الگوریتم تعویض های جفتی در برنامه ریزی ماشین‌های موازی

سیدمحمد تقی فاطمی قمی
دانشیار

فریبرز جولای قزوینی
فارغ التحصیل دوره دکترا

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مؤسسه ملی پلی تکنیک گرنوبل، فرانسه

چکیده

در این مقاله مسئله حداقل کردن زمان ختم کل برنامه زمان‌بندی اجرای n کاربر روی m ماشین موازی یکسان، بدون بریدگی کارها مورد بررسی قرار گرفته است. الگوریتم بهبود دهنده‌ای که در این مقاله ارائه شده است، پس از دریافت یك حل اولیه با انجام تعویضات جفتی مناسب در کارها قادر به تعیین برنامه‌ای نزدیك به برنامه بهینه در زمانی کوتاه می باشد.

نتایج آنالیزهای انجام شده نشان دهنده کارآئی روش در مقایسه با روش های ساده موجود می باشد. در بخش پایانی این مقاله تعمیم الگوریتم به حالتی که سرعت ماشین ها یکسان نباشد و حالتی که ورودی های غیر همزمان داشته باشیم، آورده شده است.

A Pairwise Interchange Algorithm for Parallel Machine Scheduling

S.M.T. Fatemi Ghomi
Associate Professor

F. Jolai Ghazvini
Ph.D. Graduate

Industrial Engineering Department
Amirkabir University of Technology

Institut National Polytechnique de
Grenoble, Avenue Felix Viallet, France

Abstract

This paper considers the problem of nonpreemptive scheduling n tasks on m identical parallel processors to minimize makespan for simultaneous arrivals. Based on pairwise interchange method, an efficient algorithm is presented which is able to give a near - optimal schedule in a short time through suitable pairwise interchange between tasks after an initial solution is constructed.

The behaviour of the algorithm is discussed. Testing results prove its high performance in comparison with available simple heuristic approaches.

Finally, the algorithm is generalised for the problems of nonidentical processors and nonsimultaneous arrivals.

مقدمه

در طی چهار دهه گذشته مسئله برنامه ریزی بدون بریدگی زمان بندی اجرای n کار بر روی m ماشین موازی یکسان توسط محققین مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در بین معیارهای گوناگون برنامه ریزی، زمان ختم کل برنامه[1] یا به عبارت دیگر زمان ختم آخرین کاری که به انجام می رسد، بیشتر از بقیه معیارها مورد توجه قرار گرفته است.

ثابت شده است که مسئله باتوجه به معیار فوق جزء مسائل ترکیبی [2] بوده و امکان یافتن الگوریتمی که تابع پیچیدگی زمان [3] آن پلی نومیال باشد و بتواند برنامه بهینه را بیابد، وجود ندارد [5]. از روش های حل بهینه ای که وجود دارد می توان از روش شمارش صریح، برنامه ریزی عدد صحیح [1] ضرایب لاگرانژین [4,3] و روش شبیه به برنامه ریزی پویا [9] نام برد که تابع پیچیدگی زمان آنها نمایی می باشد.

بنابراین معقول به نظر می رسد در حل مسائلی با اندازه های متوسط و بزرگ از روش های حل تقریبی که جوابهایی نزدیک به جواب بهینه دارند، استفاده کنیم. علاوه بر این در عمل زمان های اجرای کارها تخمینی بوده که در حقیقت جواب های بهینه آنها خود جواب هایی تقریبی هستند.

از روش های ساده حل تقریبی می توان از روش ترتیب تصادفی، ترتیب نزولی زمان اجرا[4] [7] و روش چند برازشی [5][6] نام برد. همچنین روش های پیچیده حل تقریبی مانند برنامه های تقریبی پلی نومیال[6][7] و برنامه های تقریبی پلی نومیال کامل[7][9] نیز وجود دارند که با وجود اینکه می توان از قبل دقت مورد نظر در حل تقریبی حاصل از الگوریتم را تعیین کرد، به علت کلی بودن آنها در حل مسائل ترکیبی اگر اندازه مسئله بزرگ باشد قادر به یافتن جواب هایی با دقت بالا و در مدت زمان معقولی نخواهند بود [10]. هدف از ارائه الگوریتم تعویض های جفتی یافتن برنامه هایی است که علاوه بر نزدیکی بیشتر به برنامه بهینه نسبت به روش های ساده موجود، به سرعت قابل ساختن باشند.

در بخش اول این مقاله به تشریح مبانی و مراحل اجرایی الگوریتم می پردازیم و در بخش دوم رفتار الگوریتم در مقابل تغییر در نوع حل اولیه، نوع زمان های اجرا و اندازه مسئله را با انجام آنالیز واریانس سه فاکتوری مورد بررسی قرار می دهیم. بخش سوم به آنالیز قیاسی روش تعویض جفتی با روش های ساده موجود اختصاص یافته و در بخش چهارم تعمیم الگوریتم را به حالت های یکسان نبودن سرعت ماشین ها و همزمان نبودن ورود کارها ارائه می دهیم. همچنین بخش پایانی مقاله به نتیجه گیری و پیشنهادات اختصاص یافته است.

۱ ـ مبانی و مراحل الگوریتم تعویض های جفتی

مبانی الگوریتم

در صورتی که بریدگی کارها مجاز باشد می توان مسئله را به سادگی حل نمود. در این حالت زمان ختم بهینه از رابطه زیر به دست می آید: [8]

$$\text{زمان ختم بهینه برنامه} = \max\left[\left(\sum_{i=1}^{n} t_i/m\right),\quad \max_{1 \le i \le n} t_i\right] \qquad (۱-۱)$$

یک ویژگی برنامه های با بریدگی در این است که آخرین کارهای تخصیص داده شده به کلیه ماشین ها به طور همزمان در زمانی که از رابطه فوق به دست می آید ختم می شوند. وقتی بریدگی مجاز نباشد در بهترین حالت انتظار داریم برنامه حاصل از الگوریتم دارای ویژگی فوق باشد. به عبارت دیگر واریانس زمان های ختم ماشین ها در حداقل مقدار ممکن خود باشد. در صورت امکان بریدن کارها، این واریانس همیشه صفر است که از آن به عنوان حد پایین مسئله اصلی استفاده می کنیم.

باتوجه به مطالب فوق، در الگوریتم تعویض جفتی به جای در نظر گرفتن معیار زمان ختم کل برنامه که به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\min Z = \max_{1 \le i \le n} F_i \qquad (۱-۲)$$

واریانس زمان های ختم را حداقل می سازیم. یعنی:

$$\min Z = \sum_{i,j} \left|F_i - F_j\right| \; ; \; 1 \le i \le j \le m \qquad (۱-۳)$$

الگوریتم پس از ساختن یک حل اولیه (که می تواند به طریق تصادفی یا مطابق یکی از روش های ساده موجود ساخته شود)، با شناسایی تعویض های جفتی شدنی بین کارهای تخصیص داده شده به دو ماشینی که حداکثر و

حداقل زمان های ختم را دارند، تعویضی که بیشترین کاهش را در تابع Z می دهد، انتخاب می کند. لازم به ذکر است تعویضی را شدنی می نامیم که انجام آن حداقل باعث افزایش زمان ختم کل برنامه نشود.

قدم های الگوریتم

قدم صفر: ماشین ها و کارها را به ترتیب دلخواه شماره گذاری نمایید.

قدم۱: برنامه ای براساس نوع حل اولیه خواسته شده بسازید.

قدم ۲: حد پایین زمان ختم بهینه را از رابطه زیر محاسبه نمایید.

$$LB = \max [(\Sigma t_i/m) , \max (t_i)]$$

قدم ۳: ماشین PA را مشخص نمایید:

$$PA = \{P \mid F_P = \max_{1 \le j \le m} F_j\}$$

و قرار دهید. $M = F_{PA}$

قدم ۴: ماشین PB را مشخص نمایید.

$$PB = \{P \mid F_P = \min_{1 \le j \le m} F_j\}$$

قدم ۵: اگر $LB = F_{PA}$ باشد، الگوریتم با رسیدن به جواب بهینه ختم می شود.

قدم ۶: اگر PA = PB باشد، الگوریتم با حل تقریبی M ختم می شود.

قدم ۷: مجموعه های A, B را تعیین نمایید:

$$A = \{i \mid T_i \in PA\}, B = \{j \mid T_j \in PB\}$$

اگر نتوان دو کاری مثل $j \in B, i \in A$ را یافت که داشته باشیم:

$$0 \le t_i - t_j \le F_{PA} - F_{PB} \qquad (۱-۵)$$

در آن صورت ماشین PA را به طور موقت از ماشین های موجود حذف کنید و به قدم چهارم برگردید.

قدم ۸: از بین جفت کارهای j, i $(j \in B, i \in A)$ که در رابطه (۵-۱) صدق می کنند، دو کار a و b را که در رابطه زیر صادق باشند برای تعویض انتخاب نمایید.

$$2^* (t_a - t_b) - (F_{PA} - F_{PB}) \mid \le \mid 2^* (t_i - t_j) - (F_{PA} - F_{PB})\mid \qquad (۱-۶)$$

قدم ۹: جای دو کار a و b را تعویض کرده و زمان ختم جدید ماشین های PB و PA را به طریق زیر به دست آورید. پس از بازگرداندن ماشین هایی که به طور موقت حذف کرده بودید، به قدم سوم برگردید:

$$F_{PA} = F_{PA} - (t_a - t_b) \text{ جدید} \qquad (۱-۷)$$

$$F_{PB} = F_{PB} + (t_a - t_b) \text{ جدید} \qquad (۱-۸)$$

۲ـ آنالیز واریانس

برای شناسایی تأثیر تغییر در نوع حل اولیه، نوع تابعی که زمان های اجرای کارها از آن پیروی می کنند و همچنین تعداد کارها و ماشین ها بر روی دقت جواب الگوریتم، آنالیز واریانس سه فاکتوری طراحی گردید که در آن یک مشاهده را حاصل کسری تعریف کرده ایم که در صورت آن تفاوت جواب روش تعویض های جفتی با حد پایین و در مخرج آن حد پایین قرار دارد. به عبارت دیگر خطای روش را نسبت به حد پایین در نظر گرفته ایم.

چهار نوع حل اولیه انتخابی عبارتند از:

SPT: کارها را به ترتیب صعودی زمان اجرا مرتب کرده از ابتدای لیست به ماشین های خالی تخصیص می دهیم.

LPT: کارها را به ترتیب نزولی زمان اجرا مرتب کرده از ابتدای لیست به ماشین های خالی تخصیص می دهیم.

LPT - SPT: کارها را به ترتیب نزولی زمان اجرا مرتب کرده M کار را از ابتدای لیست به ترتیب صعودی تخصیص می دهیم.

SPT - LPT: کارها را به ترتیب صعودی زمان اجرا مرتب کرده M کار را از ابتدای لیست به ترتیب نزولی تخصیص می دهیم.

از سه نوع توزیع احتمالی زیر برای تولید زمان های اجرای کارها استفاده شده است:

۱ ـ توزیع نرمال با میانگین ۵۰ و واریانس ۹
۲ ـ توزیع یکنواخت در فاصله (۱۰۰ و ۱)
۳ ـ توزیع گاما با پارامترهای $\beta = 10, \alpha = 2$

همچنین شش دسته کار و ماشین که به صورت (n, m) نشان می دهیم، در نظر گرفته شد که عبارتند از:

(۳ و ۱۵) و (۳ و ۳۰) و (۵ و ۳۰) و (۵ و ۵۰) و (۱۰ و ۵۰) و (۱۰ و ۱۰۰)

باتوجه به چهار نوع حل اولیه و سه نوع توزیع زمان و شش دسته کار و ماشین، ۷۲ سطح آزمون تشکیل می شود که برای هر کدام سه نمونه مسئله حل گردید. بدین ترتیب ۲۱۶ نمونه جمع آوری شد. خلاصه نتایج با سطح اطمینان ۹۵ درصد در جدول (۱) نشان داده شده است.

چنانچه از جدول مشاهده می شود، فاکتور C نشان دهنده بیشترین اثر بر روی خطای روش نسبت به حد پایین است. باتوجه به نمودار شماره ۱ این مطلب روشن تر می گردد.

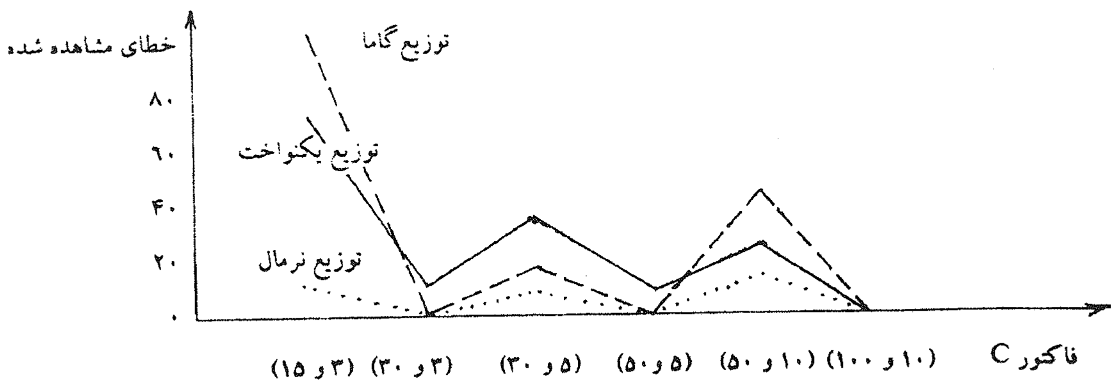
از نمودار فوق الذکر مشاهده می شود وقتی نسبت تعداد کارها به تعداد ماشین ها بزرگتر شده است، خطای کمتری داشته ایم. علت این امر را باتوجه به ماهیت روش می توان در افزایش یافتن تعداد اعضای مجموعه های A و B و در نتیجه بالا رفتن احتمال یافتن تعویض های شدنی و پیرو آن امکان کاهش در جواب حل اولیه دانست.

همچنین الگوریتم نسبت به زمانهایی که از توزیع یکنواخت و گاما پیروی می کنند، رفتاری تقریباً مشابه از خود نشان می دهد. ولی با توزیع نرمال درصد خطای کمتری داریم. علت این امر به واریانس زمان ها بستگی دارد، زیرا زمانهایی که از توزیع نرمال داشته ایم، واریانس کوچکتری داشته اند.

جدول (۱) خلاصه نتایج آنالیز واریانس

عوامل	درجه آزادی	جمع مربعات خطا SS	میانگین مربعات MS		F ۰/۰۵، ν۱، ν۲
فاکتور A = توزیع زمان	۲	۱۳۵/۱	۶۷/۶	۲/۹	۳/۱
فاکتور B = حل اولیه	۳	۱۳۴/۳	۴۴/۸	۱/۹	۲/۷
فاکتور C = اندازه مسئله	۵	۵۹۴/۹	۱۱۹	۵/۲	۲/۳
AB	۶	۷۹/۶	۱۳/۳	۰/۶	۳/۷
AC	۱۰	۴۰	۳۱	۱/۳	۱/۹
CB	۱۵	۲۶۰/۹	۱۷/۶	۰/۸	۲/۱
ABC	۳۰	۶۳۵/۶	۲۱/۲	۱	۱/۷
خطا	۱۴۴	۳۳۰۹/۹	۲۳	MSE = ۲۳	

فاکتور C چون $F_{0.05\,;\,v_1\,,\,v_2} < F = \frac{MS}{MSE}$ شده است، نشان دهنده وابستگی خطا به این فاکتور است.



نمودار (۱)

به طور خلاصه انتظار داریم هرچه نسبت n به m بزرگتر باشد و واریانس زمان‌ها کوچکتر باشد، جواب‌هایی نزدیکتر به بهینه داشته باشیم.

۳ـ آنالیز قیاسی

باتوجه به نتایج آنالیز حساسیت در قسمت قبل، مشاهده می‌شود ضعیف‌ترین نتایج الگوریتم با توزیع یکنواخت و اندازه‌های کار و ماشین کوچک به دست می‌آید. در ادامه آنالیز الگوریتم تعویض‌های جفتی، هشتاد مسئله که از توزیع یکنواخت با دسته‌های کار و ماشین کوچک ساخته شده‌اند، توسط الگوریتم با چهار نوع حل اولیه‌ای که در آنالیز حساسیت به کار بردیم حل شده است. زمان‌های اجرای کارها در چهار محدوده زیر قرار دارند:

۱ ـ در محدوده [۲۰ و ۱]، ۲۰ مسئله
۲ ـ در محدوده [۵۰ و ۲۰]، ۲۰ مسئله
۳ ـ در محدوده [۵۰ و ۱]، ۲۰ مسئله
۴ ـ در محدوده [۱۰۰ و ۱]، ۲۰ مسئله

در هر محدوده، ۱۰ مسئله با ۳ ماشین و ۱۵ کار و ۱۰ مسئله با ۵ ماشین و ۳۰ کار حل شده و نتایج حاصل از بکارگیری الگوریتم تعویض جفتی به ترتیب با الگوریتم‌های ۱ ـ بهترین ترتیب از بین ۴۰ ترتیب تصادفی ۲ ـ ترتیب نزولی کارها ۳ ـ چند برازشی، مقایسه گردید.

جدول (۲) خلاصه نتایج حاصل از آنالیز قیاسی را نشان می‌دهد، ملاک ارزیابی کلیه روش‌ها در این آنالیز، حد پایین قرار داده شده است. در ستون اول a نشان دهنده در صد تفاوت بین جواب حاصل از الگوریتم با حد پایین می‌باشد.

اعداد داخل جدول تعداد مسائلی می‌باشند که خطای آنها در حدودی قرار دارد که در ستون اول قید شده است. به عنوان مثال ردیف اول نشان دهنده تعداد مسائلی است که توسط روش‌های مورد مقایسه حل شده و جواب‌هایی برابر با حد پایین داشته‌اند. این ردیف از جدول نشان می‌دهد که از ۸۰ مسئله مورد بررسی، توسط ترتیب تصادفی تنها ۸ مسئله (۱۰ درصد) بوده است که توسط روش به جوابی برابر با حد پایین رسیده‌اند، در حالی که با روش تعویض‌های جفتی در حالت ترکیب چهار حل اولیه، ۷۲ مسئله (۹۰ درصد) با جوابی برابر با حد پایین به پایان رسیده است.

جدول فوق تنها مقایسه‌ای از دقت روش‌های مورد بررسی با روش تعویض‌های جفتی است. در مقایسه سرعت حل روش‌ها لازم به ذکر است که الگوریتم تعویض جفتی زمان حل بیشتری را در مقایسه با دیگر روش‌ها به خود اختصاص می‌دهد، لیکن این زمان با برنامه‌ای که با زبان GWBASIC نوشته شده بود و بر روی کامپیوترهای IBM 286 اجرا گردید، هرگز از ۳۵ ثانیه فراتر نرفت.

٤ـ تعمیم الگوریتم

الف ـ ماشین‌های غیریکسان

در صورتی که Sj نشان دهنده سرعت ماشین j ام $(1 \le j \le m)$ باشد، با انجام تغییرات جزئی زیر می‌توان از الگوریتم تعویض جفتی برای حل مسئله حداقل کردن زمان ختم کل برنامه زمان بندی nکاربر روی m ماشین موازی غیر یکسان (با سرعت یکنواخت یا غیر یکنواخت) استفاده نمود.

جدول (۲) جدول خلاصه نتایج آنالیز قیاسی

درصد اختلاف با حد پایین	ترتیب تصادفی	ترتیب نزولی کارها	چند برازشی	الگوریتم تعریض‌های جفتی با حل اولیه				
				LPT	SPT	SPT - LPT	SPT - LPT	ترکیب چهار حل اولیه
$a = 0$	۸	۲۷	۲۹	۶۴	۵۳	۵۲	۵۹	۷۲
$0 < a \leq 1$	۷	۲۲	۱۸	۱۳	۲۲	۲۴	۱۹	۸
$1 < a \leq 2$	۱۵	۱۹	۱۳	۲	۴	۲	۲	–
$2 < a < 3$	۱۷	۸	۱۳	۱	۱	۲	–	–
$3 < a \leq 4$	۱۱	۲	۵	–	–	–	–	–
$4 < a \leq 5$	۷	۲	۲	–	–	–	–	–
$5 < a$	۱۵	–	–	–	–	–	–	–

۱ ـ در قدم صفر ماشین‌ها را به ترتیب نزولی سرعتشان شماره گذاری کنید.

۲ ـ حد پایین را براساس رابطه زیر [2] محاسبه نمایید.

$$LB = \max \left[\left(\sum_{i=1}^{n} t_i / B(m) \right), \max_{1 \leq I \leq m} X(I) / B(I) \right] \quad (۱-۴)$$

که در آن

$$X(I) = \sum_{j=1}^{I} t_j \quad و \quad B(I) = \sum_{j=1}^{I} t_j$$

۳ ـ در قدم هفتم رابطه زیر را جایگزین رابطه (۵-۱) نمایید.

$$0 \leq (t_i - t_j) / S_{PB} \leq F_{PA} - F_{PB} \quad (۴-۲)$$

۴ ـ در قدم هشتم رابطه (۶-۱) را به صورت زیر تعدیل نمایید.

$$\left| \left(\frac{t_a - t_b}{S_{PB}} + \frac{t_a - t_b}{S_{PA}} \right) - (F_{PA} - F_{PB}) \right| \leq \left| \left(\frac{t_i - t_j}{S_{PB}} + \frac{t_i - t_j}{S_{PA}} \right) - (F_{PA} - F_{PB}) \right| \quad (۴-۳)$$

ب ـ ورودی‌های غیر همزمان

در صورتی که d_i نشان دهنده زمان تخصیص یافتن کار iام در برنامه موجود و r_i زمان ورود کار iام $(1 \leq i \leq n)$ به کارگاه باشد، برای بکارگیری الگوریتم در صورتی که یک $r_i \neq 0$ داشته باشیم، می بایست در قدم هفتم قبل از بررسی رابطه (۵-۱)، برقرار بودن شرایط زیر بررسی گردد:

$$\text{I)}\ r_i \leq d_j \qquad \text{II)}\ r_j \leq d_i \ (i \in A,\ j \in B)$$

بقیه مراحل و روابط همانند الگوریتم اصلی است با این تفاوت که رابطه ای برای حد پایین وجود ندارد و قدم دوم حذف می شود.

۵ ـ خلاصه و نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی مسئله برنامه ریزی بدون بریدگی n کار با زمان های اجرای قطعی بر روی m ماشین موازی یکسان و با هدف حداقل کردن زمان ختم کل برنامه پرداخته شده است. الگوریتمی که براساس تعویض جفتی کارهای یک حل اولیه ارائه گردیده است، جواب هایی با دقت و سرعت مطلوب ارائه می دهد.

نتایج تحلیل های انجام شده نشان دهنده عدم وابستگی دقت جواب ها به نوع حل اولیه و نوع پخش شدگی زمان ها، و بالا رفتن دقت با افزایش نسبت تعداد کارها به تعداد ماشین ها و کاهش واریانس زمان های اجراست.

همچنین الگوریتم در مقایسه با روش های ابتکاری دیگری که وجود دارند کارایی بیشتری دارد، به نحوی که با ترکیبی از چند حل اولیه در مدت زمانی معقول می توان به جواب هایی با حداکثر یک درصد اختلاف نسبت به حد پایین دست یافت.

از جمله ویژگی های مهم این الگوریتم سهولت تعمیم آن به حالت های پیچیده تر مانند ماشین های با سرعت غیر یکسان و حالت ورودی های غیر همزمان است.

علاوه بر اینکه از مطالب ارائه شده در این مقاله می توان در حل مسائلی عملی زمان بندی کارها در کارگاه های تولیدی و شبکه های کامپیوتری استفاده نمود، این امید است که متدولوژی ارائه شده بتواند در حل مسائل مختلف زمان بندی مانند کار کارگاهی (Job shop) و دیگر مسائل ترکیبی مورد استفاده قرار گیرد.

ضمائم

الف ـ اثبات رابطه ۵ ـ ۱

قدم هفتم الگوریتم تعویض های جفتی، کلیه تعویض های شدنی مسئله را شناسایی می کند و رابطه ۵ − ۱ نیز شرط شدنی بودن یک تعویض جفتی است زیرا:

چنانچه F'_{PA} , F'_{Pb} را مقادیر زمان ختم دو ماشین PA و PB پس از انجام یک تعویض جفتی بین دو کار $i \in A$ و $j \in B$ با زمان های اجرای t_i و t_j فرض کنیم، بنا به تعریف تعویض شدنی می خواهیم داشته باشیم:

$$\max(F'_{PA}, F'_{PB}) \le F_{Pa}$$

رابطه فوق با ۵ − ۱ برابر است زیرا با فرض صادق بودن رابطه ۵ − ۱:

اولاً داریم:

$$F'_{PB} = F_{PB} + (t_i - t_j)$$

که پس از جایگزین کردن رابطه ۵ − ۱ در آن خواهیم داشت:

$$F'_{PB} \le F_{PB} + (F_{PA} - F_{PB}) \rightarrow F'_{PB} \le F_{PA} \qquad (A.1)$$

ثانیاً با توجه به اینکه الگوریتم، کاری را جایگزین در ماشین F_{PA} می نماید که زمان اجرای کوتاهتری دارد، داریم:

$$F'_{PA} \le F_{PA} \qquad (A.2)$$

که از روابط A.1 و A.2 نتیجه می شود:

$$\max(F'_{PB}, F'_{PA}) \le F_{PA}$$

ب ـ اثبات رابطه ۶ − ۱

الگوریتم در قدم هشتم، از بین تعویض های شدنی، آنکه حداقل واریانس را ایجاد می کند انتخاب می نماید. به عبارت دیگر می خواهیم قدر مطلق $F'_{PA}-F'_{PB}$ حداقل مقدار ممکن را داشته باشد. رابطه ۶−۱ برای شناسایی این تعویض است، زیرا:

$$\min\{|(F'_{PA} - F'_{PB})|\} = \min\{|(F_{PA} - t_i + t_j) - (F_{PB} - t_j + t_i)|\}$$

$$= \min\{|(F_{PA} - F_{PB}) - 2*(t_i - t_j)|\}$$

علایم و نمادها

m = تعداد ماشین ها

n = تعداد کارها

$\lceil\ \rceil$ = روند کردن رو به بالا

$|\ |$ = قدرمطلق

F_i = زمان ختم کارهای تخصیص یافته به ماشین iام

PA = ماشینی که بزرگترین زمان ختم را دارد.

PB = ماشینی که کوچکترین زمان ختم را دارد.

A= مجموعه کارهای تخصیص داده شده به ماشین PA
B = مجموعه کارهای تخصیص داده شده به ماشین PB
LB= حد پایین مسئله

M= زمان ختم حاصل از الگوریتم تعویض های جفتی
t_i = زمان اجرای کار iام ($1 \le i \le n$)
T_i = کار شماره iام ($1 \le i \le n$)

مراجع

[1] Baker, K.R., Introduction to Sequencing and Scheduling, New York, John wiley, 1974.

[2] Coffman, E. G., Computer and Job - Shop Scheduling, New York, John Wiley, 1976.

[3] Fisher, M.L., Optimal Solution of Scheduling Problems using Lagrangian Multipliers: Part I, Operations Research, Vol 21, No. 5, 1973 a, PP1114 - 1127.

[4] Fisher, M.L., Optimal Solution of Scheduling Problems using Lagrangian Multipliers: Part II, in S. E. Elmaghraby (Editor), Symposium on the Theory of Scheduling and its Applications, Berlin, Springer - Verlag, 1973 b.

[5] Garey, M.R. and Johnson, D.S., Computer and Intractability: A Guide to the theory of NP Completeness, San Francisco, Freeman, 1979.

[6] Garey, M. R., Graham, R. L. and Johnson, D.S., Performance Guarantees for Scheduling Algorithms, Operations Research, Vol 26, No. 1, 1978, PP3-21.

[7] Graham, R,L., Bounds on Multiprocessing Anomalies, SIAM J. APPL. Math., Vol 17, 1969, PP416 - 429.

[8] McNaughton, R., Scheduling with Deadlines and Loss Functions, Management Science, Vol 6, No. 1, 1959, PP1-12.

[9] Sahni, S., Algorithms for Scheduling Independent Tasks, Journal of A.C.M., Vol 23, No. 1, 1976 , PP116-137.

[10] Sahni, S., General Techniques for Combinatorial Approximations, Operations Research, Vol 25, No. 6, 1977.