌آیند.

$$\frac{F_x}{k} = \frac{F_{\bar{x}}}{k} \cos\phi - \frac{F_{\bar{y}}}{k} \sin\phi$$

$$\frac{F_y}{k} = \frac{F_{\bar{y}}}{k} \cos\phi - \frac{F_{\bar{x}}}{k} \sin\phi$$

و گشتاور با جمع گشتاور مؤلفه‌های مماسی نیروهای عمودی و مماسی وارده به جزء حول نقطه پایه خط لغزش به دست می‌آیند و با انتگرال‌گیری و جاگذاری استفاده از معادلات هینگی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{M}{k} = \int_0^{\phi} \left[ \frac{p}{k} - 2z \right] \bar{x}(z) + \bar{y}(z) R(z) dz \quad (11)$$

### توزیع کرنش و کار اضافی

برای دست یافتن به توزیع کرنش در حالت کرنش صفحه‌ای لوله جریان مواد با تنش تسلیم برشی  $k$  با ضخامت  $dy$  را در شکل (۴) که با المان ABCD مشخص شده است در نظر گرفته و میزان کار لازم در تغییر شکل المان ABCD به المان 'A' 'B' 'C' 'D' بر واحد حجم به کمک تشابه هندسی و شرایط فیزیکی مسئله به دست آورده و خواهیم داشت:

$$dw = k \frac{du}{v_p} \quad (12)$$

$du$  تغییر سرعت یا میزان لغزش المان در جهت خط لغزش هنگام عبور از آن است و  $v_p$  مؤلفه عمودی سرعت المان عمود بر خط لغزش هنگام عبور است.

$dw$  نمو انرژی ورودی واحد حجم هنگام عبور از خط لغزش می‌باشد و بنابر این کار واحد حجم یک خط جریان که از ناحیه پلاستیکی عبور کرده و تعدادی خط لغزش را قطع کند عبارتست از:

$$w = k \int_{in}^{out} \frac{du}{v_p} \quad (13)$$

$$(I - Q_{\psi\theta} T_{\psi}^{-2} Q_{\theta\psi}) X_{AB} = (p/\omega) (I + Q_{\psi\theta} T_{\psi}^{-1}) C \quad (V)$$

این معادله، معادله اصلی غیر همگن برای خط لغزش مجهول  $X_{AB}$  نامیده شده و  $I$  ماتریس همانی (واحد) می‌باشد.

این معادله خط لغزش اصلاح شده اولیه و صحیح در حل مسئله را ارائه می‌کند و بر مبنای آن بردار شعاعی تمام خطوط لغزش دیگر تعیین خواهد شد. این معادله در واقع میدان خط لغزشی را بیان می‌کند که دیورست، کالین و جانسون برای نورد گرم پیشنهاد نمودند. سمت راست معادله مستقیماً متناسب با ناپیوستگی سرعت می‌باشد.

محاسبات نشان می‌دهد که خط لغزش اولیه اختلاف قابل توجهی با کمان دایره‌ای ندارد. در حل معادله (V) از روش حذف گوس استفاده شده است. بردارهای شعاعی خطوط لغزش دیگر با توجه به محاسبه  $X_{AB}$  و استفاده از عملگرهای ماتریسی محاسبه می‌شوند.

### بیان نیرو و گشتاور

با جمع مؤلفه‌های جزئی نیرو روی طول هر جزء از خط لغزش کل نیروی عمل‌کننده روی خط لغزش معین می‌گردد. با توجه به شکل (۲) پس از انتگرال‌گیری و استفاده از معادلات هینگی نیروهای حاصل از تنش‌های عمودی و برشی که روی برد  $\phi$  خط لغزش  $OA$  با نقطه پایه  $O$  عمل می‌کنند، در جهت مختصات محلی به صورت زیر نتیجه می‌گردد.

$$\frac{F_{\bar{x}}}{k} = -\bar{x} + \frac{p}{k} \bar{y} - 2 \int_0^{\phi} z R(z) \sin(\phi - z) dz$$

$$\frac{F_{\bar{y}}}{k} = -\bar{y} + \frac{p}{k} \bar{x} - 2 \int_0^{\phi} z R(z) \cos(\phi - z) dz \quad (8)$$

$x$  و  $y$  مختصات متحرک (محلی) مطابق شکل معرفی و با انتقال آن از مختصات کارتزینی خواهیم داشت:

$$\bar{y} = \int_0^{\phi} R(z) \sin(\phi - z) dz$$

$$\bar{x} = \int_0^{\phi} R(z) \cos(\phi - z) dz \quad (9)$$

انتگرال‌های کانولوشن را می‌توان با بیان آن به صورت بسط سری توانی محاسبه کرد.

کار واحد حجم در موقعیت های مختلف را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$w = 2k \varepsilon_H \beta \quad (14)$$

که  $\beta$  نسبت انرژی مصرفی (نسبت کار پلاستیک در موقعیت های مختلف به متوسط کار پلاستیک) و  $\varepsilon_H$  کرنش متوسط مقطع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\varepsilon_H = \frac{2(h_i - h_0)}{h_i + h_0} \quad (15)$$

که  $h_0$  و  $h_i$  به ترتیب ضخامت ورودی و خروجی مواد می باشد. از مقایسه روابط (۹) و (۱۰) خواهیم داشت:

$$B = \frac{\int_{in}^{out} \frac{du}{v_p}}{2\varepsilon_H} \quad (16)$$

بنابر این تغییرات  $\beta$  برای المان های جریان یافته در موقعیت های مختلف معرف توزیع انرژی مصرفی و یا کرنش کل صورت گرفته (مجموع کرنش هموزن و کرنش اضافی) در آن موقعیت می باشد. راندمان تغییر شکل ( $\eta$ ) را مطابق معمول به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\eta = \frac{w_i}{w_a}$$

که  $w_i$  کار تغییر شکل ایده آل (هموزن) و  $w_a$  کل کار تغییر شکل (واقعی) بر واحد حجم در کل سطح مقطع می باشند. به علت تقارن کافی است نیمه ای از ارتفاع در نظر گرفته شود، در این صورت

$$\eta = \frac{2k\varepsilon_H \left(\frac{h}{2}\right)}{2k\varepsilon_H \int_0^{h/2} \beta dy} = \frac{h}{2 \int_0^{h/2} \beta dy} \quad (17)$$

مماس به خطوط جریان در هر نقطه در میدان خط لغزش موازی با سرعت مطلق آن نقطه در هیدوگراف می باشد. بنابراین خطوط جریان را در میدان خط لغزش با استفاده از هیدوگراف می توان رسم کرد و مقدار  $\beta$  را برای هر لوله جریان از مقطع ورودی تا مقطع خروجی

محاسبه کرده و مقدار آن را بر حسب  $\gamma$  (موقعیت المان از خط تقارن) رسم می کنیم. به عنوان مثال برای المان هایی که از نقطه H از ناحیه ۱ به فاصله  $\gamma_H$  وارد ناحیه پلاستیک می شود (شکل ۲) به ترتیب وارد نواحی ۲، ۳، ۴، ۸، ۱۱، ۱۲، ۱۴ و ۱۶ و در نهایت خروجی (۱۷) می گردد و به عنوان مثال برای ذره ای که از ناحیه (۴) وارد ناحیه (۸) شده است،  $du$  و  $v_p$  مربوطه در شکل (۲ ب) نشان داده شده است. این مقادیر توسط معادلات هینگی و روابط مثلثاتی به دست می آید.

فرض می شود که ماده در تعداد محدودی مراحل تحت برش قرار می گیرد. در واقعیت این مراحل بی نهایت است. با استفاده از روش های عددی انتگرال سمت راست رابطه (۱۶) قابل محاسبه است و  $\beta$  نسبت توزیع کرنش از این رابطه در کاهش ضخامت های مختلف به دست آمده است.

پس از محاسبه  $\beta$  در شرایط تعریف شده، راندمان تغییر شکل  $\eta$  از رابطه ۱۷ قابل محاسبه می باشد.

### ساختار برنامه کامپیوتری

برنامه شامل ورودی هایی مانند سرعت ورودی مواد، سرعت زاویه ای غلتک ها و ... می باشد.

نخستین قسمت برنامه اصلی ساختن ماتریس ضرایب معادله (۷) می باشد. در یکی از برنامه های فرعی این معادله ماتریسی از روش حذف گوس حل شده و بردار شعاعی خط لغزش  $X_{AB}$  محاسبه می شود. در مراحل دیگر بردارهای شعاعی و به دنبال آن مختصات کارتزین کلیه خطوط لغزش و هیدوگراف محاسبه می شوند. با در دست داشتن اطلاعات هندسی و شکل خطوط لغزش نیروی جدایش غلتک ها، گشتاور آنها، زاویه تماس و در صد کاهش ضخامت، اندازه تصویر افقی کمان تماس و سرعت خروجی فلز نورد شده به دست می آید.

در مرحله نهایی برای چندین مسیر (خط جریان ذرات) به طور جداگانه مقادیر  $\int \frac{du}{v_p}$  محاسبه شده و بعد از محاسبه  $\varepsilon_H$  مقدار  $\beta$  برای هر مسیر در مقطع با استفاده از رابطه (۱۶) به دست می آید.

فلوچارت برنامه کامپیوتری در شکل (۵) نشان داده شده است.

### نتایج

اشکال (۶)، (۷) و (۸) به ترتیب میدان خطوط لغزش

هدوگراف و توزیع کرنش را در کاهش ضخامت ۳۰/۵ درصد نشان می‌دهد. جدول (۱) نیز مقادیر مربوط به گشتاورها، نیروها، برد زاویه ورودی، برد زاویه فن مرکزی، ضخامت ورودی و خروجی و طول تصویر تماس را نشان می‌دهد. مطابق آنچه بیان شد نسبت نیروی جدایش غلتک‌ها به تنش تسلیم در واحد عرض قابل محاسبه بوده و با تقسیم این مقدار بر اندازه تصویر افقی کمان تماس مقدار متوسط نسبت فشار غلتک‌ها به تنش تسلیم  $(p/2k)$  نتیجه می‌شود.

برای مقایسه نتایج تئوری و تجربی نیرو و گشتاور از اطلاعات تجربی به دست آمده از خروجی سیستم‌های اتوماسیون و اندازه‌گیری واحد گرم فولاد مبارکه استفاده شده است. رابطه دنتون [۱۴] برای تخمینی از تنش تسلیم برشی  $k$  در دمای نورد ( $1150^{\circ}\text{C}$ ) برای فولاد کم کربن به کار گرفته شده است. کوپل غلتک‌ها با توجه به سرعت نورد و تخمین کوپل هدر رفته در یاتاقان‌ها (تفاضل کوپل حالت بدون بار از حالت بایار) به دست آمده است. نسبت کوپل غلتک‌ها بر واحد عرض  $N\text{-m/m}$  به تنش تسلیم برشی  $N/m^2$  نیز در جدول برای مقادیر تجربی و تئوری آورده شده است. برای مقایسه نسبی دیاگرام‌ها سرعت ورودی ورق در کلیه شرایط  $u = 1 \text{ m/sec}$  سرعت زاویه‌ای غلتک‌ها  $\omega = 0.9 \text{ rad/sec}$  در نظر گرفته شده است. به این ترتیب شرایط تجربی از طریق تشابه هندسی میدان و ابزار در کاهش ضخامت تعریف شده به دست می‌آید.

مقادیر محاسبه شده مربوط به نیروها و گشتاورها در مقایسه با موارد تجربی تطابق خوبی را نشان می‌دهند. دلایل عدم انطباق بسیار دقیق مقادیر تئوری و تجربی عبارتند از:

- ۱ - عدم دقت کافی برای استخراج تنش تسلیم برشی از رابطه دنتون به خاطر کامل نبودن این مدل.
- ۲ - تغییرات در دما اصطکاک، نرخ کرنش و جنس ماده بر نیروی نورد. به طور کلی پارامترهای فوق‌الذکر به دلیل تغییرات شرایط ترکیب و یا جمع اثر پارامترها، انحراف از مقدار تنظیم شده و یا اندازه‌گیری شده خطای تجربی را پدید می‌آورند.
- ۳ - خم و تخت شدن غلتک‌های کار و موارد مشابه آن
- ۴ - میدان خطوط لغزش مورد بحث میدان ساده شده‌ای است که یک حد بالا را ارائه می‌کند و امکان عدم انطباق شرایط مسئله برای پوشش کامل ناحیه صلب وجود دارد.

توزیع کرنش در مقطع متناسب با  $\beta$  همواره در سطوح خارجی مقادیر بیشتری را نسبت به نواحی مرکزی نشان می‌دهد به نحوی که حداقل مقدار کرنش در محور تقارن پدید می‌آید. مقدار واحد برای  $\beta$  در محور تقارن در واقع بیانگر کرنش هموزن تغییر شکل درفرآیند است. کرنش‌های بیشتر (کرنش‌های اضافی) ناشی از تغییر شکل غیر هموزن در سطوح مقادیر بیشتری نسبت به قسمت‌های داخلی خواهند داشت. مقایسه تئوریک و تجربی توزیع کرنش هنگام تغییر شکل امکان‌پذیر نمی‌باشد ولی راندمان تغییر شکل  $\eta$  از معادله ۱۷ با مقادیر تجربی مقایسه گردیده است. مقادیر تجربی راندمان تغییر شکل از تقسیم انرژی لازم برای تغییر شکل در حالت ایده آل (با در دست داشتن تنش تسلیم برشی) بر انرژی صرف شده برای تغییر شکل (خروجی کامپیوترهای مجتمع فولاد مبارکه) به دست آمده است. راندمان تغییر شکل فرآیند در نسبت کاهش‌های ضخامت مختلف برای ضخامت‌های ورودی یکسان در جدول (۲) نشان داده شده است. بر مبنای نتایج به دست آمده از مدل مورد بحث راندمان تغییر شکل با افزایش کاهش ضخامت کاهش می‌یابد. علت عدم تطابق و پراکندگی نتایج تجربی با نتایج تئوری را می‌توان ذکر همان موارد مطرح شده برای نیرو و گشتاور دانست.

به طور کلی توزیع کرنش بسیار ناهمگون، توزیع دمای ناهمگون را در پی خواهد داشت و عامل اصلی عیوبی مانند تماسی شدن در نتیجه ایجاد تنش‌های پس ماند، عیوب سطحی و عمقی خواهد بود که البته در نوردهای سریعتر و ضریب انتقال پایین‌تر شدت می‌یابد. در این مقاله توزیع کرنش غیرهمگون به صورت تئوری به دست آمده است و بررسی تجربی عیوب ناشی از تغییر شکل ناهمگون در مراجع [۱۵] و [۱۶] آورده شده است.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیع کرنش در نورد گرم که تاکنون مورد توجه محققین قرار نگرفته بود مورد توجه و محاسبه قرار گرفت و از آنجا راندمان تغییر شکل محاسبه شد که نتایج بسیار خوبی در مقایسه با نتایج تجربی ارائه نمود. پارامترهای معمول در نورد مانند گشتاور و نیرو نیز محاسبه گردید که کلیه مقادیر محاسبه شده انطباق خوبی را با نتایج تجربی نشان دادند.

عملگر ماتریسی بردار شعاعی سمت محدب خط لغزش  
 $T^{-1}_{\psi}$  پایه  
 $du$  تغییر سرعت المان در جهت خط لغزش  
 سرعت ورودی و خروجی ماده از ناحیه  
 $u, v_{out}$  پلاستیک  
 $v_p$  مؤلفه عمودی سرعت المان بر خط لغزش  
 کار پلاستیکی بر واحد حجم در عبور یک خط جریان از  
 $w$  ناحیه پلاستیک  
 کاربرد واحد حجم در حالت ایده ال و واقعی برای کل  
 $w_i, w_a$  سطح مقطع  
 $x_{12}$  بردار ستونی خط لغزش عبور کرده از نقاط  
 $\beta$  نسبت کرنش در هر موقعیت به کرنش در مرکز  
 $\epsilon_H$  کرنش متوسط مقطع  
 اندازه ناپیوستگی سرعت بین ناحیه صلب و  
 $\rho$  پلاستیک  
 $\eta$  راندمان تغییر شکل

### زیر نویس ها

- 1 - Matrix operator method
- 2 - Slip line field
- 3 - Prager's graphical method
- 4 - Chitkara, N. R
- 5 - Johnson, W
- 6 - Ewing, D. J. F
- 7 - Dewhurst, P
- 8 - Collins, I. F
- 9 - Dead Metal Zone (D. M. Z.)
- 10 - Hencky, H.
- 11 - Convolution integrals

تئوری خطوط لغزش با استفاده از عملگر ماتریسی و کاربرد کامپیوتر برای تحلیل مسائل شکل دهی دقت کافی در مسائل مهندسی را فراهم می آورد. نکته قابل توجه اینکه در مقایسه با راه حل های دیگر عددی نظیر اجزاء محدود زمان کمتری را به خود اختصاص می دهد. تنها خطای موجود در محاسبات قطع سری مربوط به شعاع انحناء می باشد که با متدهایی قابل اصلاح می باشد. مشکل یافتن خط لغزش اولیه که در مسائل غیر مستقیم وجود دارد با روش عملگر ماتریسی و ارضاء بعضی شرایط حدی از بین می رود. در حل مسئله شرایط حدی بالا و پاره ای از شرایط حدی پایین مانند شرط تعادل در مرز پلاستیک برقرار بوده ولی ارضاء معادلات تعادل در ناحیه مواد صلب مورد بحث واقع نمی شود. صرفنظر از محدودیت های زیادی که کاربرد میدان خطوط لغزش در حل بسیاری مسائل دارد، مزیت خطوط لغزش در سادگی و سرعت آنهاست و مهمتر اینکه آموزش و درک آنها ساده بوده و الگوهای مناسبی را برای جریان مواد پیشنهاد می کند.

### فهرست علائم

$\omega$  سرعت زاویه ای غلتک ها  
 $C$  بردار واحد دایره ای  
 $F_x, F_y$  مؤلفه های نیروی عمل کننده روی خط لغزش  
 $F_b$  نیروی کششی به ورودی ناحیه پلاستیک  
 $h_i, h_0$  ضخامت ورودی و خروجی از ناحیه تغییر شکل  
 $I$  ماتریس همانی (واحد)  
 $k$  تنش تسلیم در برش  
 $M$  گشتاور غلتک ها  
 عملگر ماتریسی تعیین بردار شعاعی خانواده دیگر از  
 $Q_{\theta\psi}$  خطوط لغزش

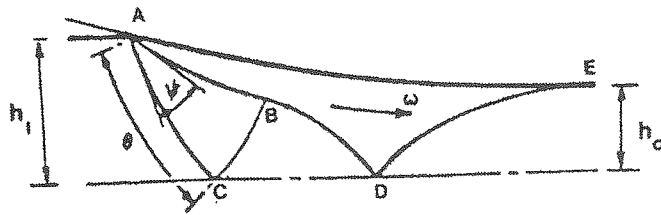
جدول (۱) پارامترهای محاسبه شده از حل میدان خطوط لغزش با سرعت ورودی ۱ m/sec.

درصد کاهش ضخامت		۱۰/۲۷	۱۲/۶۸	۲۱/۲	۳۰/۵	۳۶/۷
راندمان تغییر شکل ( $\eta$ )	تئوری از رابطه ۱۷	۰/۵۶۳	۰/۵۶۰	۰/۵۴۸	۰/۵۳۴	۰/۵۲۹
	تجربی	۰/۵۸۹	۰/۵۹۱	۰/۵۶۳	۰/۵۴۷	۰/۵۵۱

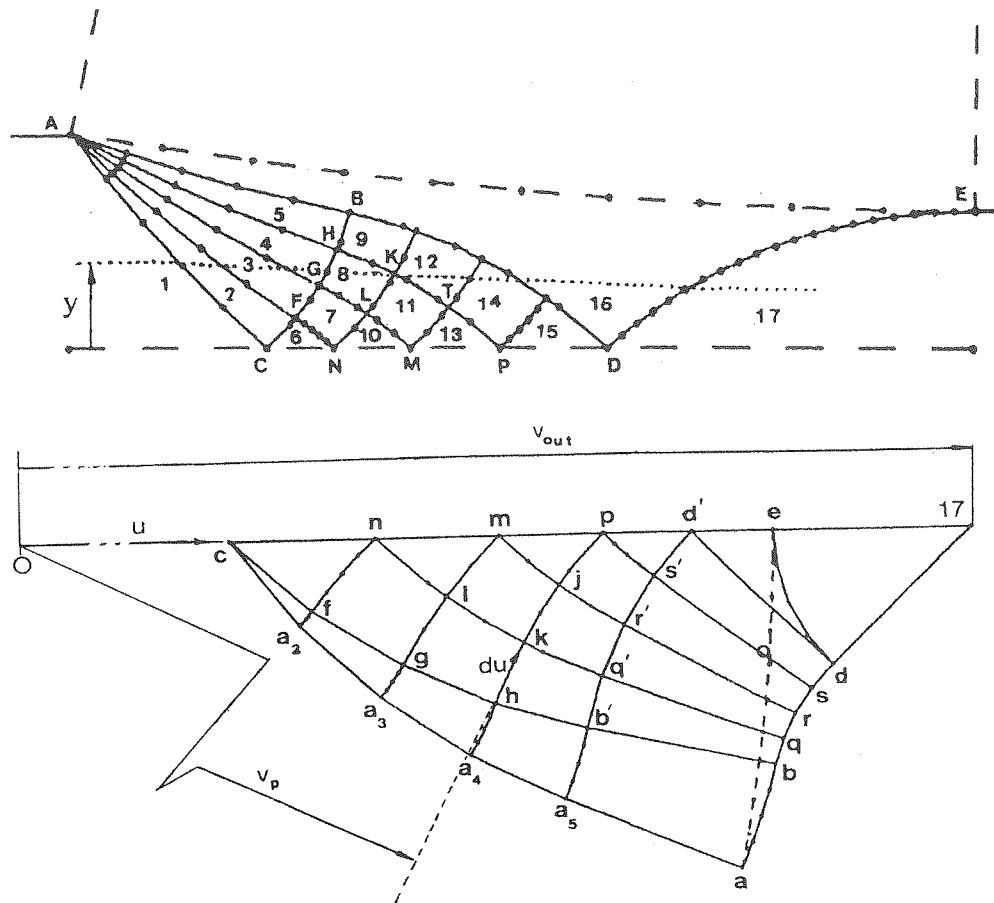


جدول (۲) مقادیر توربک و تجربی راندمان تغییر شکل.

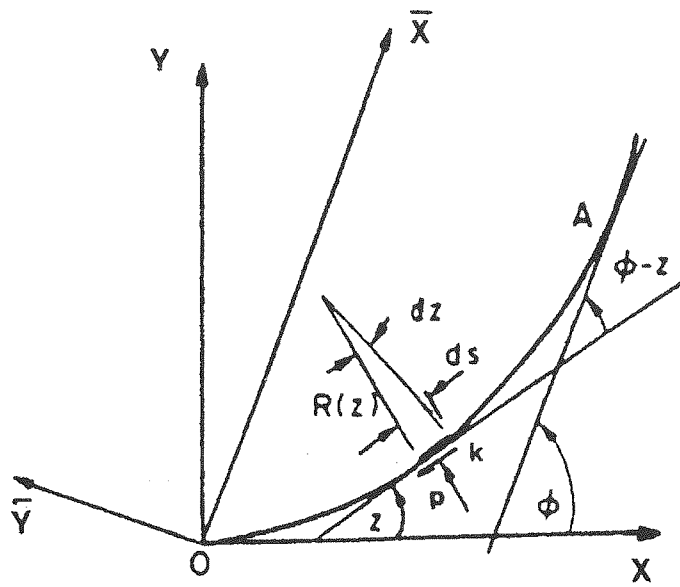
درصد کاهش ضخامت	فشار متوسط غلتک ها $P/2k$		گشتاور غلتک ها $M/k (m^2)$		ضخامت ورودی $m$	ضخامت خروجی $m$	زاویه تماس $deg$	ضخامت ورودی و خروجی	تصویر افقی مماس تماس $m$	زاویه فن مرکزی $\psi(deg)$	زاویه خط لغزش ورودی $\theta(deg)$
	تئوری	تجربی	تئوری	تجربی							
۱۰/۲۷	۱/۲۰۵۷	۱/۲۴۳۷	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۶۰	۰/۰۱۱	۰/۰۰۹۹	۲/۶۲۸	۱/۱۱۵۳۹	۰/۰۲۵	۳۲/۰۸۷	۸/۵۴۲۸۷
۱۷/۵۳	۱/۲۰۲۲	۱/۲۳۹۲	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۶۰۶	۰/۰۴۸	۰/۰۰۴	۲/۶۶۴	۱/۲۱۳۳۶	۰/۱۰۴	۳۲/۲۸۸	۸/۹۶۲۹۳
۲۲/۲۳	۱/۱۹۹	۱/۲۴۸۹	۰/۲۷۴	۰/۲۸۹	۰/۱۳۰	۰/۱	۶/۳۸۱	۱/۳۰۳۵۷	۰/۲۷۱	۳۲/۴۵۹	۹/۳۲۲۹۴
۳۵/۸۹	۱/۱۹۱	۱/۲۲۰۵	۰/۲۹۷	۰/۳۰۸	۰/۱۹۵	۰/۱۲۵	۱۰/۶۲	۱/۵۶۰۸۲	۰/۳۷۷	۳۲/۸۹۲	۱۰/۲۳۵۹



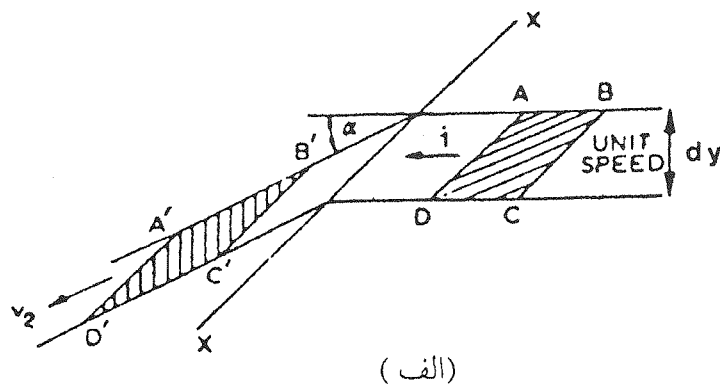
شکل (۱) میدان خطوط لغزش پیشنهادی برای نورد گرم.



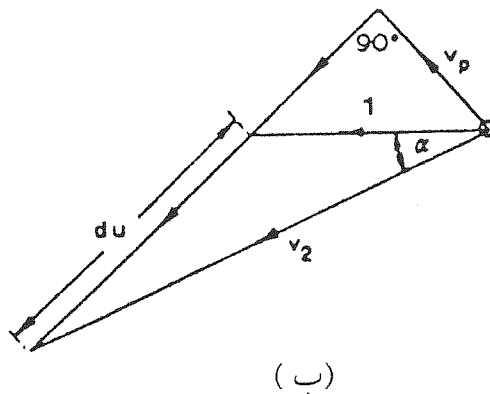
شکل (۲) الف - ترسیم خطوط لغزش



شکل (۳) نمایش تنش های برشی و عمودی روی خط لغزش و مختصات محلی و غیر محلی.



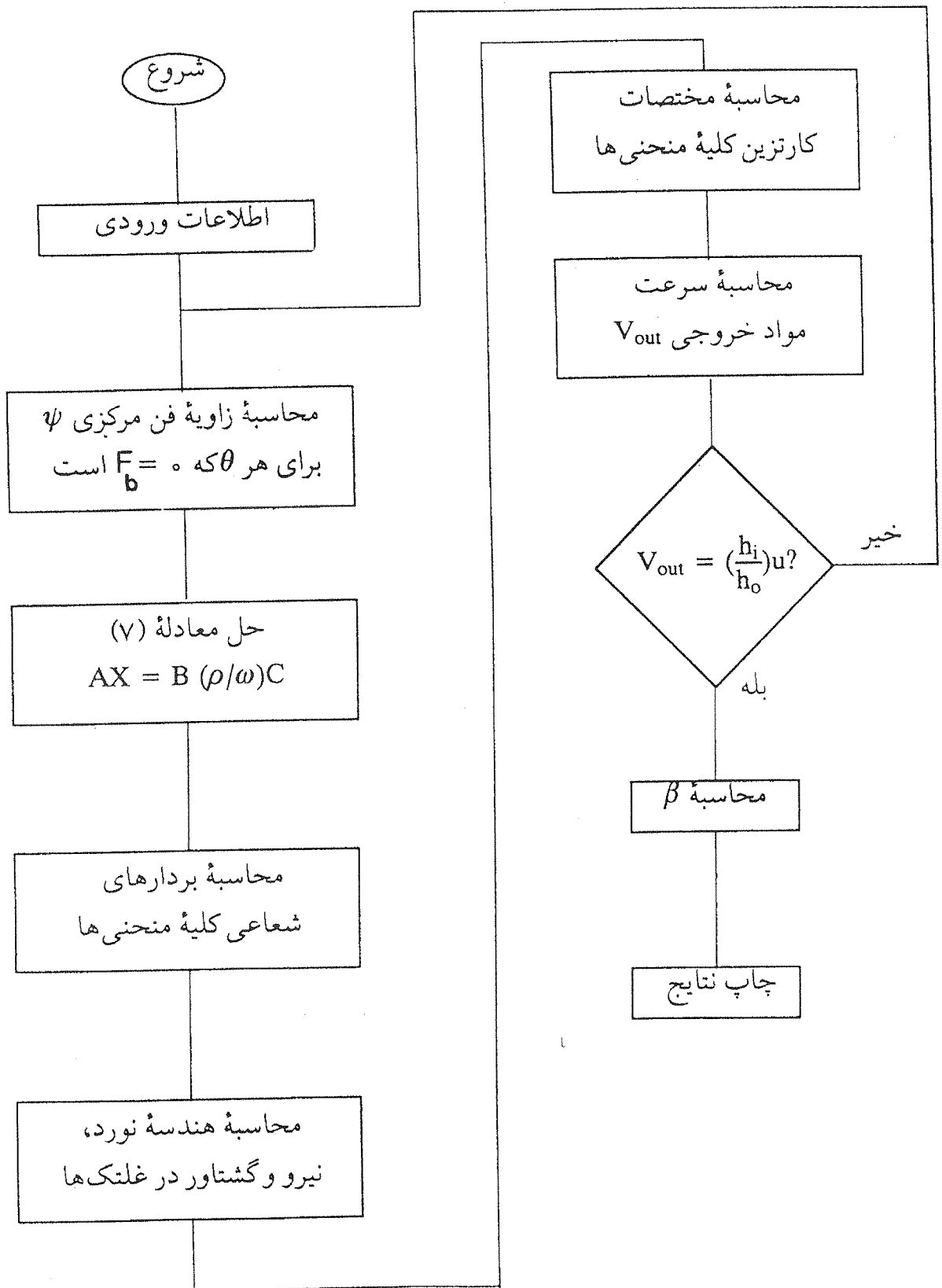
(الف)



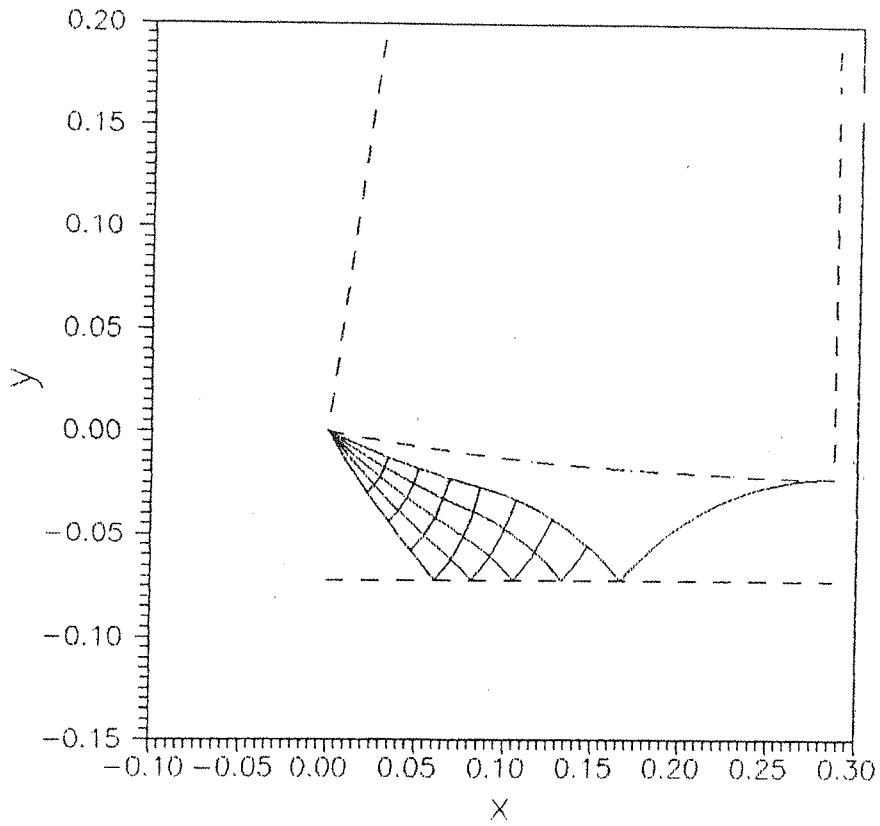
(ب)

شکل (۴) الف - صفحه فیزیکی تغییر شکل هنگام عبور المان از خط ناپیوستگی.

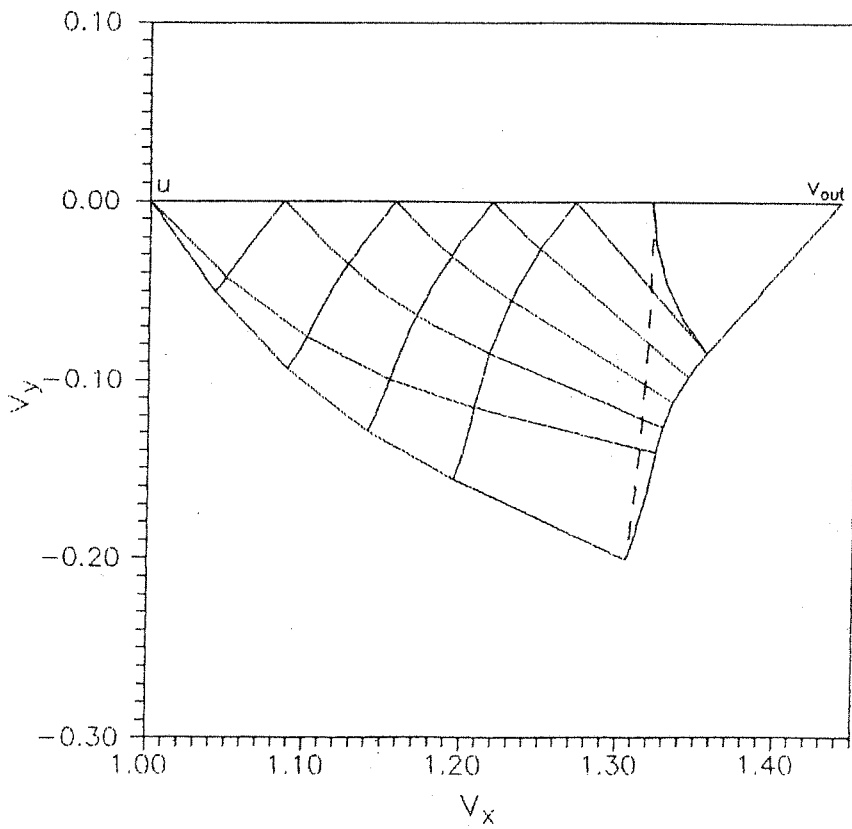
ب - هیدوگراف مربوط به میدان الف



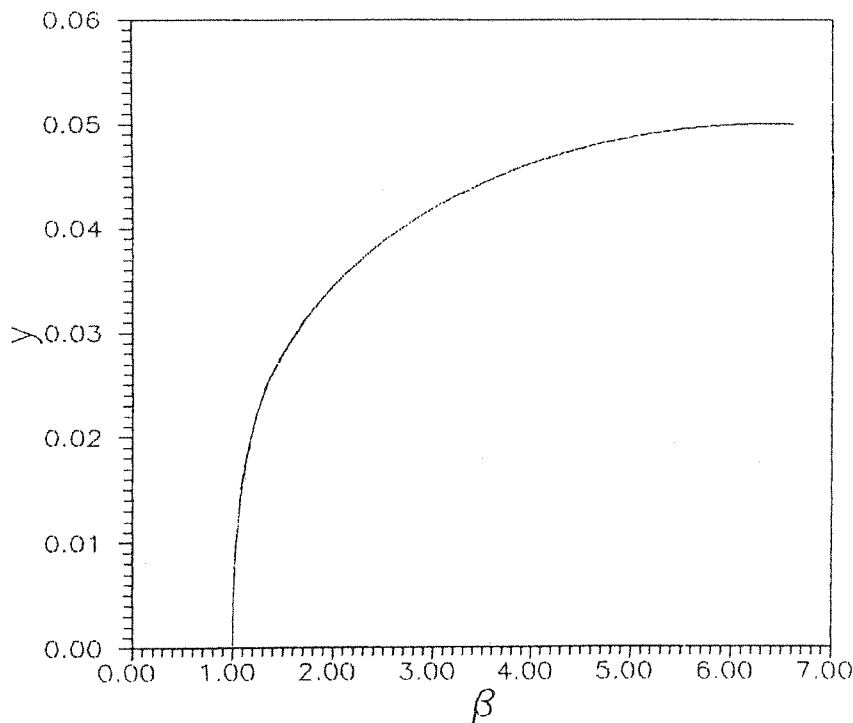
شکل (۵) فلوجارت برنامه کامپیوتری.



شکل (۶) میدان خطوط لغزش برای ۵ / ۳۰ درصد کاهش ضخامت.



شکل (۷) هیدوگراف مربوط به میدان خط لغزش برای ۵ / ۳۰ درصد کاهش ضخامت.



شکل (۸) توزیع کرنش در مقطع برای ۳۰٪ درصد کاهش ضخامت.

## مراجع

- [1] Tomsen E.G., Yang, C. T., Kobayah, S., Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing, The Macmillan Company, New York, 1990.
- [2] Chakrabaty, Y., "Theory of plasticity," McGraw-Hill, New York, 1987.
- [3] Johnson, W. Sowerby, R., Venter, R.D., Plane strain slip-line field for metal deformation processes. Pergamon Press, 1982.
- [4] Chitkara, N. R., Butt, M. A. "A general numerical method of construction of axisymmetric slip-line fields" Int. J. Mech. Sci, Pergamon Press Ltd, Vol. 34, No.11, 833-848, 1992.
- [5] Alexander, J. M. "A slip line field for the hot rolling process", Proc. Inst. Mech. Engrs., Vol. 169, 1021, 1955.
- [6] Ewing, D. J. F., "A series method for constructing slip-line field" J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, 105, 1967.
- [7] Dewhurst, P., Collins, I. F., Johnson, W., "A theoretical and experimental investigation into hot rolling," Int. J. Mech. Sci, Printed in Great Britain, Vol. 16, 389-397, 1974.
- [8] Collins, I. F., Dewhurst, P., "A slip line field analysis of asymmetrical hot rolling" Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press, Vol. 17, 643-651, 1975.
- [9] Babrov, V., "Mechanism and kinetics of transitional metal deformation during rolling" Iron-making and Steelmaking, Vol. 22, No. 3, 1995.
- [10] Hill, R. "On the vectorial superposition of Hencky-Perandtl nets" J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, P255, 1969.
- [11] Hill, R. "Mathematical Theory of Plasticity". Oxford University Press, Oxford, 1950.
- [12] Tarnovski, T. Y., Pozoeyev, A. A. and Lyshkov, V. B., "Deformation of metals during rolling," Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [13] Crane, F. A. A. and Alexander, J. M. "Slip line fields and deformation in hot rolling of strip." J. Inst. Metals, Vol. 96, pp: 289-300, 1968.
- [14] Denton, B. K., and Crane, F. A.A., "Roll load and torque in the hot rolling of steel strip," JISI, Aug. 1972.
- [15] Zhu, Y. D., and Avitzur, B. "Criteria for the presentation of split ends." Transactions of the ASME, Vol. 110, May 1988.
- [16] Lankford, W. T. et al, "The Making, Shaping and Treating of Steel," 10th Edition, Association of Iron and Steel Engineers, Pittsburgh, Pennsylvania, 1985.