اثبات وجود پاسخ بازگرد برای سیستم‌های مرتعش میرای واداشته غیرخطی

ابراهیم اسماعیل زاده
استاد

رضا نخعی
استادیار

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه گیلان

چکیده

نشان دادیم که برای بازگرد بودن (Periodicity) پاسخ معادله ماتیو - دافینگ، یک شرط کافی وجود دارد. شرط بازگرد بودن را به یاری قضیه ثابت شاودر (Schauder) یافتیم. برای فراگیر کردن شرط بازگرد بودن و دربرگیری رده بزرگتری از معادلات دیفرانسیل زمانچرخ (Parametric) و ناخطی و واداشته، معادله ماتیو - دافینگ میرا و واداشته را نیز بررسی کرده ایم.

Periodicity Conditions for Forced Damped Nonlinear Oscillatory Systems

E. Esmailzadeh
Professor

Department of Mechanical Engineering,
Sharif University of Technology

R. Nakhaie
Assistant Professor

Faculty of Engineering and Technology,
Guilan University

Abstract

It is shown that there exists a sufficient condition for the existence of at least one periodic solution for a type of parametric second order ordinary differential equations, known Mathieu - Duffing equation. The correctness of the conditions has been pointed out by the Schauder's fixed point theorem.

مقدمه

نخستین بار، فاراده (Faraday) بود که در سال ۱۸۳۱، یک رفتار فیزیکی زمانچرخ را گزارش کرد. او با لرزاندن یک بشکه پر ازآب، امواجی بر سطح آب پدید آورد که آهنگ (Frequency) آنها دو برابر آهنگ لرزاندن بشکه بود. اندکی پس از او، بسیاری از دانشمندان دیگر، پدیده هایی با رفتار بازگردی را شناختند، [Richards 1983]. نخستین کسی که یک معادله دیفرانسیل زمانچرخ را بررسی ژرف و ریزبینانه کرده، ماتیو است. او در سال های ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۳ یکی از پرکاربردترین معادلات زمانچرخ را بررسی کرد، [E. Mathieu 1868]. هیل نیز در سال ۱۸۸۶، بنیان ریاضی برای بررسی پایداری معادلات زمانچرخ را پی ریزی نمود، [Richards, 1983].

اگر چه آشناترین معادله دیفرانسیل زمانچرخ، معادله خطی ماتیو است که بسیاری از زمینه های آن بررسی

شده، خطی بودن معادله ماتیو نمی‌تواند گویای رفتار بسیاری از دستگاه های زمانچرخ باشد، چرا که معمولاً رفتار دستگاه های زمانچرخ، ناخطی است و رفتار دیگرگونی دارد، [Minorsky, 1962].

در گذشته، هنگام برخورد با پدیده های زمانچرخ و ناخطی، بسته به ارزش پاره زمانچرخ ویا پاره ناخطی، رفتار دستگاه را با معادله ماتیو یا با معادله دافینگ G. Duffing) جانشین می‌کردند. معادله ناخطی دافینگ ساده‌ترین معادله بازگوکننده رفتار ناخطی یک دستگاه لرزشی ساده با فنر سخت شونده یا نرم شونده است.

می‌خواهیم معادله دیفرانسیل زیر که آن را معادله ماتیو ـ دافینگ می‌نامیم، بررسی کنیم و وجود پاسخ بازگرد را برای آن اثبات کنیم تا شرطی برای a و b و c بیابیم که ا بازگرد بودن رفتار آن را بازگو کند. چنانکه پیداست، این معادله از جمع معادله ماتیو و معادله دافینگ به دست می‌آید.

$$\ddot{x} + (a^2 + b \cdot \cos(t))\, x + c \cdot x^3 = 0 \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad (۱)$$

امروزه، اثبات وجود پاسخ را به یاری روش های تحلیلی و توپولوژیک می‌یابند که با پیدایش قضایای نقطه ثابت نمود یافته است. برخی از قضیه های نقطه ثابت، وجود پاسخ را اثبات می‌کند، اما هیچ آگاهی درباره آن نمی‌دهد. برخی دیگر، یگانه بودن پاسخ را نیز می‌شناساند وبرخی، آگاهی بیشتری از پاسخ را موجب می‌شود.

نخستین قضیه نقطه ثابت کارآمد، از آن بول (Bohl) است که در سال ۱۹۰۴ پیدا شد. پس از آن، براور (Brouwer) در ۱۹۱۱، قضیه نقطه ثابت خود را نشان داد، [Myskis 1975]. این روش ها را بیرکوف (Birk-hoff) و که لوک(Kellogg) گسترش دادند و پس از آن، لری (Leray) و شاودر (Schauder)، آنها را ساده‌تر و کارآمدتر ساختند. شاودر، قضیه نقطه ثابت براور را برای فضای باناخ گسترش داد. اشمیت (Schmitt)، قضیه نقطه ثابت را برای یافتن شرط وجود پاسخ بازگرد معادلات دیفرانسیل معمولی به کاربرد [Schmitt 1986].

شاید اثبات وجود، یکی از برجسته‌ترین کارهای ریاضی باشد، چرا که اگر بتوانیم چیزی را پاسخیابی کنیم، این کار را می‌کنیم و گرنه باید اثبات کنیم که پاسخ خواسته شده، وجود دارد.

برای آنکه معادله (۱)، پاسخی بازگرد با دماهنگ (Period) 2π داشته باشد، باید مرزینه (۲) را برآورد نمود.

$$x(0) = x(\tau), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\tau), \quad \tau = 2\pi \qquad (۲)$$

۲ ـ اثبات وجود پاسخ بازگرد

معادله (۱) را به آرایش زیر می‌نویسیم،

$$\ddot{x} + a^2 x = f(x, t) = -bx\cos(t) - cx^3 \qquad (۳)$$

که در آن، f، یک تابع تک مقدار حقیقی و پیوسته و بازگرد است. برای بازگرد بودن این معادله، قضیه زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه: گمان کنید که عدد مثبتی چون K وجود داشته باشد که

$$M \le a^2 K \qquad (۴)$$

$$M = \mathrm{Max}\,\{|f(x(s), t)| : (x, \dot{x}, t) \in Z\} \qquad (۵)$$

$$Z = \{(x, \dot{x}, t) : t \in [0, \tau],\ |x| \le K,\ |\dot{x}| \le aK\} \qquad (۶)$$

آنگاه معادله (۱) پاسخی چون x(t) دارد که در شرط بازگردی (۲) می‌گنجد.

اثبات: به یاری تابع گرین (Green)، G (s, t) نشان می‌دهند که معادله (۳) با مرزینه (۲)، پاسخی انتگرالی به آرایش زیر دارد.

$$x(t) = \int_0^{\tau} G(s, t) \cdot f(x(s), t)\, ds \qquad (۷)$$

تابع گرین G (s, t) با مرزینه (۲)، در معادله خطی زیر می‌گنجد،

$$\ddot{x} + a^2 x = 0 \qquad (۸)$$

و در بازه زمانی $0 \le t \le \tau$ که با s به دو بخش شکسته شده است، چنین است:

$$G(s, t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(a(s - t - \tau/2))}{2a \cdot \sin(a\tau/2)} & 0 \le t \le s \le \tau \\ \dfrac{\cos(a(s - t + \tau/2))}{2a \cdot \sin(a\tau/2)} & 0 \le s \le t \le \tau \end{cases} \qquad (۹)$$

معادله دیفرانسیل (۱) یا معادله انتگرالی (۷) با تابع گرین (۹)، پاسخی چون $x(t)$ دارد که مرزینه (۲) را برمی‌آورد.

گمان کنید که S یک فضای باناخ باشد،

$$S = \{x : x \in C^1(0, \tau)\} \qquad (۱۰)$$

که نرم (norm) آن، اینگونه است:

$$\|x\| = \text{Max}\,\{|x(t)|, |\dot{x}(t)| : 0 \le t \le \tau\} \qquad (۱۱)$$

می‌توان زیر فضایی چون B از فضای باناخ S به کار گرفت که بسته (closed) و محدب (convex) باشد.

$$B = \{x \in S : |x(t)| \le K, |\dot{x}(t)| \le aK\} \qquad (۱۲)$$

اکنون اوپراتوری چون U بر فضای B، به گونه زیر تعریف می‌کنیم:

$$U^{(i)} x(t) = \int_0^{\tau} G^{(i)}(s, t) \,.\, f(x(s), t)\, ds \qquad i = 0, 1 \qquad (۱۳)$$

که در آن $U^{(i)}$ و $G^{(i)}$ مشتق iام U و G است.
چون f و $G(s, t)$ پیوسته است، U یک اوپراتور پیوسته است. اکنون می‌توان دریافت که،

$$|U(x)| \le \frac{2 + \tau a}{2a^2} M \qquad (۱۴)$$

$$\left|\frac{d}{dt} U(x)\right| \le \frac{2 + \tau a}{2a} M \qquad (۱۵)$$

اوپراتور پیوسته U زیرفضای B را دربازه $0 \le t \le \tau$ بر خودش می‌نگارد، به شرط آنکه:

$$\frac{2 + \tau a}{2a^2} M \le K \qquad (۱۶)$$

$$\frac{2 + \tau a}{2a} M \le aK \qquad (۱۷)$$

پیداست که نابرابری‌های (۱۶) و (۱۷) را می‌توان درهم آمیخت و با یک نابرابری نشان داد.

$$\tau \le \frac{2(a^2 K - M)}{Ma} \qquad (۱۸)$$

از شرط (۴) بر می‌آید که دست راست دستور (۱۸)، مثبت است. پس باید K را به گونه‌ای بیابیم که نابرابری‌های (۴) و (۱۸) درست باشد.

از قضیه نقطه ثابت شاودر می‌دانیم که اگر اوپراتور پیوسته و فراگیر U، زیر فضای بسته و فشرده و محدب B از فضای باناخ S را در خودش بنگارد، دست کم یک نقطه ثابت هست که بر خودش نگاشته می‌شود. به بیان دیگر نقطه‌ای چون $x \in B$ هست که $U(x) = x$ [Hale 1969].

شرایط قضیه شاودر برقرار است. پس، قضیه اثبات وجود پاسخ بازگرد تمام است.

برای آنکه نشان دهیم شرایط قضیه شاودر برقرار است باید چند تعریف و قضیه کمکی دیگر را به یاری بگیریم.

اگر هر دنباله کوشی در یک فضا همگرا باشد، آن فضا را فراگیر خوانند. یک فضای برداری نرم‌دار (normed) یا فضای باناخ، همواره فراگیر است. یک مجموعه از فضای نرم‌دار را فشرده خوانند، اگر هر دنباله نامتناهی در آن مجموعه، دست کم یک زیر دنباله همگرا داشته باشد. از قضیه بولزانو - وایراشتراوس (Bolzano - Weierstrass) می‌دانیم که هر مجموعه کراندار و بسته از یک فضای اقلیدوسی n بعدی (n شمارا)، فشرده است.

یک مجموعه از فضای باناخ را محدب خوانند، اگر نقاط خط راستی که هر دو نقطه دلخواه آن مجموعه را به هم می‌رساند، متعلق به همان مجموعه باشد. برای اثبات محدب بودن مجموعه B باید نشان دهیم که اگر $x, y \in B$ آنگاه $(z = \lambda x + (1 - \lambda y) \in B, 0 \le \lambda \le 1$، می‌توان نشان داد که $|z| \le K, |\dot{z}| \le aK$ پس، $z \in B$ و از این رو، $U(B) \subset B$.

خانواده توابع $\{x(t)\} \subset [\alpha, \beta]$ را همکران (equibounded) می‌نامند اگر همه توابع آن خانواده در نابرابری $|x(t)| \le H, H \ge 0$ بگنجد. آن خانواده را همپیوسته (equicontinuous) می‌نامند، اگر برای هر $\varepsilon \ge 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به گونه‌ای که برای هر $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$، $|t_1, t_2| < \delta$، نابرابری $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ برای هر تابع $x(t)$ از آن خانواده، درست باشد.

از قضیه آرزلا (Arzela) می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه‌ای در یک بازه تعریف، فشرده باشد، آن است که همکران و همپیوسته باشد، [Efimov

1985].

U و B در قضیه آرزلا می‌گنجد، پس، U (B) در B فشرده است و اوپراتور U، فراگیر و پیوسته و همپیوسته و کراندار است.

شرایط قضیه شاودر برقرار است و به یاری آن اثبات قضیه‌ای که به دنبالش بودیم، انجام یافته است.

۳ـ بکارگیری قضیه وجود پاسخ برای معادله ماتیو ـ دافینگ

برای بکارگیری قضیه گفته شده درباره معادله (۱)، باید Mرا بیابیم، چون $f(x, t)$ در مجموعه بسته Z، پیوسته و کراندار است، باید $f(x, t)$ در آن بازه، کمینه و بیشینه ناب (absolute) داشته باشد. پس، M وجود دارد و به سادگی می‌توانیم نشان دهیم که بیشینه $f(x, t)$ در f در (K, 0) و بر روی مرز رخ می‌دهد.

$$M = \mathrm{Max}\,\{| - b \,.\, x \,.\, \cos(t) - c \,.\, x^3 \,| \,;\, (x\,,\,t) \in Z\} = bK + cK^3 \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری M از (۱۹) در شرط (۴) به نابرابری زیر می‌رسیم.

$$K^2 \leq \frac{a^2 - b}{c} \qquad (۲۰)$$

اگر K را به گونه‌ای برگزینیم که نابرابری (۲۰) درست باشد، معادله (۱) پاسخی بازگرد با دماهنگ 2π خواهد داشت. K، کرانه $x(t)$ در بازه $0 \leq t \leq \tau$ است. چون K^2 همواره مثبت است، b باید از a^2 کوچکتر باشد. این همان دستاوردی است که اگر قضیه گفته شده را برای معادله ماتیو به کار می‌بردیم، به دست می‌آمد. معادله ماتیو، تقریب خطی معادله (۱) است.

٤ـ بررسی معادله ماتیو ـ دافینگ میرا و واداشته

این بار آرایش و کاربردی فراگیرتر از معادله (۱) را می‌جوییم. برای آنکه معادله (۱) را که یک معادله دیفرانسیل رده دو و پارامتریک و ناخطی و آزاد است، به معادله‌ای واداشته (forced) برسانیم، نیروی برانگیز $e(t) = e(t + \tau)$ را به سوی دیگر معادله افزوده‌ایم و جمله‌ای نیز برای نمایش نیروی میرایی چسبنده (viscouse)، آورده‌ایم.

$$\ddot{x} + (a^2 + b \,.\, \cos(t))\, x + c \,.\, x^3 + d \,.\, \dot{x} = e(t) \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad (۲۱)$$

مرزینه معادله (۲۱) برای بازگرد بودن پاسخ، همانند مرزینه (۲) است:

$$x(0) = x(\tau)\,,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(\tau)\,,\ \tau = 2\pi \qquad (۲۲)$$

معادله (۲۱) را چنین می‌نویسیم:

$$\ddot{x} + a^2 \,.\, x = f(x, \dot{x}, t) = e(t) - d \,.\dot{x} - b \,.\, x \,.\, \cos(t)) - c \,.\, x^3 \qquad (۲۳)$$

شرط بازگردی پاسخ معادله (۲۳) از قضیه یاد شده را دوباره می‌آوریم.

$$M \leq a^2 K \qquad (۲۴)$$

اندازه M را باید از دستور زیر بیابیم.

$$M = \mathrm{Max}\,\{|f(x(s)\,,\,\dot{x}(s)\,,\,t)| : (x\,,\,\dot{x}\,,\,t) \in Z\} \qquad (۲۵)$$

$$Z = \{(x\,,\,\dot{x}\,,\,t) : t \in [0\,,\,\tau]\,,\ |x| \leq K\,,\ |\dot{x}| \leq a K\} \qquad (۲۶)$$

پاسخ یا معادله انتگرالی (۲۱) با مرزینه (۲۲) چنین است:

$$x(t) = \int_0^\tau G(s, t) \,.\, f(x(s)\,,\,\dot{x}(s)\,,\,t)\, ds \qquad (۲۷)$$

که در آن، $G(s, t)$ نشان تابع گرین (۹) است. روند تعریف فضای باناخ S و زیر فضای B از فضای باناخ S مانند پیش است. اوپراتور U را به گونه‌ای زیر می‌نویسیم.

$$U^{(i)} x(t) = \int_0^\tau G^{(i)}(s\,,\,t) \,.\, f(x(s)\,,\,\dot{x}(s)\,,\,t)\, ds \qquad i = 0\,,\,1 \qquad (۲۸)$$

این بار اندازه M را چنین می‌یابیم،

$$M = \mathrm{Max}\,\{\, | e(t) - d\dot{x} - bx\cos(t) - cx^3 | \;;\; (x, \dot{x}, t) \in Z \}$$
$$= KE + daK + bK + cK^3$$

(۲۹)

که در آن،

$$KE = \mathrm{Max}\,(e(t)) \quad 0 \le t \le \tau \qquad (۳۰)$$

جایگذاری M از دستور (۲۹) در نابرابری (۱۸)

$$KE + daK + bK + cK^3 \le \frac{2a^2 K}{a\tau + 2} \qquad (۳۱)$$

و بکارگیری شرط قضیه (۴)، ما را به شرط بازگرد بودن پاسخ معادله (۲۱) می‌رساند.

$$K^2 \le \frac{a^2 - b - da - E}{c} \qquad (۳۲)$$

چنانکه پیداست، با صفر نهادن d و E، معادله (۲۱) به معادله (۱)، و دستور (۳۲) به دستور (۲۰) می‌رسد.

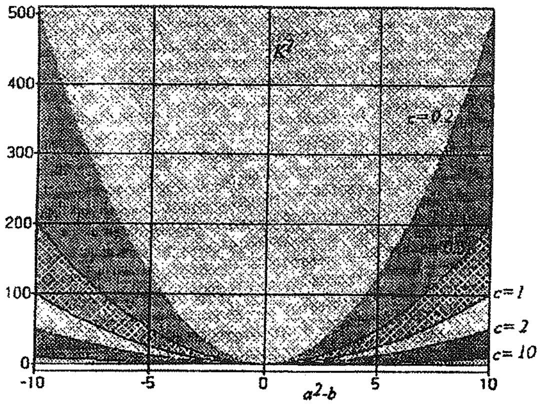
۵- دستاورد

به یاری قضیه نقطه ثابت شاودر، قضیه‌ای را درباره وجود پاسخ بازگرد با دماهنگ 2π، برای معادله زیر اثبات کردیم.

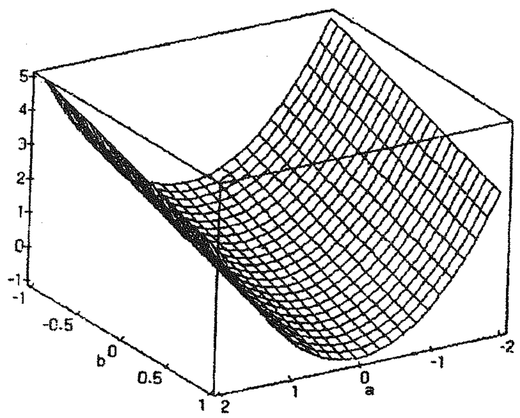
$$\ddot{x} + (a^2 + b \,.\, \cos(t))\, x + c \,.\, x^3 = 0 \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

این روند به یک نابرابری برای یافتن کرانه فضای متغیرهای $|x| < K$, $|dx/dt| < aK$ انجامید که اگر متغیرها در آن فضا بمانند، پاسخ معادله، بازگرد با دماهنگ 2π خواهد بود.

$$K^2 \le \frac{a^2 - b}{c}$$



شکل (۱) نمایش نابرابری (۲۰)، شرط وجود پاسخ بازگرد معادله ماتیو - رافینگ



شکل (۲) نمایش سه بعدی شرط وجود پاسخ بازگرد

مراجع

[1] Efimov, A. V., Zolotarev, Y. G. and Rerpigoreva, V.M., (1993), Mathematical Analysis, Mir Publishers, Mpscow.

[2] Hale J. K., (1969), Ordinary differential Equations, New York, John Wiley.

[3] Minorsky N., (1962), Nonlinear Oscillations, New Jersey, Van Nostrand,.

[4] Myskis A. D., (1975), Advanced Mathematics for Engineers, Mir Publishers, Moscow.

[5] Richards J. A., (1983), Analysis of Periodically Time - Varying Systems, Springer Verlag, New York.

[6]Schmidt G., Tondl A., (1986), Non - Linear Vibrations, Cambridge University Press, Cambridge.