

ارائه «توابع مقایسه ای اصلاح شده» برای آنالیز ارتعاشی صفحه مستطیلی با ترکی به طول و عمق دلخواه و به موازات یکی از اضلاع

موسی رضائی
دانشجوی دکتری

سیامک اسماعیل زاده خادم
استادیار

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این تحقیق برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشی صفحه ترکدار، برای اولین بار توابع جدیدی پیشنهاد می شود که ضمن ارضاء شرایط مرزی هندسی و طبیعی مسأله، از دقت بالاتری نسبت به توابع مقایسه ای^۱ برخوردار می باشد این توابع جدید را «توابع مقایسه ای اصلاح شده»^۲ می نامیم. ترك به موازات یکی از اضلاع صفحه مستطیلی می باشد که دارای عمق، طول و موقعت دلخواه است. وجود ترك که موجب افزایش خمش پذیری موضعی^۳ صفحه در محل ترك می شود، به صورت ناپیوستگی در شیب طرفین ترك و باتوجه به مفاهیم ضریب شدت تنش^۴ و کمپلاینس^۵ مدل شده است.

«توابع مقایسه ای اصلاح شده» دقیق تر از توابع مقایسه ای و نزدیک به توابع ویژه^۶ هستند و افزایش دقت آنها بستگی به مدل انتخاب شده دارد به طوری که با در نظر گرفتن مدل مناسب، دقت بسیار مطلوبی قابل حصول است. از این توابع برای تحلیل ارتعاشی^۷ مسأله و به دست آوردن فرکانس های طبیعی صفحه ترکدار استفاده شده و نتایج به صورت منحنی هایی که تغییرات فرکانس های طبیعی صفحه ترکدار را بر حسب عمق، طول و موقعت ترك نشان می دهند، ارائه شده است.

Introduction of "Modified Comparison Functions" for Vibration Analysis of a Rectangular Cracked Plate

S. Esmailzadeh Khadem
Assistant Professor

M. Rezaee
Ph.D. Student

Mechanical Engineering Department,
Tarbiat Modarres University

Abstract

In order to obtain natural frequencies and mode shapes of a cracked plate, for the first time, new functions which satisfy all natural and geometric boundary conditions are suggested. In this paper, these functions are called "modified comparison functions". The so-called modified comparison functions are more accurate than comparison functions and their accuracy is close to the eigenfunctions of the problem. Here, these functions are used for vibration analysis of a cracked rectangular plate having a crack parallel to one side of the plate with arbitrary length, depth and location.

The presence of a crack introduces considerable local flexibility at its location. This flexibility is modeled as a slope discontinuity at the two sides of the crack by means of stress-intensity factor and bending compliance. Using the "modified comparison functions" vibration analysis is carried out and the results are presented by appropriate curves showing variations of the natural frequencies of the cracked plate in terms of crack parameters i.e. depth, length and the location of the crack.

معروف هستند. در این تحقیق برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشی صفحه ترکدار، برای اولین بار توابع جدیدی پیشنهاد می شود که ضمن ارضاء شرایط مرزی هندسی و طبیعی مسأله از دقت بالاتری نسبت به توابع مقایسه ای برخوردار است. این توابع جدید را «توابع مقایسه ای اصلاح شده» می نامیم. در این مقاله «توابع مقایسه ای اصلاح شده» برای صفحه مستطیلی معیوب با ترکی به طول، عمق و موقعیت دلخواه که به موازات یکی از اضلاع صفحه می باشد و حالت تکیه گاهی آن (S-S-S-S) است به دست آمده و کار برد آنها در محاسبه فرکانس های طبیعی صفحه معیوب با استفاده از روش ریلی - ریتز مورد بحث قرار می گیرد.

۲- مدلسازی رفتار الاستیک ترک با طول محدود

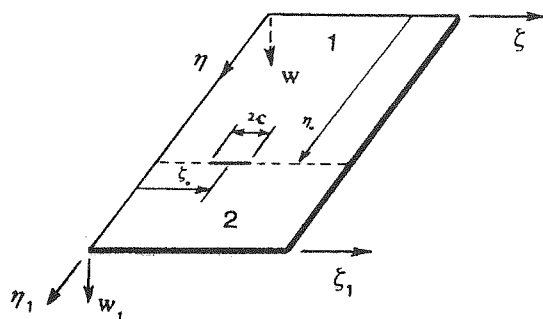
برای مدلسازی ترک با طول محدود که در آنالیز ارتعاشی صفحه معیوب به کار می رود، صفحه ای را مطابق شکل (۱) در نظر می گیریم، ترک به طول $2c$ و به موازات یکی از اضلاع صفحه و مختصات مرکز آن x_0 و y_0 می باشد و پارامترهای بدون بعد مورد استفاده عبارتند از:

$$2c = \frac{2C}{a} \quad \text{طول نسبی ترک}$$

$$\xi_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \eta_0 = \frac{y_0}{b} \quad \text{مختصات مرکز ترک}$$

$$\xi = \frac{h_0}{H} \quad \text{عمق نسبی ترک در مرکز آن} \quad (1)$$

در عبارات فوق a و b و H به ترتیب ابعاد صفحه در جهات x و y و z هستند و h_0 عمق مرکز ترک می باشد.



شکل (۱) صفحه مستطیلی ترکدار در دستگاه مختصات بدون بعد.

برای بررسی رفتار ارتعاشی صفحات با تکیه گاه های مختلف و نیز صفحات معیوب، معمولاً از روش های انرژی استفاده می شود. روش ریتز یکی از روش های متداول برای به دست آوردن تقریبی فرکانس های طبیعی صفحات نازک است و دقت نتایج در این روش به طور عمده تحت تأثیر توابع انتخاب شده برای شکل مدهای ارتعاشی صفحه خواهد بود [۱]. توابع مجاز^۱ از جمله توابعی هستند که به طور وسیعی در برآورد فرکانس های طبیعی صفحات معیوب (مدور و مستطیلی) مورد استفاده واقع می شوند. Leissa و همکارانش [۲] ارتعاشات صفحات مدور با شیار شعاعی V شکل را با استفاده از روش ریتز و با در نظر گرفتن توابع مجاز بررسی کرده اند. در تحقیق دیگری Lee [۳] ارتعاشات صفحات مدور با سوراخ مرکزی را که دارای یک بریدگی در فاصله بین شعاع های داخلی و خارجی و تحت زاویه α می باشد را مورد بررسی قرار داده است. در این تحقیق نیز از روش ریلی - ریتز^۲ و با در نظر گرفتن توابع مجاز استفاده شده است. برای آنالیز ارتعاشی صفحات مستطیلی معیوب از روش های اجزاء محدود نیز استفاده شده است. در مقاله ای که توسط Guan-Liang و همکارانش [۴] ارائه شده است ارتعاشات صفحه مستطیلی با ترکی که کل ضخامت صفحه را طی کرده و به موازات یکی از اضلاع صفحه است به روش اجزاء محدود تحلیل شده است. Datta و Prabhakara [۵] نیز تحقیقی در زمینه پایداری استاتیکی و ارتعاشات صفحه مستطیلی معیوب انجام داده اند. در این تحقیق نیز از روش اجزاء محدود استفاده شده است. در تحقیق دیگری Lee و Lim [۶] ارتعاشات صفحه مستطیلی با بریدگی خطی در مرکز صفحه که به موازات یکی از اضلاع صفحه است با در نظر گرفتن اثرهای اینرسی دورانی^{۱۱} و تغییر شکل برشی^{۱۱} مورد بررسی قرار داده اند در این تحلیل از روش ریلی - ریتز برای برآورد فرکانس های طبیعی استفاده شده است.

از آنجا که وجود عیوب کوچک تأثیر کمتری بر فرکانس های طبیعی صفحه می گذارند، بنابر این برآورد دقیق این تغییرات با استفاده از توابع مجاز امکان پذیر نیست و از طرف دیگر به دست آوردن توابع ویژه در چنین مسائلی کار بسیار پیچیده و حتی محال است. بنابر این ناچار به استفاده از توابعی هستیم که دقت آنها بیشتر از دقت توابع مجاز باشد که به توابع مقایسه ای

برای آنالیز ارتعاشی صفحه با ترک به طول محدود، می توان تابع مدل کننده شکل ترک، رابطه (۳)، را به وسیله بسط فوریه به صورت مجموعه ای از توابع مثلثاتی در محدوده $0 \leq x \leq a$ بیان کرد. ولی اشکال عمده این کار در وقت گیر بودن محاسبات و حجم زیاد عملیات جبری و مشتق گیری و انتگرال گیری است. لذا با استفاده از رابطه زیر [۷]

$$\alpha_{bb} = \frac{1}{H} \int_0^h g_b^2 dh \quad (4)$$

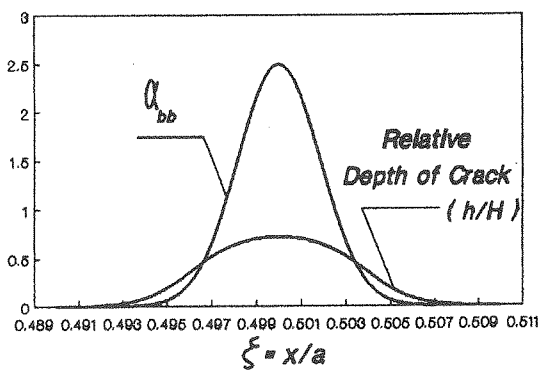
که در آن g_b تابع بدون بعدی از عمق نسبی ترک ($\xi = \frac{h}{H}$) در محدوده $0 < \xi < 0.7$ می باشد و به صورت زیر تعریف می شود [۸]

$$g_b = \xi^{\frac{1}{2}} (1.99 - 2.47\xi + 12.97\xi^2 - 23.117\xi^3 + 24.80\xi^4) \quad (5)$$

تابع بیان کننده کمپلاینس خمشی بدون بُعد را مستقیماً به صورت تابعی از مختصه بدون بُعد ζ به صورت زیر پیشنهاد می کنیم که فاقد اشکالات ذکر شده باشد [۹]:

$$\alpha_{bb}(\zeta) = \alpha_{bb}^0 e^{-[(\zeta - \zeta_0)^2 / 2c^2]} \quad (6)$$

در رابطه (۶) α_{bb}^0 کمپلاینس خمشی مرکز ترک، e پایه لگاریتم طبیعی و ζ مختصه بدون بعد ($0 \leq \zeta < 1$) می باشد. مقدار تابع اخیر در محدوده $0 \leq \zeta \leq 1$ و $\zeta_0 + c \leq \zeta \leq 1$ بسیار کوچک بوده و با فاصله گرفتن از دو انتهای ترک، مقدار تابع اخیر عملاً صفر می شود. با زیاد شدن طول ترک، $\alpha_{bb}(\zeta)$ طبق رابطه (۶) به مقدار ثابت α_{bb}^0 متناظر با ترک سرتاسری میل می کند. در شکل (۲) تغییرات $\alpha_{bb}(\zeta)$ برای ترکی با مشخصات $\zeta_0 = 0.5$ و طول نسبی $2c = 0.015$ و $\alpha_{bb}^0 = 2.5$ همراه با منحنی تغییرات عمق نسبی ترک براساس رابطه (۶) نشان داده شده است.



شکل (۲) منحنی تغییرات کمپلاینس خمشی بدون بُعد و عمق نسبی ترک برای ترکی با مشخصات $\zeta_0 = 0.5$, $2c = 0.015$ و $\alpha_{bb}^0 = 2.5$.

یک مرز فرضی در امتداد ترک در نظر می گیریم که صفحه را به دو ناحیه تقسیم کند. Rice و Levy [۷] طی تحقیقی، نسبت فاکتور شدت تنش را در صفحه ای با ترکی به طول محدود و صفحه ای با ترک سرتاسری تحت ممان خمشی یکسان به دست آورده اند. اگر k فاکتور شدت تنش برای ترک با طول محدود و k_∞ فاکتور شدت تنش برای ترک با طول بی نهایت (معادل فاکتور شدت تنش در یک باریکه ترکدار در حالت کرنش صفحه ای و تحت گشتاور خمشی) باشد، با افزایش نسبت طول ترک به ضخامت صفحه، $\frac{2C}{H}$ ، نسبت $\frac{k}{k_\infty}$ به ازای تمام مقادیر عمق نسبی ترک، $\frac{h_0}{H}$ ، به سمت واحد میل می کند و هر چه عمق نسبی ترک کوچکتر باشد، در مقادیر نسبتاً کوچکتری از $\frac{2C}{H}$ مقدار $\frac{k}{k_\infty}$ به سمت واحد میل می کند. از طرف دیگر چون k متناسب با تنش است پس کاهش k برای ترک با طول محدود در مقایسه با ترک طویل، مساوی با کم شدن تنش در محدوده ترک با طول محدود نسبت به ترک طویل با همان عمق است. Rice و Levy [۷] در همین زمینه یک رابطه تقریبی برای تنش خمشی اسمی در محل ترک با طول محدود ارائه داده اند که اگر صفحه فقط تحت ممان خمشی واقع شود به صورت زیر در می آید:

$$\sigma_b^0 = \frac{\sigma_{bb}^0}{1 + \frac{3(3+\nu)(1-\nu)\alpha_{bb}^0}{(2C/H)}} \quad (7)$$

در رابطه اخیر σ_b^0 تنش خمشی اسمی در محل ترک و در سطح ورق، σ_{bb}^0 تنش خمشی اسمی در محل ترک با طول بی نهایت و در سطح ورق و α_{bb}^0 کمپلاینس خمشی بدون بعد در مرکز ترک و ν نسبت پواسون می باشد. با توجه به مطالب فوق معلوم می شود که مقدار ناپیوستگی شیب در طرفین ترک با طول محدود کمتر از ناپیوستگی شیب در ترک طویل با همان عمق و بارگذاری خمشی یکسان خواهد بود.

حال در پی یافتن تابعی هستیم که شکل ترک را با داشتن پارامترهای مشخص کننده ترک (عمق نسبی، طول نسبی و مختصات مرکز ترک) بیان کند. اگر ترک را به شکل یک نیم بیضی در نظر بگیریم، تابع بیان کننده شکل ترک در مختصات کارتیزین به صورت زیر خواهد

$$h(x) = \begin{cases} h_0 \left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{C^2} \right]^{\frac{1}{2}} & : x_0 - C < x < x_0 + C \\ 0 & : |0 < x < x_0 - C \\ & : |x_0 + C < x < a \end{cases} \quad (8)$$

$$E(\zeta) = \frac{2C/H + 3(v+3)(1-v)\alpha_{bb}^0 [1-f(\zeta)]}{2C/H + 3(v+3)(1-v)\alpha_{bb}^0} \quad (12)$$

رابطه (۱۱) ناپیوستگی شیب را در طرفین مرز فرضی در امتداد ترک برحسب مشخصات ترک، خواص الاستیک و انحناء صفحه به دست می‌دهد.

۳- آنالیز ارتعاشی صفحه با ترکی به طول محدود

۳-۱- نحوه به دست آوردن توابع شکل مدهای ارتعاشی

معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد صفحه مستطیلی به صورت زیر است [۱۱]:

$$-D_E \nabla^4 w = M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (13)$$

که در آن ∇^4 اپراتورهای هارمونیک، $w = w(x, y, t)$ جرم واحد سطح ورق و D_E سختی خمشی آن است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها همراه با در نظر گرفتن $w(x, y, t) = W(x, y) T(t)$ داریم:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (14-الف)$$

$$\nabla^4 W - \frac{\omega^2 M}{D_E} W = 0 \quad (14-ب)$$

معادله (۱۴-ب) در مختصات بدون بعد ζ و η به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^4 W(\zeta, \eta)}{\partial \eta^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W(\zeta, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \zeta^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W(\zeta, \eta)}{\partial \zeta^4} - \phi^4 \lambda^4 W(\zeta, \eta) = 0 \quad (15)$$

که در آن $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\frac{M}{D_E}}$ و $\phi = \frac{b}{a}$ می‌باشد و کلیه متغیرهای مستقل و وابسته بدون بعد هستند.

برای حل معادله (۱۵) در حالتی که تکیه گاههای صفحه در $\zeta = 0$ و $\zeta = 1$ از نوع تکیه گاه ساده باشند می‌توان از روش حل Levy^{۱۲} استفاده کرد و جواب را به صورت رابطه (۱۶) نوشت [۱۲]:

$$W(\zeta, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin(m\pi\zeta) \quad (16)$$

چنانکه قبلاً نیز بیان شد مقدار تنش خمشی اسمی برای ترک با طول محدود کمتر از مقدار این تنش در مرکز ترک سرتاسری است. مقدار این تنش در محدوده عاری از ترک ($0 \leq \zeta \leq 1$)، $\zeta_0 + c$ ، $\zeta - c$ ، $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ ، دارای مقدار طبیعی خود بوده و با حرکت از طرفین ترک به مرکز آن به کمترین مقدار خود در محدوده ترک می‌رسد. حال اگر کمپلاینس خمشی بدون بعد در مرکز ترک را $\alpha_{bb}^0(\zeta)$ بنامیم و تغییرات $\alpha_{bb}^0(\zeta)$ را در طول مرز فرضی مطابق رابطه (۶) در نظر بگیریم، می‌توانیم تغییرات تنش خمشی اسمی را در طول مرز فرضی به صورت تابع جدید زیر بیان کنیم [۹]:

$$\alpha_b(\zeta) = \sigma_{b\infty} - (\sigma_{b\infty} - \sigma_b^0) f(\zeta) \quad (7)$$

که در آن $f(\zeta)$ را «تابع شکل ترک» نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۹]:

$$f(\zeta) = e^{-|(\zeta - \zeta_0) e^{1/2c^2}|} \quad (8)$$

از طرف دیگر مقدار ناپیوستگی بوجود آمده در شیب طرفین ترک در اثر اعمال ممان خمشی متناسب با کمپلاینس خمشی ترک و تنش خمشی اسمی می‌باشد و به صورت زیر نوشته می‌شود [۷]:

$$\theta = \frac{12(1-\nu^2)}{E} \sigma_b \alpha_{bb} \quad (9)$$

و همچنین $\sigma_{b\infty}$ توسط رابطه زیر بیان می‌شود [۱۰]:

$$\sigma_{b\infty} = \frac{-EH}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10)$$

اگر در رابطه (۹) به جای α_{bb} و σ_b به ترتیب از روابط (۶) و (۷) استفاده کنیم و رابطه (۱۰) را به صورت بدون بعد بنویسیم، به رابطه (۱۱) که بیان کننده ناپیوستگی شیب در طرفین مرز فرضی ($\eta = \eta_0$) است می‌رسیم [۹]:

$$\theta(\zeta)|_{\eta=\eta_0} = \frac{-6H}{b} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right) \alpha_{bb}^0 E(\zeta) f(\zeta)|_{\eta=\eta_0} \quad (11)$$

که در آن:

$$W_2(\zeta, \eta) = [(B_{2m} \text{sh} \beta_m (\eta-1) + C_{2m} s\gamma_m (\eta-1)) \text{sm}\pi\zeta] : \eta_0 \leq \eta \leq 1 \quad (20 - \text{ب})$$

شرایط بین مرزی که در محل مرز فرضی در امتداد ترک و در موقعیت $\eta = \eta_0$ قابل اعمالند عبارتند از:

$$W_1 = W_2 \quad (i) \quad M_{1\eta} = M_{2\eta} \quad (ii) \quad V_{1\eta} = V_{2\eta} \quad (iii)$$

$$\left[\frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \theta(\zeta) - \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right] |_{\eta=\eta_0} = 0 \quad (iv) \quad (21)$$

سه رابطه اول بیان کننده تساوی خیز، ممان خمشی و نیروی برشی در محل مرز فرضی هستند و رابطه چهارم، مشخص کننده رابطه بین شیب طرفین ترک و ناپیوستگی شیب در محل ترک می باشد.

با اعمال شرایط بین مرزی (21) به معادلات (20) - الف و ب، به دستگاه معادلات همگن می رسیم. برای به دست آوردن جواب های غیر صفر برای مجهولات B_{1m} و C_{1m} و B_{2m} و C_{2m} لازم است که دترمینان ضرایب صفر شود که دترمینان حاصل به صورت زیر خواهد بود [9]:

$$\begin{vmatrix} \text{sh} \beta_m \eta_0 & s\gamma_m \eta_0 \\ \lambda_+^2 \text{sh} \beta_m \eta_0 & -\lambda_-^2 s\gamma_m \eta_0 \\ \beta_m \lambda_+^2 \text{ch} \beta_m \eta_0 & -\gamma_m \lambda_+^2 + c\gamma_m \eta_0 \\ [\beta_m \text{ch} \beta_m \gamma_0 + \frac{6H}{b} \alpha_{bb}^0] & [\gamma_m c\gamma_m \eta_0 - \frac{6H}{b} \alpha_{bb}^0] \\ (\lambda_+^2 E(\zeta) f(\zeta) \text{sh} \beta_m \eta_0) & (\lambda_-^2 E(\zeta) f(\zeta) s\gamma_m \eta_0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\text{sh} \beta_m (\eta_0 - 1) & -s\gamma_m (\eta_0 - 1) \\ -\lambda_+^2 \text{sh} \beta_m (\eta_0 - 1) & -\lambda_-^2 s\gamma_m (\eta_0 - 1) \\ -\beta_m \lambda_+^2 - \text{ch} \beta_m (\eta_0 - 1) & \gamma_m \lambda_+^2 + c\gamma_m (\eta_0 - 1) \\ -\beta_m \text{ch} \beta_m (\eta_0 - 1) & -\gamma_m c\gamma_m (\eta_0 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

در رابطه فوق از عبارات های ساده کننده زیر برای خلاصه نویسی استفاده شده است:

$$\lambda_+^2 \equiv \phi^2 [\lambda^2 - (m\pi)^2 (1 - \nu)]$$

$$\lambda_-^2 \equiv \phi^2 [\lambda^2 - (m\pi)^2 (1 + \nu)]$$

رابطه (22) برحسب متغیر ζ نوشته شده است و لازم

که با جایگذاری در معادله (15) خواهیم داشت:

$$\frac{d^4 Y_m(\eta)}{d\eta^4} - 2\phi^2 (m\pi)^2 \frac{d^2 Y_m(\eta)}{d\eta^2} + \phi^4 [(m\pi)^4 - \lambda^4] Y_m(\eta) = 0 \quad (17)$$

حال اگر معادله (17) را برای دو ناحیه صفحه ترکدار شکل (1) بنویسیم به هشت شرط مرزی و بین مرزی نیاز خواهیم داشت، شرایط مرزی برای ناحیه (1) و (2) به ترتیب در $\eta = 0$ و $\eta = 1$ و شرایط بین مرزی در محل مرز فرضی که جداکننده دو ناحیه است نوشته می شوند. در هر مرز خارجی دو شرط مرزی قابل اعمال است و از آنجایی که تکیه گاه های صفحه از نوع ساده انتخاب شده است، لذا شرایط مرزی در $\zeta = 0$ و $\zeta = 1$ برای هر دو ناحیه توسط رابطه (16) ارضاء می شود. شرایط مرزی در $\eta = 0$ برای ناحیه (1) و $\eta = 1$ برای ناحیه (2) عبارتند از:

$$Y_{1m}(\eta) |_{\eta=0} = \frac{d^2 Y_{1m}(\eta)}{d\eta^2} |_{\eta=0} = 0 \quad (18 - \text{الف})$$

$$Y_{2m}(\eta) |_{\eta=1} = \frac{d^2 Y_{2m}(\eta)}{d\eta^2} |_{\eta=1} = 0 \quad (18 - \text{ب})$$

از طرف دیگر جواب معادله (17) را می توان در دو محدوده $\lambda^2 > (m\pi)^2$ و $\lambda^2 < (m\pi)^2$ به صورت زیر به دست آورد:

$$Y_m(\eta) = A_m \text{ch} \beta_m \eta + B_m \text{sh} \beta_m \eta + C_m s\gamma_m \eta + D_m c\gamma_m \eta : \lambda^2 > (m\pi)^2 \quad (19 - \text{الف})$$

$$Y_m(\eta) = A_m \text{ch} \beta_m \eta + B_m \text{sh} \beta_m \eta + C_m \text{sh} \gamma_m \eta + D_m \text{ch} \gamma_m \eta : \lambda^2 < (m\pi)^2 \quad (19 - \text{ب})$$

که: $\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi)^2}$ یا $\phi \sqrt{(m\pi)^2 - \lambda^2}$ حقیقی باشد، $\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi)^2}$ و A_m و D_m ضرایب ثابتی هستند. حال اگر شرایط مرزی (18 - الف و ب) را در معادلات (19) اعمال کنیم به دو جواب در دو محدوده $\lambda^2 > (m\pi)^2$ و $\lambda^2 < (m\pi)^2$ خواهیم داشت:

$$W_1(\zeta, \eta) = (B_{1m} \text{sh} \beta_m \eta + C_{1m} s\gamma_m \eta) \text{sm}\pi\zeta : 0 \leq \eta \leq \eta_0$$

(20 - الف)

است که این رابطه برای همه ζ ها در محدوده $0 \leq \zeta \leq 1$ صفر شود. از آنجایی که مسأله از نوع مقدار ویژه^{۱۳} می باشد، بنابراین معادله تابع شکل مد ارتعاشی برحسب یکی از ضرایب و با دامنه دلخواه نوشته خواهد شد. بعد از انجام عملیات سطری مناسب، توابع شکل مدهای ارتعاشی برای دو ناحیه (۱) و (۲) به صورت زیر به دست می آید [۹]:

$$W_{1m} = B_{1m} (\text{sh} \beta_m \eta + \frac{e_3 + e_4 E(\zeta) f(\zeta)}{e_5 f(\zeta)} \text{sy}_m \eta) \text{sm} \pi \zeta = Y_{1m}(\eta) \text{sm} \pi \zeta \quad (23\text{-الف})$$

$$W_{2m} = B_{1m} [(e_1 \text{sh} \beta_m (\eta - 1) + e_2 \frac{e_3 + e_4 E(\zeta) f(\zeta)}{e_5 f(\zeta)} \text{sy}_m (\eta - 1))] \text{sm} \pi \zeta = Y_{2m}(\eta) \text{sm} \pi \zeta \quad (23\text{-ب})$$

پارامترهای e_1 تا e_5 به صورت زیر تعریف شده اند:

$$e_1 = \text{sh} \beta_m \eta_0 / \text{sh} \beta_m (\eta_0 - 1) \quad (24\text{-الف})$$

$$e_2 = \text{sy}_m \eta_0 / \text{sy}_m (\eta_0 - 1) \quad (24\text{-ب})$$

$$e_3 = 2\beta_m \phi^2 \lambda^2 [\text{ch} \beta_m \eta_0 - \text{sh} \beta_m \eta_0 \text{ch} \beta_m (\eta_0 - 1) / \text{sh} \beta_m (\eta_0 - 1)] \quad (24\text{-ج})$$

$$e_4 = \frac{6H}{b} \alpha_{bb}^{\circ} (\lambda_+^2)^2 \text{sh} \beta_m \eta_0 \quad (24\text{-د})$$

$$e_5 = \frac{6H}{b} \alpha_{bb}^{\circ} \lambda_-^2 \lambda_+^2 \text{sy}_m \eta_0 \quad (24\text{-و})$$

چنانکه قبلاً نیز اشاره شد، وجود ترک باعث کاهش سختی موضعی در محل ترک می شود. بنابراین در محدوده ترک با طول محدود، مقدار ممان خمشی اسمی کاهش یافته و تابع ممان خمشی در محل ترک پیوسته می باشد، به عبارت دیگر علی رغم وجود ترک (ترکی که بخشی از ضخامت صفحه را طی کرده باشد) مقدار ممان خمشی در طرفین ترک با هم برابرند و بافاصله گرفتن از ترک در امتداد عمود بر آن، اثر ترک بر تابع ممان خمشی کم می شود و در فاصله کاملاً دور، تأثیر وجود ترک بر تابع ممان خمشی از بین می رود. پارامترهای مؤثر در تعیین فاصله مزبور، طول و عمق ترک است. هر چه طول ترک بیشتر باشد، فاصله ای که اثر ترک بر ممان خمشی از بین می رود، بیشتر خواهد شد و برای ترک سرتاسری این فاصله تمام طول صفحه را در بر می گیرد و تأثیر

عمق ترک عمدتاً به صورت شدت تغییرات در تابع ممان خمشی در محدوده ترک ظاهر می شود. اگر فرض کنیم که اثر ترکی به طول $2C$ در فاصله $D = y_0 \pm \frac{b}{a} (2C)$ بر روی تابع ممان خمشی از بین می رود (y_0 مختصه مرکز ترک در امتداد عمود بر آن است و a و b ابعاد صفحه اند)، فاصله اخیر در مختصات بدون بعد به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{D}{b} = \eta_0 \pm \frac{2b}{ab} C \Rightarrow d = \eta_0 \pm 2c, \quad c = \frac{C}{a} \quad (25)$$

از آنجایی که مقدار B_{1m} در رابطه (۲۳ - الف و ب) دلخواه است می توانیم با فرض $Y_{1m}(\eta_0 - 2c) = 1$ (یا $Y_{1m}(\eta_0 + 2c) = 1$ برای $\eta_0 < 2c$) ضریب B_{1m} را تعیین کنیم:

$$B_{1m} = \frac{1}{\left[\text{sh} \beta_m (\eta_0 - 2c) + \frac{e_3 + e_4 E(\zeta) f(\zeta)}{e_5 E(\zeta) f(\zeta)} \text{sy}_m (\eta_0 - 2c) \right]} \quad (26)$$

که با جایگذاری در رابطه (۲۳ - الف و ب) و مرتب کردن آنها بر حسب η خواهیم داشت:

$$W_{1m} = F_1(\zeta) \text{sh} \beta_m \eta + F_2(\zeta) \text{sy}_m \eta \quad (27\text{-الف})$$

$$W_{2m} = e_1 F_1(\zeta) \text{sh} \beta_m (\eta - 1) + e_2 F_2(\zeta) \text{sy}_m (\eta - 1) \quad (27\text{-ب})$$

که در روابط اخیر $F_1(\zeta)$ و $F_2(\zeta)$ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$F_1(\zeta) \equiv \frac{e_5 E(\zeta) f(\zeta) \text{sm} \pi \zeta}{e_8 E(\zeta) f(\zeta) + e_9} \quad (28\text{-الف})$$

$$F_2(\zeta) \equiv \frac{[e_3 + e_4 E(\zeta) f(\zeta)] \text{sm} \pi \zeta}{e_8 E(\zeta) f(\zeta) + e_9} \quad (28\text{-ب})$$

و

$$e_6 \equiv \text{sh} \beta_m (\eta_0 - 2c) \quad (29\text{-الف})$$

$$e_7 \equiv \text{sy}_m (\eta_0 - 2c) \quad (29\text{-ب})$$

$$e_8 \equiv e_5 e_6 + e_4 e_7 \quad (ج- ۲۹)$$

$$e_9 \equiv e_3 e_7 \quad (د- ۲۹)$$

اگر روند اخیر را برای محدوده $(m\pi)^2 < \lambda^2$ در پیش بگیریم به روابط مشابهی می‌رسیم.

۳-۲- بحث بر روی توابع شکل مدهای ارتعاشی

توابعی که برای تعیین شکل مدهای ارتعاشی صفحه ترکدار با طول محدوده مطابق روابط (۲۷ - الف و ب) به دست آمدند، در محدوده $0 \leq \zeta \leq \zeta_0 - c$ و $\zeta_0 + c \leq \zeta \leq 1$ دقیق بوده ولی در محدوده $\zeta_0 - c \leq \zeta \leq \zeta_0 + c$ دقت آنها قابل بحث است. از آنجایی که در به دست آوردن توابع اخیر شرایط مرزی را در محل مرزهای خارجی و شرایط بین مرزی را در محل ترک (اعم از شرایط مرزی و بین مرزی هندسی و طبیعی) اعمال کردیم لذا توابع اخیر در محدوده یاد شده حکم توابع مقایسه‌ای را خواهند داشت و در این مرحله هدف ما بهبود بخشیدن توابع اخیر و دست یافتن به نتایج دقیق‌تر می‌باشد به عبارت دیگر، هدف سوق دادن توابع مقایسه‌ای مورد بحث در محدوده $\zeta_0 - c \leq \zeta \leq \zeta_0 + c$ به سمت توابع ویژه است.

با استفاده از رابطه (۲۲) و با اعمال «تابع شکل ترک» که به صورت یک تابع پیوسته در فاصله $0 \leq \zeta \leq 1$ تعریف شده و براساس واقعیت فیزیکی مسأله، ملاحظه می‌شود که در محدوده‌های بدون عیب $(\zeta_0 - c) \leq \zeta \leq \zeta_0$ و $\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0 + c$ مقادیر به دست آمده برای λ ثابتند، در حالی که مقدار آن در محدوده وجود ترک $(\zeta_0 - c) \leq \zeta \leq \zeta_0 + c$ تغییر می‌کند و چگونگی تغییرات آن در محدوده یاد شده بدین صورت است که از یک مقدار ماکزیمم $(\lambda_{\max} = \lambda_1)$ در دو انتهای ترک شروع شده و در وسط ترک به کمترین مقدار خود $(\lambda_{\min} = \lambda_d)$ در محدوده ترک می‌رسد که از حل معادله (۲۲) می‌توان تابع λ را در محدوده $0 \leq \zeta \leq 1$ به دست آورد (برای $(m\pi)^2 < \lambda^2$ نیز روند مشابهی به کار برده می‌شود) اما از آنجا که محاسبات کامپیوتری مطابق روش ذکر شده برای به دست آوردن λ وقت گیر است، می‌توان تابعی را برای λ تعریف کرد که علاوه بر داشتن دقت کافی، زمان محاسبات را نیز به طور چشمگیری کاهش دهد. اگر تابع λ را طوری در نظر بگیریم که در محدوده ترک متأثر از ترک بوده و در نواحی دیگر که کاملاً از ترک دورند،

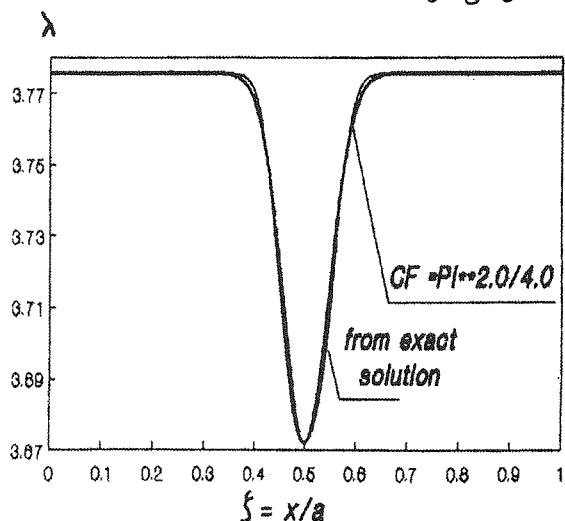
بدون تغییر باقی بماند، موجب افزایش دقت توابع شکل مدهای ارتعاشی صفحه معیوب خواهد شد. بنابراین این برای دست یابی به چنین تابعی می‌توان λ را به صورت تابع دو متغیره بر حسب ζ و η بیان کرد. این فرض به واقعیت فیزیکی مسأله نزدیک می‌باشد و اگر تابع تعریف کننده λ در جهت عمود بر ترک به صورت تابع نمایی بیان شود به طوری که ماکزیمم تغییر آن از λ_1 در محل ترک $(\eta = \eta_0)$ اتفاق بیافتد و در فاصله $\eta = \eta_0 \pm 2c$ مقدار تغییر آن از λ_1 به صفر کاهش یابد، اهداف بیان شده را برآورده می‌کند [۹]:

$$\lambda(\zeta, \eta) = \lambda(\zeta) + (\lambda_1 - \lambda(\zeta)) [1 - e^{-(\eta - \eta_0)^2 / c^2}] \quad (۳۰)$$

که $\lambda(\zeta)$ در رابطه (۳۰) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda(\zeta) = \lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_d) e^{-[(\zeta - \zeta_0)^2 / c^2]} CF \quad (۳۱)$$

که CF در رابطه (۳۱) ضریب تصحیح می‌باشد. در شکل (۳) تغییرات λ در محدوده $0 \leq \zeta \leq 1$ و $\eta = \eta_0$ که از طریق حل دقیق رابطه (۲۲) به دست آمده است با مقادیر λ به دست آمده از طریق رابطه پیشنهادی (۳۰) (برای یک حالت نمونه $2c = 0.2$ و $\eta_0 = 0.4$ و $\zeta_0 = 0.5$ و $\lambda_1 = 3.776$ و $\lambda_d = 3.671$) با هم مقایسه و مشاهده می‌شود که با انتخاب $CF = (\frac{\pi}{2})^2$ دقت بسیار خوبی حاصل می‌شود.



شکل (۳) مقایسه منحنی تغییرات λ به دست آمده از حل دقیق و رابطه

پیشنهادی (۳۰) با در نظر گرفتن ضریب تصحیح $CF = (\frac{\pi}{2})^2$

اگر توابع مدهای ارتعاشی با در نظر گرفتن رابطه (۳۰) به دست آید توابع حاصل توابع مقایسه ای خواهند بود، چرا که تمام شرایط مرزی و بین مرزی (هندسی و طبیعی) را ارضاء خواهند کرد. استفاده از رابطه (۳۰) در به دست آوردن توابع شکل مدهای ارتعاشی موجب می شود که علاوه بر ارضاء شرایط هندسی و طبیعی، نتایج از دقت بیشتری برخوردار باشند.

روشن است که اگر در محاسبه فرکانس های طبیعی در مدهای مختلف ارتعاشی صفحه، از توابع ویژه استفاده کنیم فرکانس های طبیعی محاسبه شده دقیق خواهند بود، در غیر این صورت با انتخاب توابعی از نوع دیگر، مقداری تقریب در محاسبات وجود خواهد داشت. از آنجایی که تأثیر ترک های نسبتاً کوچک بر فرکانس های طبیعی کم است، بنابراین برای برآورد چنین تغییرات جزئی در فرکانس های طبیعی، لازم است که توابع انتخاب شده برای شکل مدهای ارتعاشی تا حد امکان به توابع ویژه نزدیک باشند. توابع شکل مدهای ارتعاشی (۲۷ - الف و ب) با در نظر گرفتن λ به صورت رابطه (۳۰)، از نظر دقت به توابع ویژه بسیار نزدیک بوده و دقت آنها به مراتب از توابع مقایسه ای بیشتر است. لذا این توابع جدید را «توابع مقایسه ای اصلاح شده» می نامیم [۹].

۳-۳- استفاده از «توابع مقایسه ای اصلاح شده» در محاسبه فرکانس های طبیعی صفحه مستطیلی با ترکی به طول محدود

انرژی جنبشی و پتانسیل ماکزیمم مربوط به صفحه مستطیلی در مختصات بدون بعد به صورت زیر به دست می آید [۹]:

$$K.E. = \frac{1}{2} M \phi \omega^2 a^4 \iint_A W^2 d\zeta d\eta = (K.E.)^* \omega^2 \quad (22)$$

$$P.E. = \frac{DE}{2\phi} \iint_A \left[\phi^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \right)^2 + \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial \eta} \right)^2 \right] d\zeta d\eta \quad (23)$$

فرکانس طبیعی زاویه ای، ω ، را می توان با در نظر گرفتن روابط (۲۲) و (۲۳) به دست آورد:

$$\omega = \sqrt{\frac{P.E.}{(K.E.)^*}} \quad (24)$$

رابطه (۳۳) زمانی برای یک صفحه ترکدار قابل اعمال است که انرژی پتانسیل الاستیک ذخیره شده در موضع ترک نیز به انرژی پتانسیل کلی صفحه اضافه شده باشد. انرژی پتانسیل ذخیره شده در محل ترک با فرض باز بودن آن، به صورت زیر قابل محاسبه است [۹]:

$$dP_c = M_{\eta} \theta_{\zeta} d\zeta |_{\eta=\eta_0} \quad (35)$$

در رابطه (۳۵) M_{η} گشتاور خمشی است که موجب باز شدن ترک می شود و θ_{ζ} مقدار ناپیوستگی شیب صفحه در طرفین ترک و در موقعیت ζ می باشد که بعد از جایگزینی مقادیر در رابطه (۳۵) خواهیم داشت:

$$Pd_{\eta=\eta_0} = \frac{6HD_E \alpha_{bb}}{b^2 \phi^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \right)^2 E(\zeta) f(\zeta) d\zeta |_{\eta=\eta_0} \quad (36)$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در صفحه معیوب از مجموع انرژی های پتانسیل ذخیره شده در دو ناحیه (۱) و (۲) و انرژی پتانسیل ذخیره شده در محل ترک به دست می آید:

$$P = (P.E.)_{1m} + (P.E.)_{2m} + P_c \quad (37)$$

انرژی جنبشی مینا^{۱۴} از مجموع انرژی جنبشی مینا در دو ناحیه (۱) و (۲) به دست می آید:

$$K^* = (K.E.)^*_{1m} + (K.E.)^*_{2m} \quad (38)$$

با در نظر گرفتن روابط (۳۷) و (۳۸) فرکانس های طبیعی صفحه به صورت زیر به دست می آید:

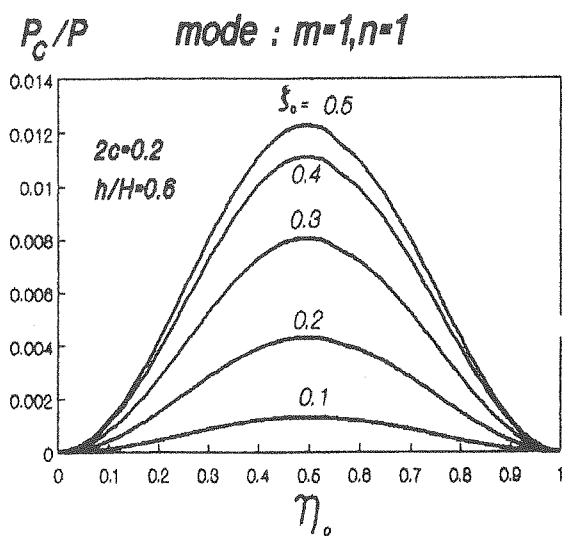
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P}{K^*}} \quad (39)$$

۳-۴- ارائه چند نمونه از نتایج به دست آمده

صفحه ترکداری را همانند شکل (۱) برای حالت های مختلف ترک از نظر ابعاد و موقعیت مورد بررسی قرار می دهیم. ابعاد و خواص مکانیکی صفحه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

در شکل های (۴ - الف) و (۴ - ب) تأثیر ترک با طول نسبی 0.2 و عمق نسبی 0.6 بر فرکانس های اول و دوم نشان داده شده است، چنانکه از این شکل ها معلوم است وجود ترک با طول محدود در موقعیت های $\eta_0 = 0$ و $\eta_0 = 1$ هیچگونه تأثیری بر فرکانس های طبیعی ندارد که علت آن وجود تکیه گاه های ساده در آن نقاط است. در شکل (۴ - ب) علاوه بر دو موقعیت فوق در $\eta_0 = 0.5$ نیز وجود ترک تأثیری بر فرکانس طبیعی دوم نمی گذارد و این امر ناشی از وجود خط گرهی^{۱۵} در $\eta_0 = 0.5$ است و با نتایج مرجع [۱۳] سازگار است.

نکته دیگری که بایستی مورد توجه قرار گیرد، بررسی تأثیر ζ_0 است. از شکل های (۴ - الف) و (۴ - ب) ملاحظه می شود که به ازای هر $\eta_0 = \text{constant}$ ، با افزایش ζ_0 از 0.1 تا 0.5 تأثیر ترک بر فرکانس های طبیعی نیز بیشتر می شود و از طرف دیگر به ازای هر ζ_0 ، ماکزیمم تأثیر بر فرکانس های طبیعی زمانی رخ می دهد که η_0 در وسط دو خط گرهی متوالی قرار داشته باشد. در شکل (۵) تأثیر موقعیت و ابعاد ترک بر میزان «انرژی پتانسیل نسبی» $(\frac{P_c}{P})$ ذخیره شده در محل ترک در مد ارتعاشی اول نشان داده شده است.



شکل (۵) تغییرات انرژی پتانسیل نسبی ذخیره شده در برابر η_0 به ازای مقادیر مختلف ζ_0 در مد ارتعاشی اول.

چنانکه از این شکل معلوم است به ازای هر η_0 ، با افزایش ζ_0 از 0.1 تا 0.5 نسبت $(\frac{P_c}{P})$ افزایش یافته و بیشترین مقدار آن در مرکز صفحه ($\zeta_0 = \eta_0 = 0.5$) اتفاق می افتد.

$$E = 200 \text{ GPa}$$

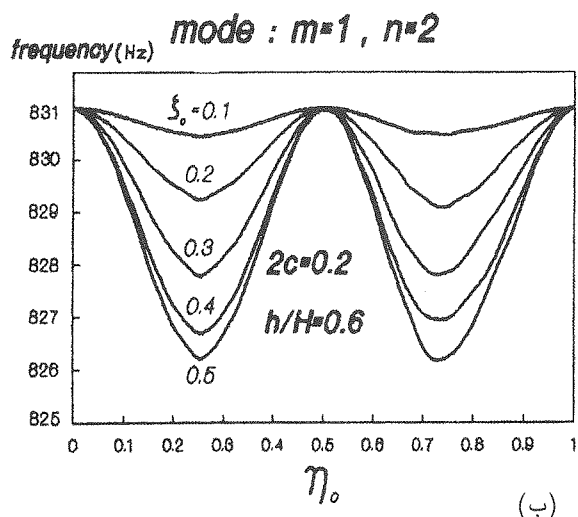
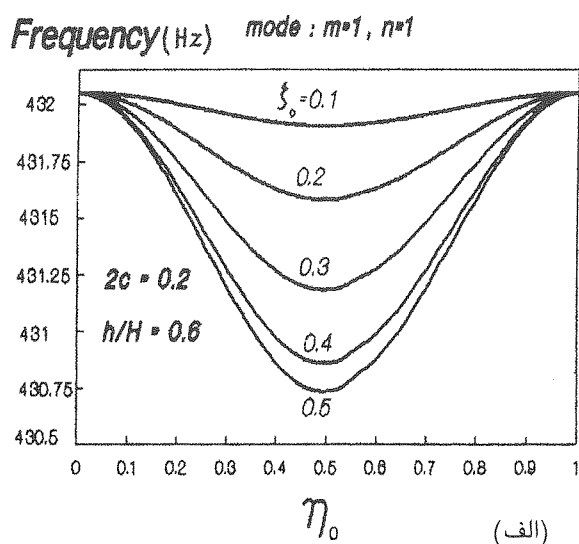
$$\nu = 0.3$$

$$\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 18 \text{ Cm}$$

$$b = 27 \text{ Cm}$$

$$H = 4 \text{ mm}$$



شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی اول و دوم صفحه با ترکی به مشخصات $2c = 0.2$ و $\zeta_0 = 0.6$ در برابر تغییرات η_0 به ازای مقادیر مختلف ζ_0

وجود ترک در صفحه موجب کاهش سختی موضعی صفحه در محل ترک می شود و هر چه ابعاد ترک بزرگتر بوده و از خطوط گرهی دورتر باشد، اثر بیشتری بر روی فرکانس های طبیعی صفحه خواهد داشت. از آنجایی که تأثیر ترک های نسبتاً کوچک بر فرکانس های طبیعی کم است بنابراین برای برآورد تغییرات جزئی در فرکانس های طبیعی لازم است که توابع انتخاب شده تا حد امکان به توابع ویژه نزدیک باشند و از این جهت است که استفاده از توابع مجاز به علت تقریب های بسیار بزرگی که در مسأله وارد می کند، توصیه نمی شود. چرا که تأثیر ترک در قبال آنها بسیار ناچیز است و حتی در بعضی مواقع جواب های به دست آمده برای فرکانس های طبیعی صفحه معیوب، بزرگتر از فرکانس های طبیعی صفحه سالم است که بر خلاف واقعیت فیزیکی بوده و کاملاً غلط می باشد.

توابعی که از نظر دقت و منطبق بودن بر واقعیت، حد وسط توابع ویژه و توابع مجاز هستند توابع مقایسه ای می باشند. استفاده از این توابع نیز خطاهای غیرقابل قبولی در محاسبات وارد می کند. به عنوان مثال، وجود ترکی با طول نسبتاً کوچک و عمق نسبتاً زیاد در صفحه منجر به واگراشدن جواب ها می شود. ولی برای ترکهایی با طول بیشتر و عمق کمتر، نتایج به دست آمده بهبود می یابند. بنابراین آنچه بیان شد در حالت کلی نمی توان از توابع مجاز و مقایسه ای ذکر شده استفاده کرد و از طرف دیگر دست یابی به توابع ویژه کاری بسیار دشوار است. بنابراین این استفاده از توابع جدیدی به نام «توابع مقایسه ای اصلاح شده» که در این مقاله برای اولین بار پیشنهاد و مورد استفاده واقع شده اند و از نظر دقت به توابع ویژه بسیار نزدیک می باشند، دارای مزیت خاصی خواهد بود. عمده ترین ویژگی های این توابع عبارتند از:

- عاری از معایب ذکر شده برای توابع مجاز و مقایسه ای هستند؛

- دارای دقت بسیار خوب بوده و در سطح مطلوب و خیلی نزدیک به توابع ویژه هستند؛

- به دست آوردن آنها ساده تر از توابع ویژه می باشد.

نتایج به دست آمده برای تغییرات فرکانس طبیعی و انرژی پتانسیل ذخیره شده در محل ترک با در نظر گرفتن «توابع مقایسه ای اصلاح شده»، نشان می دهند که هرچه توانایی ذخیره انرژی پتانسیل در محل ترک P_c بیشتر باشد، کاهش فرکانس طبیعی نیز به همان نسبت

بیشتر می شود. بنابراین موضع ترک یکی از پارامترهای بسیار مهم در چگونگی کاهش فرکانس های طبیعی صفحه معیوب می باشد.

فهرست علائم و اختصارات

a, b	ابعاد صفحه
2C	طول ترک
2c	طول نسبی ترک
$c(\cdot) = \cos(\cdot)$	
$ch(\cdot) = \cosh(\cdot)$	
$D_E = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$	سختی خمشی صفحه
E	مدول الاستیسیته
توابعی که در به دست آوردن توابع شکل مدهای ارتعاشی ظاهر می شوند.	
$E(\zeta), e_1, \dots, e_n$	
$F_1(\zeta), F_2(\zeta)$	تابع شکل ترک
$f(\zeta)$	تابع شکل ترک
f	فرکانس طبیعی صفحه برحسب هر تر
تابع بدون بعد که در محاسبه کمپلاینس خمشی استفاده می شود	
g_b	
H	ضخامت صفحه
$h(x)$	عمق ترک بر حسب تابعی از x
h_0	عمق مرکز ترک
k	فاکتور شدت تنش برای ترک با طول محدود
k_∞	فاکتور شدت تنش برای ترک با طول بی نهایت
K.E.	انرژی جنبشی
K^*	انرژی جنبشی مبنا
M	جرم واحد سطح صفحه
$M_{1\eta, \dots}$	ممان خمشی
P.E.	انرژی پتانسیل
P_c	انرژی پتانسیل در محل ترک
S	تکیه گاه ساده
$s(\cdot) = \sin(\cdot)$	
$sh(0) = \sinh(\cdot)$	
T(t)	تابع وابسته به زمان
$V_{1\eta, \dots}$	نیروی برشی
$w, W, W_{1m, \dots}$	خیز صفحه
x, y, z	مختصات فضایی صفحه
x_0, y_0	مختصات مرکز ترک
$y_m(\eta), \dots$	تابع شکل مد ارتعاشی در امتداد η
α_{bb}	کمپلاینس خمشی بدون بعد
α_{bb}^0	کمپلاینس خمشی بدون بعد در مرکز ترک

زیر نویس ها

- 1 - Comparison functions
- 2 - Modified comparison functions
- 3 - Local flexibility
- 4 - Stress - intensity factor
- 5 - Compliance
- 6 - Eigenfunctions
- 7 - Vibration analysis
- 8 - Admissible functions
- 9 - Rayleigh - Ritz method
- 10 - Rotary inertia
- 11 - Shear deformation
- 12 - Levy - type solution
- 13 - Eigenvalue problem
- 14 - Reference kinetic energy
- 15 - Nodal line

متغیرهایی که از حل معادله ارتعاشی صفحه ظاهر می شوند.	β_m, γ_m
مختصات بدون بعد صفحه	ζ, η
مختصات بدون بعد مرکز ترک	ζ_0, η_0
مقدار ناپیوستگی در شیب طرفین ترک	θ
پارامترهایی که از حل معادله ارتعاشی صفحه ظاهر می شوند.	$\lambda^2, \lambda_-^2, \lambda_+^2$
نسبت پواسون	ν
عمق نسبی ترک سرتاسری	ξ
تنش خمشی اسمی در محل ترک و در سطح صفحه	σ_b^0
تنش خمشی اسمی در محل ترک سرتاسری و در سطح صفحه	$\sigma_{b\infty}$
نسبت ابعاد صفحه	ϕ
فرکانس طبیعی زاویه ای صفحه	ω

مراجع

- [1] D. Young, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 448-452, 1950.
- [2] A. W. Leissa, O. G. Mcgee and C. H. Huang, "Vibration of circular plates having V-notches or sharp radial cracks", Journal of Sound & Vibration, Vol. 161 (2), pp. 227-239, 1993.
- [3] H. P. Lee, "Fundamental frequencies of annular plates with internal cracks", Computers & Structures, Vol. 43, No. 6, pp. 1085-1089, 1992.
- [4] Guan - Liang Qian, Song - Nian Gu and Jie-Sheng Jiang, "A finite element model of cracked plates and application to vibration problems", Computers & Structures, Vol. 39, No. 5, pp. 483-487, 1991.
- [5] D. L. Prabhakara and P. K. Datta, "Vibration and static stability characteristic of rectangular plates with a localized flaw", Computers & Structures, Vol. 49, No. 5, pp. 825-836. 1993.
- [6] H. P. Lee and S. P. Lim, "Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inertia", Computers & Structures, Vol. 49, No.4, pp. 715-718, 1993.
- [7] J. R. Rice, N. Levy, "The part-through surface crack in an elastic plate", Journal of Applied Mechanics, Vol. 3, pp. 183-194, 1972.
- [8] B. Gross and J. E. Srawley, "Stress-intensity factors for single edge notch specimens in bending or combined bending and tension by boundary collocation of a stress function", NASA Technical Note D. 2603, 1965.
- [9] رضایی، موسی، توسعه کاربرد آنالیز ارتعاشی برای عیب یابی صفحات تحت بارهای خارجی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۷۴.
- [10] A. C. Ugural, Stresses in Plates and Shells, McGraw-Hil, 1981.
- [11] Leonard Meirovitch, "Analytical Methods in Vibrations", Macmillan Publishing Co. 1967.
- [12] D. J. Gorman, Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier North Holland Inc., 1982.
- [۱۳] اسماعیل زاده خادم، سیامک و رضایی، موسی، «تعیین موقعیت و عمق ترک سرتاسری در صفحات مستطیلی با استفاده از آنالیز ارتعاشی، مجله بین المللی مهندسی دانشگاه علم صنعت ایران، شماره ۱ - ب، تابستان ۱۳۷۷.