بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری مدل WAM

مسعود شفیعی
دانشیار

پاکنوش کریم آقایی
دانشجوی دکتری

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله برای سیستم‌های دو بعدی گسسته متغیر با زمان (غیر ایستا) با استفاده از مدل یك بعدی (WAM) شروطی به صورت لازم و کافی برای کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه (global) ارائه می گردد. سپس برای حالت ساده ترمدل GR غیرمتغیر با زمان در فرم WAM شرط های لازم و کافی به دست آورده و نحوه ارتباط آنان را با مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری محلی (Local) در این مدل نشان می دهیم و در نهایت سعی می شود تا مطالب فوق به مدل های FM و FTR تعمیم داده شوند.

Controllability and Observability of the Wave Advance Model

M. Shafiee
Associate Professor

P. Karimaghaee
Ph.D Student

Electrical Engineering Department,
Amirkabir University of Technology

Abstract

In this paper we consider the global controllability and observability of non-stationary 2-D systems, and have presented the necessary and sufficient conditions for them. We then look at the Wave Advance model as a 1-D representation of 2-D systems and extend the above theory to them and compare the result. For the special case of stationary, we derive the less complicated results and state the relationship between local and global controllability and observability. Finally we consider the above theory for the other models such as FM and FTR models.

کلمات کلیدی

سیستم های دو بعدی، مدل (WAM)، کنترل پذیری و رؤیت پذیری، گرامیانها.

مقدمه

در سالیان اخیر با پیشرفت چشمگیری که در علم کامپیوتر بوجود آمده، گرایش به استفاده از الگوریتم های پردازش چند بعدی نیز به صورت روزافزون زیادتر شده و در کاربردهای مختلفی نظیر پردازش سیگنال های تصویر، زلزله، ماهواره، پردازش امواج مورد مطالعه در توموگرافی و غیره از آن استفاده می شود [1]. با این وجود هنوز نکات مبهم و حل نشده زیادی چه در زمینه مدل سازی [15] - [13] و چه در زمینه تعیین پایداری [17] - [16] و مشخصه های دیگر این الگوریتم ها وجود دارد و آنچه مسلم است عدم توانایی یک مدل در ارائه شیوه برخورد مناسب با تمامی مسائل و کاربردها می باشد که بدین جهت مدل های مختلفی نظیر مدل FM[13]، مدل Roesser [6] مدل Attasi [14] مدل FTR [15] و مدل های دیگر دو بعدی ارائه گردید. با وجود تفاوت های ظاهری در تمامی این مدل ها یک نکته در آنان مشترک می باشد و آن عدم توانایی در تبیین مفهوم حالت برای یک سیستم دو بعدی می باشد. مدلی که در دهه ۸۰ میلادی تحت عنوان مدل WAM [2] معرفی گردید، دارای این خصوصیت مهم می باشد که به طور مستقیم با مفهوم حالت در یک سیستم دو بعدی کار می کند. از این رو ابعاد این مدل با زمان افزایش می یابد و به همین دلیل بررسی جنبه های مختلف آن نیز با مشکل همراه خواهد بود. در مراجع [5-2] و [11] بعضی از خصوصیات این مدل به صورت مستقیم یا غیرمستقیم مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله به مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه (global) در فرم WAM مدل های FM, GR و FTR که سه مدل اصلی مورد استفاده در سیستم های دو بعدی هستند، می پردازیم. باتوجه به تعریفی که از حالت همه جانبه در مرجع [11] شده است، در این مقاله می بینیم که حالت معرفی شده در فرم WAM می تواند به عنوان حالت همه جانبه تلقی شود و باتوجه به این مسئله که فرم WAM یک مدل دو بعدی در واقع تبدیل آن مدل به یک مدل یک بعدی با ساختار متغیر با زمان می باشد، لزوم بکارگیری مفاهیمی مشابه با آنان در سیستم های یک بعدی متغیر با زمان گسسته روشن تر می گردد. در این مقاله مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه برای کنترل پذیری و رؤیت پذیری حالت WAM تعریف شده که با مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری تعریف شده در [7] که فقط به جهت یافتن تحقق مینیمال استفاده شده است، به طور کلی متفاوت می باشد. در بخش های مختلف این مقاله مطالب ارائه شده بدین صورت می باشد که در بخش اول بعد از بحث مقدماتی راجع به فرم WAM مدل GR به تعریف مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری مدل GR می پردازیم و در ادامه به کمک این تعاریف در سیستم های یک بعدی متغیر با زمان، تعریف مناسبی جهت کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه فرم WAM انجام داده و شروطی به صورت لازم و کافی جهت کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه یک سیستم دو بعدی متغیر با زمان به دست خواهیم آورد. برای حالت غیرمتغیر با زمان این شروط ساده تر شده و ارتباط آنان با مفاهیم متناظرشان در مدل اولیه GR روشن می گردد.

در بخش دوم در مورد مفاهیمی بحث خواهد شد که تحت عنوان گرامیان های کنترل پذیری و رؤیت پذیری مدل WAM قابل تعریف می باشند و از این طریق نیز شرط های لازم و کافی برای کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه فرم WAM به دست خواهد آمد. در بخش سوم کارهایی را که در بخش های اول و دوم انجام شده به فرم WAM مدل های FM و FTR بسط داده و در انتها نیز با نتیجه گیری از این سه فصل به کارهای آیندگان اشاره خواهد شد.

I. فرم WAM مدل GR: کنترل پذیری و رؤیت پذیری

مدل GR متغیر با زمان را به صورت زیر در نظر می گیریم [6]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j)$$

$$y(i,j) = [c^1 \quad c^2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

که:

$$B_1 \in R^{n_1 \times p}, B_2 \in R^{n_2 \times p}, A_1 \in R^{n_1 \times n_1}, A_2 \in R^{n_1 \times n_2}, A_3 \in R^{n_2 \times n_1}, A_4 \in R^{n_2 \times n_2}$$

$$x^h \in R^{n_1},\ x^v \in R^{n_2},\ y \in R^m,\ u \in R^p,\ c^1 \in R^{m\times n_1},\ c^2 \in R^{m\times n_2}$$

در [5] با تعریف بردارهای زیر:

$$\phi(n) = \mathrm{Col}\,[x^v(0,n),\ x^h(1,n-1),\ x^v(1,n-1),\ \ldots,\ x^h(n,0)]$$

$$V(n) = \mathrm{Col}\,[u(0,n),\ u(1,n-1),\ \ldots,\ u(n,0)]$$

$$\mu(n) = \mathrm{Col}\,[y(0,n),\ y(1,n-1),\ \ldots,\ y(n,0)]$$

$$f(n) = \mathrm{Col}\,[x^h(0,n),\ x^v(0,n)] \qquad (1.2)$$

فرم WAM مدل GR ارائه شده توسط معادله (1.1) بدین صورت خواهد شد [5]:

$$\phi(n+1) = A(n)\,\phi(n) + B(n)\,V(n) + E(n)\,f(n)$$

$$\mu(n) = C(n)\,\phi(n) + D(n)\,V(n) + H(n)\,f(n) \qquad (1.3)$$

که:

$$\phi(n) \in R^{n(n_1+n_2)},\ V(n) \in R^{p(n+1)},\ \mu(n) \in R^{m(n+1)},\ f(n) \in R^{n_1+n_2}$$

$$A(n) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 & \\ A_2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & A_3 & A_4 & 0 & \\ 0 & A_1 & A_2 & 0 & \\ & & & & A_3 \\ & & & & A_1 \end{bmatrix},\quad B(n) = \begin{bmatrix} B_2 & 0 & 0 & \\ B_1 & 0 & 0 & \\ 0 & B_2 & 0 & \\ 0 & B_1 & 0 & \\ & & & B_2 \\ & & & B_1 \end{bmatrix}$$

$$C(n) = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & c^1 & c^2 & 0 & \\ 0 & 0 & c^1 & c^2 & \\ 0 & 0 & 0 & c^1 & \\ & & & & c^1 \end{bmatrix},\quad E(n) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ A_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ & A_4 \\ & A_2 \end{bmatrix}$$

$$D(n) = \mathrm{diag}\,\{D\} \qquad H(n) = \mathrm{diag}\,\{c^1\ \ c^2\}$$

همانطوری که از رابطه (1.3) مشخص است، حتی اگر سیستم (1.1) نیز غیرمتغیر با زمان باشد، فرم (1.3) به صورت یک بعدی متغیر با زمان خواهد شد که ابعاد آن با زمان افزایش می‌یابد.

I.II رؤیت‌پذیری یک سیستم دو بعدی با استفاده از مدل WAM

در این بخش با استفاده از تعریف‌های رؤیت‌پذیری در یک سیستم دو بعدی غیرمتغیر با زمان و رؤیت‌پذیری یک سیستم یک بعدی متغیر با زمان تعریف مناسبی برای مفهوم رؤیت‌پذیری در مدل WAM ارائه خواهیم کرد و علت آن نیز بدین خاطر است که مدل یک سیستم دو بعدی خود به صورت یک سیستم یک بعدی متغیر با زمان می‌باشد.

همانگونه که در مراجع [6] و [7] بیان شده، رؤیت‌پذیری محلی مدل GR در رابطه (1.1) در حالت غیرمتغیر با زمان بدین صورت تعریف می‌شود:

تعریف (1.1) [6]: سیستم (1.1) را رؤیت‌پذیر محلی گوییم، اگر و فقط اگر که هر حالت دلخواه به عنوان حالت اولیه سیستم قرار گیرد و تمامی شرایط مرزی صفر باشند، آنگاه با استفاده از هر ورودی دلخواه و هر $(i, j) \geq (0, 0)$ خروجی $y(i, j)$ مخالف خروجی به ازاء شرط اولیه صفر و همان ورودی‌ها گردد.

تعریف (1, 2) [8]: سیستم $X(k+1) = A(k)\,X(k) + B(k)U(k)$ و $Y(k) = C(k)\,X(k)$ را در لحظه k رؤیت‌پذیر گوییم، اگر و فقط اگر حالت اولیه سیستم در لحظه k_0 (یعنی $x(k_0)$) را بتوان از روی خروجی‌های $y(k)$ در لحظات $k_0 \leq k < k_1$ ($k_1 =$ محدود) به دست آورد. اگر سیستم در تمامی لحظات $k_0 \in N$ رؤیت‌پذیر باشد، آنگاه آن را رؤیت‌پذیر کامل گویند.

توضیح ۱: در تعریف فوق علت محدود در نظر گرفتن k_1 این است که در غیر این صورت به ازاء هیچ بازه زمانی $[k_0, k_1]$ قادر نخواهیم بود که حالت اولیه را از روی خروجی‌های سیستم به دست آوریم و این خود با مفهوم رؤیت‌پذیری مغایرت دارد.

توضیح ۲: از تعریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای تعیین رؤیت‌پذیری سیستم می‌توان از طریق نگاشت بین حالت سیستم و خروجی عمل کرد. بدین صورت که بایستی به ازاء یک k_1 محدود تنها کرنل (Kernel) این نگاشت صفر باشد یا به بیان دیگر یک نگاشت پوششی (Injective) باشد. [7]

باتوجه به اینکه $\phi(n)$ در واقع حالت سیستم در مفهوم کلی خود می‌باشد. می‌توان از تعاریف فوق به منظور تعریف رؤیت‌پذیری همه جانبه سیستم (1.1) از روی سیستم (1.3) استفاده نمود.

تعریف (1.3): مدل (1.3) را در لحظه k_0 رؤیت‌پذیر

همه جانبه گوییم، اگر و فقط اگر حـالت $\phi(k_0)$ را بتوان از روی خـروجی های $\mu(k)$ در لحظات $k_0 \le k \le k_1$ (k_1 محدود) تحت شرایط مرزی $f(k) = 0$ به دست آورد.

از آنجایی که با فرض متغیر با زمان بودن سیستم دو بعدی، تغییری در چارچوب مدل WAM بوجود نمی‌آید، تعریف فـوق برای حالت متـغیر با زمـان هـم قـابل ارائه است.

قضیه (1.1): شرط لازم و کافی برای رؤیت پذیری همه جانبه مدل (1.3) در لحظه k_0 عبارت است از:

$$\exists\, k_1 \ge k_0 \qquad S.t \qquad Rank\,(H(k_1, k_0)) = (n_1 + n_2)\, k_0 \tag{1.6}$$

که

$$H(k_1, k_0) = \begin{bmatrix} C(k_1)\,A(k_1-1) \ldots A(k_0) \\ C(k_1-1)\,A(k_1-2) \ldots A(k_0) \\ \vdots \\ C(k_0) \end{bmatrix}$$

اثبات: اگر به رابطه بین $\mu(n)$ و $\phi(k_0)$ (خروجی و حالت سیستم در لحظه اولیه k_0) توجه کنیم، داریم:

$$\mu(n) = C(n)\,\phi(n) = C(n)\,A(n-1)\,A(n-2) \ldots A(k_0)\,\phi(k_0) \qquad n \ge k_0 \tag{1.7}$$

با جایگزینی مقادیر k_0 تا k_1 به جای n خواهیم داشت:

$$\psi(k_1, k_0) = \begin{bmatrix} C(k_1-1)\,A(k_1-1) \ldots A(k_0) \\ C(k_1-2)\,A(k_1-2) \ldots A(k_0) \\ C(k_0) \end{bmatrix} \phi(k_0) \tag{1.8}$$

خلاصه تعریف فوق به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\Rightarrow \psi(k_1, k_0) = H(k_1, k_0)\,\phi(k_0) \tag{1.9}$$

جایی که:

$$\psi(k_1, k_0) = Col\,[\,\mu(k_1), \mu(k_1-1), \ldots, \mu(k_0)] \tag{1.10}$$

از رابطه (1.9) مـشـخص می‌شـود کـه شـرط لازم و کـافی برای رؤیت پذیری همـه جـانبـه (1.3) در لـحظه k_0، امکان وجود جواب غیر صفر از معادله (1.9) می باشد که بدین منظور شرط رابطه (1.6) لااقل برای یک $k_1 \ge k_0$ باید برآورده شود.

نتیجه (1.2): شـرط لازم و کـافی برای رؤیت پذیری کامل مدل متغیر باز مان (1.3) عبارت است از:

$$\forall k \in N\ \exists\, k_1 \in N\ st.\ k_1 \ge k,\ Rank\,(H(k_1, k)) = k\,(n_1 + n_2) \tag{1.11}$$

از قـضـیـه (1.1) و نتـیـجـه (1.2) می توان جـهـت رؤیت پذیری همه جـانبـه مـدل های مـتـغـیـر با زمـان و همـچنین غیرمتـغیر با زمان GR استفاده نمـود. در ادامه سـعی می‌کنیم که برای حالت غیرمتـغیر با زمان مفهوم رؤیت پذیری مـحلی مـدل GR را به مـتناظرش در فـرم WAM مدل GR ربط دهیم.

قضیه (1.3): فـرم WAM مـدل GR رؤیت پذیر همـه جانبه است. اگر و فقط اگر مدل GR غیرمتـغیر با زمان اولیه رؤیت پذیر محلی باشد.

اثبات: ابتدا باید رابطه بین $\mu(n)$ و $\phi(n)$ را بر حسب ماتریس انتقال در مدل GR یعنی ماتریس $A^{i,j}$ بنویسیم:

$$\mu(n) = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & C & & \\ & & C & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(0, n) \\ x^v(0, n) \\ \vdots \\ x^h(n, 0) \\ x^v(n, 0) \end{bmatrix} = \notin(n)\, R_k(n)\, \tilde{\phi}(k) \tag{1.12}$$

که

$$\notin(n) = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & C & & \\ & & C & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad A_k(n) = \begin{bmatrix} A^{0,n-k} & & 0 & 0 \\ & \frac{A^{1,n-k-1}}{2} & \frac{A^{0,n-k}}{2} & \\ \frac{A^{n-k,0}}{(k+1)(n_1+n_2)} & & \frac{A^{n-k-1,1}}{(k+1)(n_1+n_2)} & \frac{A^{0,n-k}}{(k+1)(n_1+n_2)} \\ & 0 & \frac{A^{n-k,0}}{(k+1)(n_1+n_2)-1} & \\ 0 & \frac{A^{n-k0}}{(k+1)(n_1+n_2)-1} & & A^{n-k,0} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\phi}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi(k) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_1 \\ \\ \}n_2 \end{matrix} \tag{1.13}$$

می‌دانیم که اگر در سطرهای دوم و سوم و ... ماتریس $A_k(n)$ به ترتیب اعداد $3, 2, ...$ ضرب کنیم، رتبه آن تغییر نمی‌کند. اگر ماتریس حاصل از این عمل را در (n) از طرف راست ضرب کرده و آن را $F_k(n)$ بنامیم، برطبق قضیه (1.3) برای رؤیت پذیری سیستم باید داشته باشیم که $\exists n \geq k \text{ s.t } \mathrm{Rank}\,(F_k(n)) = k(n_1+n_2)$. گر به عناصر غیر صفر بلوک‌های ستونی $F_k(n)$ دقت کنیم. می‌بینیم که بدین صورت است:

$$f_k(n) = \begin{bmatrix} CA^{n-k,0} \\ CA^{n-k-1,1} \\ CA^{0,n-k} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

از طرفی می‌بینیم که $\mathrm{Rank}\,(F_k(n)) = n_1 + n_2$ می‌باشد، اگر و فقط اگر:

$$\mathrm{Rank}\,(f_k(n)) = n_1 + n_2 \tag{1.15}$$

طبق قضیه کلی هامیلتون دو بعدی [6] می‌دانیم که به ازاء $(i, j) > (n_1, n_2)$ رتبه ماتریس $\mathrm{Col}\,[CA^{i,j}]$ تغییر نخواهد کرد.

بنابراین حداکثر رتبه $f_k(n)$ می‌تواند $n_1 + n_2$ باشد [6] و در این حالت رتبه $f_k(n)$ با رتبه ماتریس رؤیت پذیر محلی [6] مدل (1.1) برابر است. بنابراین رؤیت پذیری همه جانبه در مدل WAM رؤیت پذیری در مدل GR اولیه را نتیجه می‌دهد. برای اثبات قسمت عکس می‌بینیم که اگر رتبه ماتریس رؤیت پذیری مدل GR کامل باشد، در آن صورت چون عناصر ماتریس رابطه (1.14) از عناصر این ماتریس تشکیل شده است، پس با انتخاب K1 به اندازه کافی بزرگ رتبه ماتریس رابطه (1.14) کامل خواهد گردید.

I.III کنترل پذیری سیستم‌های دو بعدی با استفاده از فرم WAM مدل GR

در اینجا به علت مشابهتی که بین مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری وجود دارد، شاید به نظر برسد که باتوجه به دوگانگی این دو مفهوم می‌توان به طریق مشابه با حالت رؤیت پذیری برای کنترل پذیری مدل WAM نیز اقدام کنیم، ولی خواهیم دید که در زمینه ارتباط بین مفاهیم کنترل پذیری فرم WAM مدل GR و کنترل پذیری محلی GR این تشابه کامل نیست.

تعریف (8.4) [6]: سیستم (1.1) را کنترل پذیر محلی گوییم، اگر و فقط اگر تمام شرایط مرزی را صفر کرده باشیم، بتوانیم ورودی‌های $u(i, j)$ که $(i, j) > (0, 0)$ را به گونه‌ای تعیین کنیم تا حالت سیستم در (i, j) برابر با هر T_0 دلخواه شود یعنی $T(i, j) = T_0$

تعریف (1.5) [8]: سیستم (1.5) را در لحظه K_0 کنترل پذیر گوییم، اگر و فقط اگر به ازاء هر بردار x_{k0} و به ازاء یک $N \geq k_0$ بتوانیم ورودی‌های $u(k), u(k_0+1), ..., u(k_0+N-1)$ را طوری تعیین کنیم که تحت این ورودی‌ها، حالت x_{k0} به حالت مبداء منتقل گردد. اگر سیستم (1.5) به ازاء تمام لحظات k_0 کنترل پذیر باشد، آن را کنترل پذیر کامل گوییم.

تعریف (1.6): سیستم متغیر با زمان (1.3) را در لحظه k_0 کنترل پذیر همه جانبه گوییم اگر و فقط اگر به ازاء هر دو بردار $\phi_{k_0} \in IR^{k0(n_1+n_2)}$ و $\phi_{k_0+N} \in IR^{(k0+N)(n_1+n_2)}$ بتوانیم ورودی‌های $V(k_0+N-1)$ و .... و $V(k_0)$ را به گونه‌ای تعیین نماییم که تحت شرایط مرزی صفر با اعمال این ورودی‌ها به سیستم (1.3) بتوانیم ϕ_{k_0} را به ϕ_{k_0+N} منتقل کنیم.

حال باتوجه به تعریف (1.6) می‌توانیم شروطی جهت تعیین کنترل پذیری همه جانبه سیستم متغیر با زمان (1.3) به دست آوریم.

قضیه (1.4): شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری همه جانبه فرم WAM مدل GR متغیر با زمان (1.3) در لحظه k_0 عبارت است از:

$$\exists N: \mathrm{Rank}\,(W(k_0, N)) = k_0(n_1 + n_2) \tag{1.16}$$

$$k_0(n_1 + n_2) \leq P\left(k_0 + \frac{(N+1)}{2}\right) \tag{1.16.1}$$

که

$$W(k_0, N) = [S(k_0+N-1)B(k_0)\; S(k_0+N-2)B(k_0+1) \ldots B(k_0+N-1)] \tag{1.17}$$

$$S(k_0+N-i) = A(k_0+N-1)A(k_0+N-2)\ldots A(k_0+N-(i-1)) \tag{1.18}$$

$$S(k_0) = I$$

اثبات

$$\phi(k_0+N) = A(k_0+N-1)A(k_0+N-2)\ldots A(k_0)\phi(k_0)$$

$$+ B(k_0+N-1)V(k_0+N-1) + \ldots + A(k_0+N-1)\ldots A(k_0+1)B(k_0)V(k_0) \tag{1.19}$$

$$\Rightarrow \phi(k_0+N) = S(k_0+N)\,\phi(k_0) + \sum_{i=0}^{N-1} S(k_0+N-1-i)\,B(k_0+i)\,V(k_0+i) \tag{1.20}$$

$$\Rightarrow \phi(k_0+N) - S(k_0+N)\,\phi(k_0) = W(k_0, N)\,U_{k0}(N) \tag{1.21}$$

که

$$U_{k0}(N) = \mathrm{Col}\,[V(k_0)\;V(k_0+1)\;\ldots\;V(k_0+N-1)] \tag{1.22}$$

از رابطه (1.21) مشخص است که (1.3) در لحظه k_0 کنترل پذیر همه جانبه است، اگر و فقط اگر شرط (1.16) برقرار گردد. ماتریس $W(k_0, N)$ یک ماتریس $k_0(n_1+n_2) \times P\left(k_0+\frac{N(N+1)}{2}\right)$ می باشد، پس نامساوی (1.16.1) نیز باید صدق کند.

نتیجه (1.5): شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری همه جانبه فرم WAM مدل GR متغیر با زمان (1.3) عبارت است از:

$$\forall k_0 \in N \quad \exists M \in N \;\; \text{S.t} \;\; \mathrm{Rank}\,(W(k_0, M)) = k_0(n_1+n_2) \tag{1.23}$$

حال در این قسمت راجع به ارتباط بین کنترل پذیری مدل WAM و کنترل پذیری محلی GR غیرمتغیر با زمان اولیه بحث خواهیم کرد.

قضیه [11]: اگر فرم WAM مدل GR غیر متغیر با زمان کنترل پذیر همه جانبه باشد، آنگاه سیستم GR اولیه نیز کنترل پذیر محلی است.

در مرجع [11] با بیان یک مثال نشان داده شده است که عکس مطلب فوق درست نمی باشد.

II. گرامیان های کنترل پذیری و رؤیت پذیری مدل WAM

همانگونه که در فصل اول گفته شد حالت $\phi(n)$ در رابطه (1.2) حالت همه جانبه سیستم می باشد، ولی به علت افزایش بعد این بردار با زمان (n) بررسی پروسه های دو بعدی از طریق فضای حالت ϕ مشکل به نظر می رسد. اما همانگونه که در مراجع [2] و [22] بیان شده به علت فرم Banded موجود در ماتریس های A (n) و B (n) و C (n) به نظر می رسد که این پیچیدگی تا حد زیادی قابل کاهش باشد. در این فصل با توجه به این مسئله، شبیه سیستم های یک بعدی متغیر با زمان ماتریس هایی تحت عنوان گرامیان های کنترل پذیری و رؤیت پذیری تعریف کرده و نشان می دهیم که به کمک این ماتریس ها نیز می توان کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه یک سیستم دو بعدی را بررسی نمود.

فرم WAM مدل GR به صورت رابطه (1.3) را در نظر می گیریم که باز می توانیم آن را متغیر با زمان نیز فرض نماییم. در این حالت در صورتی که شرایط مرزی صفر باشند آنگاه نگاشت بین حالت در لحظه k_0 و لحظه $k_0 + n$ در یک سیستم بدون تحریک چنین خواهد بود (طبق رابطه (1.20))

$$\phi(n+k_0) = S(k_0+N)\,\phi(k_0) \tag{2.1}$$

حال اگر از لحظه k_0 تا $k_0 + n$ از ورودی نویز سفید با توزیع گوسی به عنوان حالت اولیه استفاده نماییم، آنگاه با فرض استقلال این نویزها و داشتن کوواریانس واحد، مجموع انرژی دریافتی در خروجی های این زمان ها برابر خواهد بود با:

$$W_0^{k_0, n} = \sum_{i=0}^{n} \mu^*(i+k_0)\,\mu(i+k_0) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0}^{i} A(k_0+i-j-1)\right]^*$$

$$C^*(k_0+i)\,C(k_0+i)\left[\prod_{j=0}^{i} A(k_0+i-j-1)\right] \tag{2.2}$$

که علامت (*) به معنی ترانسپوز کردن ماتریس می باشد.

توجه1: در رابطه (2.2) از فرض واحد بودن ماتریس کوواریانس نویز در هر لحظه استفاده شده است. در این صورت شرط دیگری برای تعیین رؤیت پذیری همه جانبه سیستم (1.3) می توان بیان نمود.

توجه2 : به علت صورت خاص ماتریس های گرامیان که به صورت فرم مربعی ماتریس های کنترل پذیری و رؤیت پذیری می باشند، میتوان دید که به جای چک کردن رتبه ماتریس های فضایای (1.4) , (1.1) می توان رتبه گرامیان های متناظر با آنان را چک کرد.

قضیه (2.1): شرط لازم و کافی برای رؤیت پذیری همه جانبه سیستم (1.3) در لحظه k_0 عبارت است از اینکه رتبه ماتریس گرامیان رؤیت پذیری همه جانبه WAM به ازاء لااقل یک $n \in N$ برابر با $k_0(n_1+n_2)$ باشد.

اثبات: باتوجه به فرم $W_0^{k,n}$ داریم:

$$W_0^{k,n} = H^* (k_0 + n, k_0)\ H (k_0 + n, k_0) \qquad (2.3)$$

از طرفی می‌دانیم که رتبه $W_0^{k,n}$ با رتبه $H(k_0 + n, k_0)$ برابر است. پس شرط لازم و کافی برای رؤیت پذیری محلی (1.3) عبارت است از:

$$\exists\, n \in N : \text{Rank}\ (W_0^{k,n}) = k_0\ (n_1 + n_2) \qquad (2.4)$$

به طریق مشابه اگر ماتریس گرامیان کنترل پذیری همه جانبه را تعریف نماییم، داریم:

$$Q_c^{k,n} = W\ (k_0\ ,\ k_0 + n)\ W^*\ (k_0\ ,\ k_0 + n) \qquad (2.5)$$

برای تعبیر معنای فیزیکی ماتریس $Q_c^{k,n}$ می‌توان آن را ماتریس کوواریانس نویز در حالت $\phi\ (k_0 + n)$ به ازاء تحریک ورودی نویز سفید و شرایط مرزی صفر، دانست.

قضیه (2.2): شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری همه جانبه سیستم (1.3) در لحظه k_0 عبارت است از اینکه رتبه ماتریس گرامیان کنترل پذیری همه جانبه که در (2.5) تعریف شده برابر با $k_0\ (n_1 + n_2)$ باشد.

اثبات : مشابه قضیه (2.1)

III. کنترل پذیری و رؤیت پذیری مدل‌های FM و FTR در فرم WAM

همانگونه که می‌دانیم مدل‌های FM و FTR نیز به عنوان مدل‌هایی برای بررسی پروسه‌های دو بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند و به دلیل اینکه حالت تعریف شده در این مدل‌ها نیز حالت همه جانبه نیست [7] برای بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه این مدل‌ها نیز می‌توان از فرم WAM آنان استفاده نمود.

مدل FTR در حالت کلی خود بدین صورت می‌باشد:

$$x\ (i + 1, j + 1) = J_{10}\ x\ (i + 1, j) + J_{01}\ x(i, j + 1) - k_0\ X\ (i, j) + E_{10}\ u\ (i + 1, j) + E_{01}\ u\ (i, j + 1)\ F_0\ u\ (i, j) \qquad (3.1)$$

اگر $E_{10} = E_{01} = 0$ باشد، آنگاه مدل FTR فوق تبدیل به مدل FM خواهد شد.

فرم WAM مدل (3.1) عبارت است از[2]:

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} \phi\ (n+1) \\ T\ (n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J\ (n) & I\ (n) \\ K\ (n) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi\ (n) \\ T\ (n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E\ (n) \\ F\ (n) \end{bmatrix} V\ (n) = H(n)\ X_n + L\ (n)\ V\ (n)$$

$$\mu\ (n) = G\ (n)\ X_n \qquad (3.2)$$

که بردارهای ϕو V و μ شبیه رابطه (1.2) تعریف شده‌اند و

$$G\ (n) = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & C & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ m\ (n+1) \\ \\ \}\ m\ (n+1) \end{matrix} \end{array} \qquad \phi\ (n),\ \gamma\ (n) \in IR^{(n+1)m}$$

(3.3)

اگر از تعریف‌های بخش‌های 1و 2 برای بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری فرم WAM مدل FTR استفاده کنیم، می‌توانیم شروطی جهت تعیین کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه مدل FTR (و بالطبع مدل FM) به دست آوریم.

قضیه (3.1): شرط لازم و کافی برای رؤیت پذیری همه جانبه مدل (3.2) در لحظه k_0 عبارت است از:

$$\text{rank}\ (M_{k^0}\ (n)\ ) = (K_0 + 1)\ m \qquad (3.4)$$

که

$$(M_{k^0}\ (n) = \begin{bmatrix} G\ (n)\ H\ (n-1)\ H\ (n-2)\ \ldots\ H\ (K_0) \\ \vdots \\ G\ (K_0) \end{bmatrix}$$

(3.5)

اثبات: برطبق رابطه (3.2) داریم:

$$\mu\ (n) = \text{Col}\ [y\ (0, n)\ ,\ \ldots\ ,\ y\ (n, 0)] = G\ (n)\ X_n = G\ (n)\ H\ (n-1)\ \ldots\ H\ (k_0)\ X_{k_0}$$

(3.6)

پس :

$$\begin{bmatrix} \mu(n) \\ \\ \mu(n-1) \\ \\ \vdots \\ \\ \mu(k_0) \end{bmatrix} = M_{k^0}(n)\, X_{k_0} \qquad (3.7)$$

پس شرط لازم و کافی برای رؤیت پذیری همه جانبه (3.2) عبارت است از:

$$\exists\, n \in N : \text{Rank}\,(M_{k^0}(n)) = m\,(k_0 + 1)$$

به همین ترتیب برای کنترل پذیری همه جانبه نیز می توان گفت:
قضیه (3.2): شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری همه جانبه (3.2) در لحظه k_0 عبارت است از:

$$\text{Rank}\,(P_{k0}(n)) = (k_0 + 1)\, m \qquad (3.8)$$

که

$$P_{k0}(n) = \begin{bmatrix} H(n-1)\, H(n-2) \ldots H(k_0)\, L(k_0) \\ \\ L(k_0) \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

اثبات: به طریق مشابه با قضیه (3.1).

مشابه مدل GR می توان ماتریس های گرامیان را نیز برای دو مدل اخیر تعریف کرده و شروطی برای کنترل پذیری و رؤیت پذیری همه جانبه به دست آورد که از ذکر آن به علت محدودیت تعداد صفحات خودداری می گردد.

نتیجه گیری

در این مقاله در مورد کنترل پذیری و رؤیت پذیری حالت همه جانبه یک پروسه دو بعدی که به وسیله مدل FM, GR یا FTR بیان شده شرط های لازم و کافی ارائه شد و نشان داده شد که در مدل GR دو مفهوم رؤیت پذیری محلی و رؤیت پذیری حالت همه جانبه در فرم WAM یکدیگر را نتیجه می دهند و در مورد مفهوم کنترل پذیری نیز دیدیم که کنترل پذیری همه جانبه فرم WAM مدل GR، کنترل پذیری محلی را نتیجه می دهد. اما در مدل های FM و FTR چنین ارتباطاتی به دست نیامده و این بر قویتر بودن مدل GR نسبت به مدل های FM و FTR صحه می گذارد.

در مورد کارهای آینده می توان به موارد زیر اشاره نمود: نحوه ارتباط بین مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری مدل های FM و FTR با فرم WAM آنان (در صورت امکان). بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری فرم WAM مدل های سه بعدی و چند بعدی. ساده تر کردن شروط قضایای (1.1) و (1.4) (در صورت امکان).

مراجع

[1] S, Tzafestas, "Multidimentional Systems" Marcel Decker

[2] N. A. Porter & J. L. Aravena, "1-D Models for m-D Processes", IEEE CAS vol.31 Aug. 1984.

[3] J.L. Aravena, etal, "State Models and Stability for 2-D Filters" IEEE CAS vol.37 N.12, Dec. 1990 pp. 1509 - 19.

[4] J. Klamka, " Controllability and Optimal Control of 2-D Linear Systems "MMAR' 92 Poland".

[5] M. Shafiee, "2-D Stabilization of the Wave Model" Phd-thesis Baton Rouge Louisiana State Univ. Dec. 1987.

[6] R. P. Roesser, " A Discrete State Space Model for Image Processing" IEEE TAC, vol 20 No.1 Feb. 1975 pp. 1-10.

[7] T. Kailath, etal, "New Results in 2-D Systems Theory, Part II: 2-D State Space Models Realization and the Notion of Controllability, Observability and Minimality " IEEE proc, vol. 65. No. 6 Jun. 1977 pp. 948-80.

[8] W. Brogan, Modern Control Theory" Prentice - Hall.

[9] M. Shafiee, "Output Feedback Stabilization of Time Varying 2-D Systems" proc. of MMAR' 95 Poland Aug 1995.

[10] , "Stability Analysis of Nonstationary 2-D Systems" proc. of ISIC'95 Singapore Sep 1995.

[11] T.Z. Kaczurek, " Straight Line Reachability of Roesser Model" IEEE TAC vol. 32. No. 7 Jul 1987.

[12] P. Rocha, J.C. Willems, "Controllability of 2-D Systems " IEEE TAC vol. 36 No.2. App. 1991 pp. 413 - 423.