برنامه ریزی تولید چند مرحله ای با محدودیت ظرفیت تولید و در نظر گرفتن هزینه های تولید غیرخطی

سید محمد تقی فاطمی قمی
دانشیار

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

سید مسعود میرکاظمی
فارغ التحصیل دوره دکتری

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مقاله یك سیستم تولیـد چند مرحله ای در نظر گرفته شده که در هر مرحله با محدودیت ظرفیـت تولید روبرو هستیم. تقاضای هر پریود معین و افق برنامه ریزی محدود است. هزینه هایی که در مدل در نظر گرفته شده شامل راه اندازی، نگهداری و تولید است. هزینه تولید غیرخطی و هدف حداقل نمـودن مجمـوع هزینه های یاد شده است. با اسـتفاده از روش گـرادیان یك تقریب خطی جـایگزین هزینه تولید گـردیده و سپس با بکارگیری روش دیگری اقدام به تقریب خطی مناسبی جهت حذف هزینه راه اندازی شـده است. در ادامه با تطبیق مسئله به یك شبکه و با تعیین حد پایین به دست آمده از تقریب خطی در یك مدل انشعاب و تحدید (Branch & Bound) اقدام به حل مدل گردیده است.

Multistage Production Planning with Capacity Constraints and Nonlinear Production Costs

S. M. T. Fatemi Ghomi
Associate Professor

Ind. Engineering Department,
Amirkabir University of Technology

S. M. Mirkazemi
Ph. D. Graduate

Ind. Engineering Department,
Tarbiat Modarres University

Abstract

This paper considers a multistage production system with capacity constraints in each stage. The demand in each period is deterministic and planning horizon is finite. The considered costs are set-up cost, holding inventory cost, and production cost. The production cost is nonlinear. The aim is to minimize the total cost.

Gradient method is used to present a linear approximation for production cost. Then another procedure is applied to give a suitable linear approximation to omit set-up cost. In continue the problem is converted to a network structure and a lower bound is determined through the obtained linear approximation. These attempts are made to construct a branch and bound model of the problem. Finally the problem is solved.

مقدمه

بســـیـــاری از صنایع از خطوط تولیـــد ســـری برخوردارند. در این صنایع مواد به مرحله اول تولید وارد گردیده و پس از گذراندن مراحل متعدد که به شکل متوالی عمل می‌نمایند، محصول نهایی از آخرین مرحله خارج می‌شود. تعیین اندازه انباشته در حالت چند مرحله‌ای با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت و هزینه‌های راه‌اندازی و نگهداری به نوبه خود باعث پیچیدگی مدل می‌گردد. با وجود تحقیقات قابل توجهی که در این زمینه صورت می‌گیرد، به دلیل گستردگی زمینه تحقیق هنوز موضوعاتی وجود دارد که ادامه راه تحقیق آنها بسته نشده و بعضی از مقالات موجود به شکل‌های مختلف به بررسی مطالعات انجام شده در این زمینه پرداخته و موضوعات جدید مطالعاتی را پیشنهاد کرده‌اند، که به تعدادی از آنها اشاره می‌گردد.

در سال ۱۹۸۷ بهل وریتزمن [۴] پس از تشریح برنامه‌ریزی‌های بلند مدت، میان مدت و کوتاه مدت به دسته بندی مطالعات انجام شده در زمینه تعیین اندازه انباشته در برنامه ریزی میان مدت پرداخته و طی یک بررسی بر حسب مرحله (یک مرحله‌ای یا چند مرحله‌ای) و نیز بر حسب محدودیت یا عدم محدودیت در منابع به خصوص ظرفیت تولید، مقالاتی را ارائه داده‌اند. در این مطالعه با در نظر گرفتن عواملی چون زمان اجرای کامپیوتر، عمومیت داشتن، بهینه سازی، قابلیت ادراک، قدرت مقابله با سایر تکنیک‌ها (در مقیاس بزرگ) به ارزیابی مقالات در هر یک از دسته‌های فوق‌الذکر پرداخته و تحقیقات آتی را مشخص کرده‌اند. لازم به تذکر است حتی در سال‌های اخیر هم منابعی وجود دارد که به صحت مقاله فوق تأکید می‌کند. از جمله می‌توان به مقاله سالمون و کوئیک [۱۳] در سال ۱۹۹۳ اشاره نمود. در سال ۱۹۸۸ مااس و لوک وان [۱۴] روش‌های به کار برده شده در زمینه مسائل تک مرحله‌ای که دارای تنوع در محصول می‌باشند را مورد مطالعه قرار داده و روش‌های ابتکاری که دارای کاربرد خاصی یا عمومی هستند را بررسی نموده‌اند. در این مقاله همچنین مروری به نسبت وسیع به روش‌های محاسباتی داشته و آنها را مورد آزمایش و ارزیابی قرار داده است.

بررسی مقالات دیگری در سال ۱۹۹۰ توسط گویال و گوناسکاران [۸] با در نظر گرفتن تنوع در مراحل تولید و محصول و تعداد ماشین‌ها در هر مرحله اقدام به ارزیابی و دسته بندی مطالعات انجام شده و بر حسب توابع هدف و تکنیک‌های به کار برده شده، در حل مسائل پرداخته و فهرست‌هایی را ارائه داده‌اند. در سال ۱۹۹۳ زاپفل و میس بائر [۲۳] مفاهیم جدید برنامه ریزی و کنترل تولید را مورد بحث قرار داده و به تشریح علل و ضعف‌های مدل‌های مبتنی بر MRP پرداخته‌اند و در مقابل مؤثر بودن مفاهیم جدیدی چون Kanban, JIT OPT, MRP II, Work Load Control را برحسب شرایطی چون کمیت تولید، ساختار، تنوع محصولات، تکنولوژی ساخت و تقاضا مورد بررسی قرار داده و فهرستی از مقالات در هر زمینه ارائه شده و تحقیقات آتی پیرامون مقایسات غیرکمّی (کیفی) جهت پاسخگویی به پیچیدگی‌ها ارائه گردیده است. نوعی دیگر بررسی در زمینه موضوع تولید تک محصول بدون در نظر گرفتن محدودیت منابع است که در سال ۱۹۹۵ توسط والسی [۲۰] صورت گرفته که در آن به بررسی سیر تکنیک‌های به کار برده شده در حل اینگونه مسائل طی سه مقطع زمانی (۱۹۷۵ - ۱۹۵۸)، (۱۹۸۷ - ۱۹۷۵) و (۱۹۹۵ - ۱۹۹۰) پرداخته و فهرستی از مقالات را در هر زمینه ارائه داده است. طی بررسی‌های انجام شده عواملی را که باعث وسعت مسائل برنامه ریزی تولید شده‌اند، گاهی نوع تصمیم گیری (کوتاه مدت، میان مدت و دراز مدت)، یک مرحله‌ای یا چند مرحله‌ای بودن، شکل تولید (سری، مونتاژ یا حالت کلی MRP)، در نظر گرفتن پارامترهایی از جمله زمان یا هزینه راه‌اندازی، هزینه نگهداری وسفارشات عقب افتاده، ایستایی یا پویایی در تقاضا، محدود بودن یا نبودن افق برنامه ریزی، تک محصولی یا چند محصولی، قطعی یا احتمالی بودن بعضی از پارامترها از جمله تقاضا یا از کار افتادن تجهیزات تولیدی، محدودیت ظرفیت یا سایر منابع و ... را می‌توان نام برد. از طرف دیگر تعریف تابع هدف نیز به نوبه خود به گستردگی و تنوع مسائل کمک می‌کند، که می‌توان به عنوان مثال به بهینه نمودن هزینه یا زمان تولید اشاره نمود.

برحسب شرایط فوق تکنیک‌های مختلفی ارائه گردیده که عموماً مسائل با مقیاس کوچک با بهینه ســازی توأم بوده و در مسائل با مقیاس بزرگ روش‌های ابتکاری توسعه داده شده‌اند. از جمله تکنیک‌ها می‌توان به برنامه ریزی خطی و یا غیر خطی، برنامه ریزی پویا، شبیه سازی، استفاده از تئوری شبکه، Tabu Search, Lagrangean Relaxation Simulated Annealing,

انشعاب و تحدید، تئوری صف و نیز بسیاری از روش‌های ابتکاری اشاره نمود. در این قسمت به نمونه‌هایی از سوابق کارهای انجام شده در زمینه سیستم‌های تولید چند مرحله‌ای پرداخته می‌شود.

بلاک بورن و میلن در سال ۱۹۸۴ [۵] یک مدل برنامه‌ریزی تولید چند مرحله‌ای با افق نامحدود و با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت برای تولید یک محصول را ارائه دادند. در این مدل با حداقل نمودن مجموع هزینه‌ها در واحد زمان مقدار بهینه فاصله سفارش در هر مرحله تعیین می‌شود. در سال ۱۹۸۴ افنتاکیس، گاویش و کارمارکار [۲] اقدام به فرموله نمودن یک سیستم مونتاژی براساس مفهوم Echelon نموده که در بهینه‌سازی مسائل بدون محدودیت در منابع کاربرد دارد. آنها همچنین با استفاده از ضرایب لاگرانژ مسئله را تجزیه نموده و در نهایت با تعیین حد پایین و با بکارگیری یک روش انشعاب و تحدید به حل ۱۲۰ مسئله تصادفی پرداخته‌اند. در همان سال زاهوریک و توماس [۲۱] بدون در نظر گرفتن هزینه راه‌اندازی اقدام به برنامه‌ریزی خطی یک مسئله چند مرحله‌ای با چند محصول نموده و نشان دادند که یک مسئله سه پریود، یک موضوع شبکه است و این مورد اساس توسعه مدل ابتکاری آنها برای T پریود شده است. در سال ۱۹۸۶ افنتاکیس و گاویش [۱] با تکیه و بکارگیری مفهوم Echelon بدون در نظر گرفتن محدودیت منابع اقدام به ارائه مدلی برای سیستم‌های تولیدی پیچیده (حالت کلی MRP) نموده و با بکارگیری ضرایب لاگرانژ و بهبود بخشیدن آنها در مراحل تکرار و با تعریف یک حد پایین به توسعه یک روش انشعاب و تحدید پرداخته‌اند. در همان سال ویکری و مارکلند [۱۷] در یک سیستم سری تولید قرص با بکارگیری یک روش ابتکاری و با در نظر گرفتن تابع هدف چند منظوره یک مسئله با مقیاس بزرگ را حل نموده‌اند. در سال ۱۹۸۷ هوآن و مینگ لین [۱۱] با بکارگیری مفهوم Echelon در یک سیستم تولید چند مرحله‌ای و تک محصولی و با در نظر گرفتن مفروضاتی اقدام به ارائه یک برنامه‌ریزی پویا نموده که در سیستم‌های مونتاژی نیز قابل استفاده است. در سال ۱۹۸۹ تامورا [۱۵] با بکارگیری یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط و با تکیه بر اصل تجزیه دانتزینگ ـ ولف یک روش تقریب خطی ارائه نموده و در پایان مقاله با توسعه دو الگوریتم به حل تعدادی مسئله و مقایسه زمان CPU کامپیوتری آنها پرداخته است. در سال ۱۹۹۰ نیز کلارک و آرمنتانو [۶] با تکیه بر مفهوم Echelon و با بکارگیری نامساوی‌های صفحه برش در یک سیستم تولید مونتاژی یک الگوریتم ۴ مرحله‌ای ارائه نموده که در آن از روش انشعاب و تحدید نیز بهره جسته‌اند. گوناسکاران و گویال [۹] در سال ۱۹۹۱ یک مدل تحلیلی برای تعیین تولید اقتصادی چند محصول در یک سیستم چند مرحله‌ای با وجود تعدادی ماشین در هر مرحله را مورد مطالعه قرار دادند که در آن هدف حداقل نمودن مجموع هزینه‌های راه‌اندازی، نگهداری و انتظار انباشته بین مراحل است. در سال ۱۹۹۲ گوناسکاران و گویال [۱۰] یک مدل کاربردی در یک کارخانه ریسندگی ارائه نمودند که در آن تولید چند محصول متفاوت در چند مرحله و در هر مرحله توسط چند ماشین صورت گرفته است به طوری که حداقل هزینه ممکن حاصل شود و در نهایت جواب‌های حاصله با وضعیت فعلی به مقایسه و ارزیابی قرار داده شده است. در همان سال کریمی [۱۲] با زمانبندی محصول در یک سیستم تولید سری و با تقاضای ثابت و افق برنامه‌ریزی نامحدود و با هدف حداقل نمودن مجموع هزینه‌های راه‌اندازی و نگهداری اقدام به تعیین سیکل‌های قابل تکرار تولید و توقف نموده است. در ادامه مقاله سه الگوریتم ابتکاری و یک الگوریتم انشعاب و تحدید توسعه داده و به ارزیابی نتایج پرداخته است.

در سال ۱۹۹۳ النجداوی و کلیندروف [۳] مدلی برای سیستم تولید چند مرحله‌ای چند محصولی در یک افق برنامه‌ریزی نامحدود مورد مطالعه قرار داده که در این مدل با حداقل نمودن مجموع هزینه‌ها اقدام به تعیین زمان سیکل تولید و مقدار تولید هر محصول نموده است. در همان سال کلارک و آرمنتانو [۷] با در نظر گرفتن Lead time و با تکیه بر مفهوم Echelon اقدام به فرموله کردن یک سیستم تولید مونتاژی نموده و در توسعه آن سیستمهای پیچیده را نیز مد نظر قرار داده‌اند. ژوزف [۱۸] در سال ۱۹۹۵ به نوعی دیگر مطالعه در زمینه سیستم تولید سری پرداخت. بدین ترتیب که با ثابت نگه داشتن هزینه بهینه اقدام به تعیین حدود تغییرات هزینه راه‌اندازی مراحل در هر پریود نموده به طوری که جواب بهینه تغییر نکند.

در این مقاله ابتدا بدون در نظر گرفتن هزینه غیر خطی تولید، مسئله فقط با در نظر گرفتن هزینه راه‌اندازی و تقریب خطی مربوط به آن و با بکارگیری یک روش انشعاب و تحدید حل می‌گردد. در ادامه به توسعه

مدل در زمینه غیرخطی بودن هزینه تولید پرداخته می‌شود. در هر بخش ابتدا منطق و استدلال های لازم ارائه و سپس قدم های الگوریتم مطرح و در انتها یک مثال همراه با حل آن ارائه می‌گردد.

۳- تعریف مسئله و شرح مدل

در این مدل یک سیستم تولید چند مرحله ای سری مورد نظر است که با محدودیت ظرفیت تولید در هر مرحله مواجه بوده و به دنبال برنامه ریزی تأمین تقاضای معین تعدادی از پریودهای محدود می باشیم. در این مدل هزینه های غیرخطی تولید، راه اندازی و نگهداری در نظر گرفته شده که مجموع آنها در طول دوره برنامه ریزی تابع هدف را تشکیل می دهد. با بکارگیری و تطبیق یک شبکه به دنبال ارائه راه حلی می باشیم که حداقل هزینه ممکن در جهت تأمین تقاضا حاصل شود.

در اینجا سفارش های عقب افتاده مجاز نبوده و حتماً بایستی تقاضای هر پریود به طور کامل تأمین شود. تصویر شبکه مربوطه در ضمیمه آمده است. در هر گره از شبکه دو جریان ورودی و دو جریان خروجی وجود دارد. جریان ورودی شامل مقدار تولید در آن مرحله و دیگری مقدار جریان (تولیدی) است که از مرحله مشابه پریود قبلی ارسال شده است. جریان خروجی شامل تولید مرحله بعدی یا تقاضا و دیگری مقدار جریانی است که برای مصرف مرحله مشابه پریود بعدی فرستاده می‌شود.

همانطور که در مقدمه توضیح داده شد، ابتدا فرض می‌نماییم که هزینه تولید خطی است. در این حالت با استفاده از یک تقریب خطی مناسب در مدل و حذف متغیر صفر و یک مربوط به هزینه راه اندازی و پیدا کردن یک حد پایین و نیز بکارگیری روش انشعاب و تحدید قدم های الگوریتم را توضیح داده و به حل مسئله می‌پردازیم. سپس در بخش ششم موضوع غیر خطی بودن هزینه تولید مورد بحث قرار می‌گیرد.

ابتدا یک فرموله بندی عمومی مدل را به شکل زیر ارائه می‌دهیم:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} \left[A_{j,t} Y_{j,t} + V_{j,t} X_{j,t} + h_{j,t} I_{j,t}\right] \quad (۱)$$

$$I_{M,t-1} + X_{M,t} - I_{M,t} = D_t \qquad t = 1, 2, \dots, T \quad (۲)$$

$$I_{j,t-1} + X_{j,t} - I_{j,t} - X_{j+1,t} = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, M-1 \quad , t = 1, 2, \dots, T \quad (۳)$$

$$X_{j,t} \leq Y_{j,t}\ C_j \qquad j = 1, 2, \dots, M \quad , t = 1, 2, \dots, T \quad (۴)$$

$$Y_{j,t} \in \{0, 1\}\ ,\ X_{j,t}\ ,\ I_{j,t} \geq 0$$

پارامترهای به کار برده شده در فرموله بندی فوق به شرح زیر می باشند.

تعداد مراحل	M
افق برنامه ریزی	T
هزینه راه اندازی در مرحله زام	$A_{j,t}$
مقدار تولید در مرحله زا م	$X_{j,t}$
هزینه متغیر تولید در مرحله زام	$V_{j,t}$
هزینه نگهداری در مرحله زام	$h_{j,t}$
مقدار موجودی مرحله زام در پایان پریود tام	$I_{j,t}$
ظرفیت تولیدی موجود در مرحله زام	C_j
تقاضای محصول نهایی در پریود t	D_t

$$Y_{j,t} = \begin{cases} 1 & \text{If } X_{j,t} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در مدل ارائه شده رابطه (۱) نشان دهنده تابع هدف است که مجموع هزینه های راه اندازی و متغیر تولید و نگهداری را حداقل می نماید و رابطه (۲) تضمین کننده تقاضا در هر پریود می باشد. رابطه (۳) نشان می دهد که مجموع جریان خارج شده هر گره (j, t) در یک شبکه مساوی مجموع جریان وارد شده به آن است. و رابطه (۴) مانع افزایش تولید بیشتر از ظرفیت موجود در هر مرحله می گردد.

از آنجایی که هدف ارائه یک روش انشعاب و تحدید می باشد، بنابراین می بایست به گونه ای عمل نماییم که در هر مرحله تکرار، وضعیت $Y_{j,t}$ از نظر صفر و یک بودن روشن شود. در این حالت اگر یک وضعیت میانی را در نظر بگیریم، تعدادی از این متغیرها مقدار یک داشته و تعدادی دیگر مقدار صفر به خود گرفته و مابقی آزاد هستند. باتوجه به این مطلب به منظور حصول هدف ابتدا به تعریف مجموعه W ها پرداخته و مسئله را دوباره به شکل زیر فرموله می نماییم.

W^+ مجموعه ای از متغیرهای $Y_{j,t}$ هستند که مقدار آنها مساوی یک است.

W^{-} مجموعه‌ای از متغیرهای $Y_{j,t}$ هستند که مقدار آنها مساوی صفر است.

W° مجموعه‌ای از متغیرهای $Y_{j,t}$ که آزاد هستند.

$$Min z = \sum_{(j,t)\in W^{+}} \sum A_{j,t} + \sum_{(j,t)\in W^{\circ}} \sum A_{j,t} Y_{j,t} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{M} V_{j,t} X_{j,t} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{M} h_{j,t} I_{j,t} \quad (II)$$

S. t.

$$I_{M,t-1} + X_{M,t} - I_{M,t} = D_t \qquad t = 1, 2, ..., T$$

$$I_{j,t-1} + X_{j,t} - I_{j,t} - X_{j+1,t} = 0 \qquad j = 1, 2, ..., M \qquad t = 1, 2, ..., M$$

$$X_{j,t} \leq Y_{j,t} C_j \qquad \text{for } (j,t) \in W^{\circ}$$

$$X_{j,t} = 0 \qquad \text{for } (j,t) \in W^{-}$$

$$Y_{j,t} = 0, 1 \qquad \text{for } (j,t) \in W^{\circ}$$

حال به دنبال آن هستیم که مقدار $Y_{j,t}$ را به شکلی از مدل خارج نماییم. بدین منظور رابطه زیر را جایگزین در مدل (II) می‌نماییم.

$$0 \leq Y_{j,t} \leq 1 \qquad \text{for } (j,t) \in W^{\circ}$$

مسئله جدید یک مدل باز شده (Relaxation) مسئله (II) می‌باشد. زیرا شرط قبلی در مورد آن دیگر مطرح نیست. از آنجایی که در این حالت فضای جواب توسعه یافته است، پس جواب حاصل از این مسئله می‌تواند به عنوان یک حد پایین مسئله اصلی به کار رود. از طرف دیگر بایستی توجه به این نکته داشته باشیم که در مسئله یاد شده جواب بهینه همواره محصول رابطه زیر است:

$$Y_{j,t} = X_{j,t} / C_j \qquad \text{for } (j,t) \in W^{\circ}$$

ضرایب $Y_{j,t}$در تابع هدف مثبت هستند و $Y_{j,t}$ فقط در محدودیت حد بالای ساده خود ظاهر می‌گردد. علاوه بر آن در تنها محدودیتی که $X_{j,t}$ را محدود ساخته، به کار می‌رود. بنابراین می‌توانیم به جای $Y_{j,t}$ رابطه $X_{j,t} / C_j$ را جایگزین نماییم. در این صورت ضریب $X_{j,t}$ را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$Z_{j,t} = [A_{j,t} / C_j + V_{j,t}]$$

با بکارگیری رابطه فوق مسئله باز شده را می‌توان به شکل زیر دوباره فرموله نمود.

$$Min Z_{LB} = \sum_{(j,t)\in W^{+}} \sum A_{j,t} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{M} Z_{j,t} X_{j,t} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{M} h_{j,t} I_{j,t} \quad (III)$$

که در آن

$$Z_{j,t} = [A_{j,t} / C_j + V_{j,t}] \qquad \text{for } (j,t) \in W^{\circ}$$

$$Z_{j,t} = V_{j,t} \qquad \text{for } (j,t) \in W^{+}$$

S. t.

$$I_{M,t-1} + X_{M,t} - I_{M,t} = D_t \qquad t = 1, 2, ..., T$$

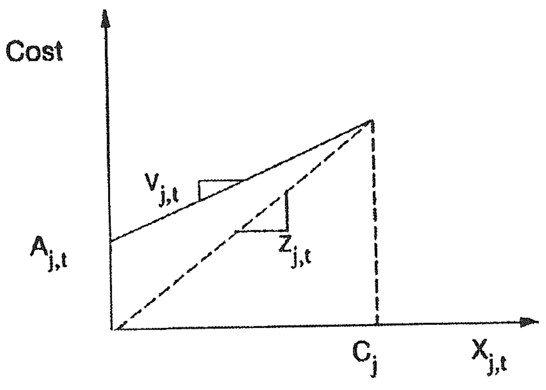
$$I_{j,t-1} + X_{j,t} - I_{j,t} - X_{j+1,t} = 0 \qquad j = 1, 2, ..., M-1 \qquad t = 1, 2, ..., T$$

$$0 \leq X_{j,t} \leq C_k$$

$$X_{j,t} = 0 \qquad \text{for } (j,t) \in W^{-}$$

مسئله (III) یک مدل شبکه با هزینه خطی است که به آسانی با روش‌های متداول از جمله روش (out - of - Kilter) یا روش حداکثر جریان با حداقل هزینه قابل حل است. در یک مسئله چند مرحله‌ای اگر تقاضای خروجی را به یک گره پایانی شبکه وصل نموده و هزینه آنها را مساوی صفر و محدودیت ظرفیت آنها را معادل تقاضایشان در نظر بگیریم، در این صورت یک شبکه خواهیم داشت که جریان از یک نقطه مبداء شروع و به یک نقطه در انتهای شبکه ختم می‌گردد.

در هر صورت با حل مسئله (III) و محاسبه یک حد پایین می‌توان با ارائه یک مسئله انشعاب و تحدید به حل مسئله اصلی پرداخت. برای توجیه مفهوم حد پایین به شکل زیر توجه شود.



به منظور بیان الگوریتم انشعاب و تحدید لازم است تغییرات زیر در مسئله (III) داده شود. به عبارتی رابطه زیر جایگزین رابطه $\{Y_{j,t} = 0 \text{ for } (j, t) \in W^-\}$ می گردد.

$$\left.\begin{array}{l} Z_{j,t} = B \\ 0 \le X_{j,t} \le C_j \end{array}\right\} \quad \text{for } (j, t) \in W^-$$

که در آن B یک عدد بزرگ مثبت است. این بدان دلیل است که لزوم یک جواب ممکن فراهم گردد. نکته دیگر در مورد رُند کردن جواب حاصل از مسئله (III) است که به شکل زیر عمل می گردد.

$$\left.\begin{array}{lll} Y_{j,t} = 1 & \text{If} & X_{j,t} > 0 \\ Y_{j,t} = 0 & \text{If} & X_{j,t} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{for } (j, t) \in W^\circ$$

در این حالت نتیجه حاصل شده را با Y_R و هزینه حاصل شده را با Z_R نشان داده که به شکل زیر محاسبه می گردد.

$$Z_R = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{M} [A_{j,t} Y_{j,t} + V_{j,t} X_{j,t} + h_{j,t} I_{j,t}]$$

در ادامه Z_B را همواره بهترین جواب به دست آمده می نامیم. بنابراین در هر مرحله انجام عملیات و محاسبه Z_R جدید مقایسه ای بین این دو صورت گرفته و اگر Z_R جدید کوچکتر از Z_B باشد، بلافاصله جایگزین آن شده Y_B, I_B, X_B اصلاح شده و حل مسئله دوباره ادامه می یابد.

٤ ـ شرایط لازم به منظور حصول جواب ممکن

از آنجایی که در مدل مورد مطالعه کمبود تقاضا یا سفارش عقب افتاده مجاز نیست، لاجرم تمامی مراحل تولید در پریود اول می بایست حداقل به میزان تقاضای پریود اول تولید داشته باشد تا جواب ممکن صورت گیرد. یعنی:

$$Y_{j,1} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, M \qquad \text{به ازاء}$$

و یا به شکل دیگر می توان گفت:

$$X_{j,1} \ge D_1 \qquad j = 1, 2, \ldots, M \qquad \text{به ازاء}$$

علاوه بر پریود اول در بعضی از مراحل در پریودهای دیگر هم باید حتماً تولید صورت گرفته تا جواب ممکن داشته باشیم. در صورتی که بتوان به نحوی این موضوع را مشخص نمود، کمک شایانی به روشن شدن موقعیت بعضی از متغیرهای $Y_{j,t}$ خواهد نمود و تبع آن کاهش قابل ملاحظه ای در حجم محاسبات روش انشعاب و تحدید اتفاق می افتد. برای رسیدن به این مطلب ابتدا لازم است نحوه محاسبه مقدار $R(t)$ در هر پریود روشن شود و آن عبارت است از حداقل موجودی که می بایست برای رسیدن به حل ممکن از پریود tام به پریود $t + 1$اُم فرستاده شود و به روش زیر به دست می آید.

$$q = \text{Min}\{C_1, C_2, \ldots, C_M\}$$

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{If } \; t = T \\ \text{Max}\{0, D_{t+1} + R(t+1) - q\} & \text{If } \; t < T \end{cases}$$

برای آن که متوجه شویم، در مرحله زام (یا به عبارتی در گره $(j + t)$ در شبکه) باید حتماً تولید صورت گیرد یا خیر، ابتدا $P(j)$ را برای تمامی مراحل حساب می نماییم.

$$P(j) = \begin{cases} C_1 & \text{If } \; j = 1 \\ \text{Min}\{C_j, P(j-1)\} & \text{If } \; 1 < j \le M \end{cases}$$

سپس به ازاء هر (j, t) به شکل زیر نتیجه گیری می گردد.

$$F_{j,t} = P(j) \times (t-1) - \sum_{i=1}^{t-1} D_i$$

$$\text{If} \quad F_{j,t} \ge D_t + R(t) \Rightarrow Y_{j,t} \in W^\circ$$

$$\text{If} \quad F_{j,t} < D_t + R(t) \Rightarrow Y_{j,t} \in W^+$$

قضیه: در صورتی که با شرط $Y_{j,t} = 1$ جواب ممکن حاصل شود، لاجرم در مراحل بعدی آن پریود نیز می بایست تولید انجام گیرد. یعنی:

$$Y_{j,t} = 1 \quad \text{اگر} \quad \Rightarrow Y_{j+1,t} = 1,\ Y_{j+2,t} = 1, \ldots, Y_{M,t} = 1$$

اگر به شکل دیگر بخواهیم مطرح کنیم، بدین معنی است که :

$Y_{j,t} > 0 \quad \Rightarrow X_{j+1,t} > 0 , X_{j+2,t} > 0 , \ldots , X_{M,t} > 0$

اثبات:

فرض کنیم شرط $Y_{j,t} = 1$ در شروع مسئله برقرار باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$F_{j,t} < D_t + R(t)$$

برای روشن شدن وضعیت $(j + 1, t)$ بنابر روش بایستی $P(j + 1)$ را محاسبه نماییم. بنابراین:

$$P(j + 1) = \text{Min}\{C_j, P(j)\}$$

مقدار حداقل رابطه فوق معادل C_j یا $P(j)$ خواهد بود، اما مسلم است که حتماً $P(j + 1) \le P(j)$ است. از طرف دیگر با توجه به اینکه مجموع تقاضاها تا پریود t-1 ام ثابت است، بنابراین خواهیم داشت:

$$F_{j+1,t} \le F_{j,t}$$

با در نظر گرفتن شرط $Y_{j,t} = 1$ و رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$F_{j+1,t} \le F_{j,t} < D_t + R(t)$$

و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۵- شرح الگوریتم انشعاب و تحدید

قدم صفر - (چک اولیه): برای شروع باید مطمئن شویم که آیا برای مسئله اصولاً حل ممکن وجود دارد؟ به منظور دست یافتن به این مطلب در صورتی که رابطه زیر به ازاء تمامی مقادیر t صادق باشد، به قدم اول می رویم.

$$\sum_{i=1}^{t} D_i \le q \times t$$

در غیر این صورت مسئله جواب ممکن نداشته و متوقف می‌شویم.

قدم ۱ - (شروع): با بکارگیری مطالب آخرین بخش وضعیت تمامی $Y_{j,t} = 1$ را مشخص کرده و یا به عبارت دیگر تمامی اعضای مجموعه W^+ و W° را شناسایی می‌نماییم. سپس با بکارگیری مدل (III) و حل آن به ترتیب Z_B, I_B, X_B, Y_B, Z_R را محاسبه نموده و در شروع $Z_B = Z_R$ قرار می‌دهیم.

قدم ۲ - (انشعاب): در صورتی که مجموعه W° تهی بوده و هیچ وضعیتی بدون بررسی باقی نمانده باشد، متوقف می شویم. در غیر این صورت وضعیت جدید یا در صورت عدم از بین متغیرهای W°، آن متغیری که دارای بیشترین اختلاف بین هزینه مقعر و تقریب خطی آن است را انتخاب و عمل انشعاب را انجام می دهیم. با انتخاب یک وضعیت موجود یا متغیر انشعاب شده (صفر و یک) به قدم بعدی می رویم.

قدم ۳ - (انسداد): در هر گره (j, t) که وضعیت انشعاب روشن شده، اگر زیر مجموعه‌ای از متغیرهای مربوطه به W^-, W^+ به شکل زیر بوجود آمده باشند:

$$Y_{j,1}, Y_{j,2}, \ldots, Y_{j,t} \notin W^\circ$$

به عبارت دیگر اگر در یک مرحله از پریود اول تا پریود tام وضعیت تمامی متغیرهای آن مرحله تثبیت (صفر و یک) شده و شرط زیر صادق باشد، آنگاه انسداد صورت می‌گیرد.

$$\sum_{i=1}^{t} Y_{j,i} \times C_j < \sum_{i=1}^{t} D_i$$

در غیر این صورت پس از حل مسئله (III) و به دست آوردن Z_{LB} به ترتیب زیر عمل می‌نماییم:

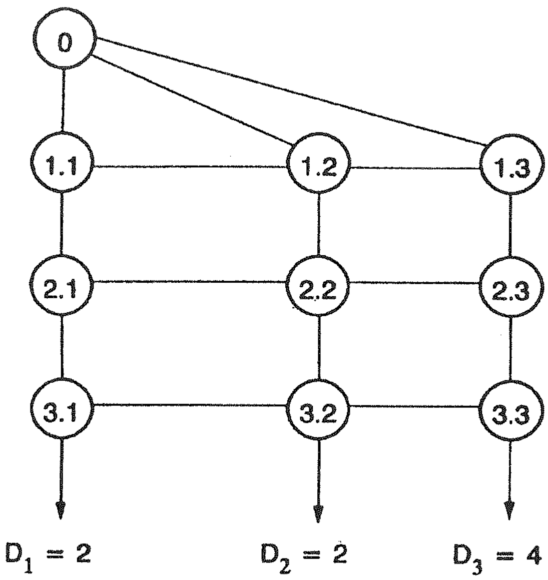
If $Z_{LB} \ge Z_B$ انسداد و به قدم دوم بروید

If $Z_{LB} < Z_B \rightarrow Z_R$ محاسبه $\rightarrow$

$\rightarrow$
- If $Z_R > Z_B$ به قدم دوم بروید.
- If $Z_R < Z_B$ Z_B را مساوی Z_R قرار داده I_B, X_B, Y_B را اصلاح نموده و به دوم بروید.
- If $Z_R = Z_{LB}$ انسداد و به قدم دوم بروید.

برای توجیه بیشتر به یک مثال که یک سیستم تولیدی سه مرحله‌ای با سه پریود است، توجه نمایید.

اطلاعات لازم در شکل نشان داده شده است. هزینه راه‌اندازی، متغیر تولید و نیز هزینه نگهداری در مراحل مختلف را ثابت فرض کرده‌ایم.



A_j	h_j	C_j	V_j
15	2	6	1
12	1	4	2
9	3	3	3

حل: با انجام قدم صفر متوجه می‌شویم که مسئله دارای جواب ممکن است و با انجام قدم یک نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$Y_{1,1},\ Y_{2,1},\ Y_{3,1} = 1$

$Y_{2,2} = 1 \Rightarrow Y_{2,3} = 1$

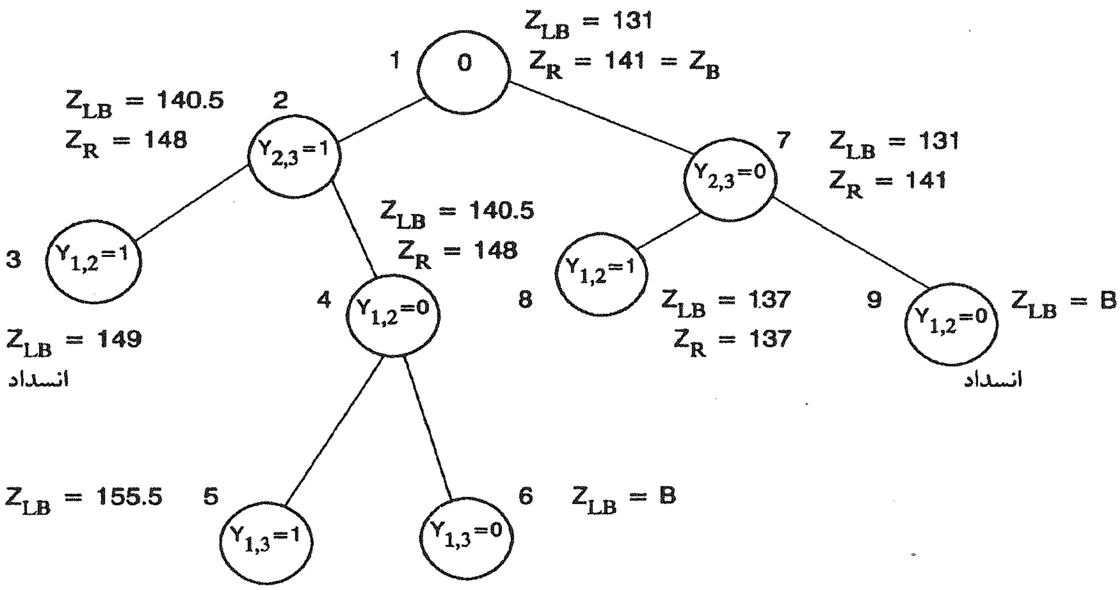
$Y_{3,1} = 1$

با استفاده از اطلاعات فوق و حل مسئله (III) خواهیم داشت:

$Z_{LB} = 131,\ Z_R = Z_B = 141$

$$X_B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad I_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در قدم دوم W° دارای سه عضو $Y_{2,3}$, $Y_{1,3}$, $Y_{1,2}$ می‌باشد و بقیه در قدم صفر تثبیت شده‌اند. و از آنجایی که متغیر $Y_{2,3}$ دارای اختلاف (تقریب خطی و متغیر تولید) بیشتری است، بنابراین برای انشعاب نمودن انتخاب می‌شود. شماره توالی عملیات و نتایج آنها (تکرار قدم‌های ۲ و ۳) در شکل بعد نشان داده شده است.

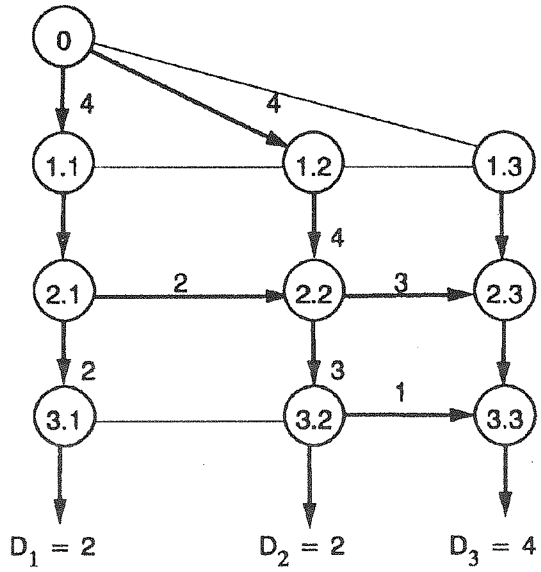


بنابراین جواب بهینه به شرح زیر است:

$$Z_B = 137$$

$$X_B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad I_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جریان در شبکه در شرایط بهینه به شکل زیر است:



۶- شرح مدل براساس هزینه غیر خطی تولید

حال وضعیتی را در نظر بگیریم که هزینه های تولید دارای توابع غیر خطی باشند، یعنی:

$$V_{j,t} X_{j,t} = \sum_i \alpha_i X_{j,t}^{n_i}$$

برای حصول جواب لازم است هزینه های مذکور قطعاً مقعر (Strictly Concave) نباشد. البته این موضوع می‌تواند در مورد هزینه نگهداری نیز صادق باشد. یعنی هزینه نگهداری می‌تواند غیرخطی در نظر گرفته شود که به عمومیت مدل خدشه‌ای وارد نمی‌شود. بدین منظور مقدار جریانی که در هر کمان شبکه عبور می‌کند را با $f_{i,j}$ نشان می‌دهیم. حال اگر f یک حل ممکن در شبکه (مدل) مورد نیاز باشد، می‌توان $C(\tilde{f})$ را به شکل زیر تقریب زد:

$$C(f) \approx C(\tilde{f}) + \sum_{i,j} \frac{\partial C(\tilde{f})}{\partial f_{i,j}} (f_{i,j} - \tilde{f}_{i,j})$$

از آنجایی که $\tilde{f}$. $C(\tilde{f}) - \nabla C(\tilde{f})$ ثابت است، مسئله برنامه ریزی خطی P (1) می‌تواند یک راه حل با حداقل هزینه به شکل زیر ارائه دهد.

$$P(1) \qquad \text{Min } \nabla C(\tilde{f}).\, f$$

$$\sum f_{i,j} - \sum f_{j,k} = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{T} D_i & j = S \quad \text{نقطه شروع شبکه} \\ 0 & j \neq F,\ S \quad \text{نقاط میانی شبکه} \\ \sum_{i=1}^{T} D_i & j = F \quad \text{نقطه پایانی شبکه} \end{cases}$$

$$0 \le f_{i,j} \le C_j$$

از آنجایی که $C(\tilde{f})$ خطی نیست، بنابراین حل حاصل از یک برنامه ریزی خطی (f^*) یک جواب با حداقل هزینه را ارائه نخواهد داد. اما این انتظار وجود دارد که یک جهت خوب $(f^* - \tilde{f})$ برای یافتن جوابی بهتر از $\tilde{f}$ را در اختیار ما قرار بدهد. بنابراین قدم بعدی جستجو در جهت تعیین شده $(f^* - \tilde{f})$ برای یافتن یک جواب بهتر در داخل حدود از قبل تعیین شده، می باشد.

$$P(2) \qquad \text{Min } C[\tilde{f} + \theta (f^* - \tilde{f})]$$

$$0 \le \theta \le 1$$

با حل مسئله P(2) و تعیین بهترین مقدار θ و جایگزین نمودن $\tilde{f} + \theta (f^* - \tilde{f})$ به جای $\tilde{f}$ و تکرار عملیات های فوق می‌توان همواره جواب بهتری را به دست آورد. لازم به تذکر است برای داشتن جواب های عدد صحیح می‌توان مقادیری را برای θ در فاصله صفر و یک در نظر گرفت به طوری که نتیجه مورد نظر حاصل گردد. در ادامه بحث در بخش شرح الگوریتم شرایط ختم نیز بیان خواهد شد.

۷- شرح الگوریتم انشعاب و تحدید با هزینه غیر خطی تولید

قدم ۱ - یک حل ممکن $(\tilde{f})$ انتخاب و مقدار ε را مشخص می‌نماییم.

قدم ۲ - با محاسبه $\nabla C(\tilde{f})$ و قرار دادن آن به جای $V_{j,t}$ به حل الگوریتم B &B شرح داده شده در بخش

۵ پرداخته و نتیجه حاصل را (f^*) می‌نامیم.

قدم ۳ ـ با حل مسئله $P(2)$ مقدار θ را طوری به دست می‌آوریم که $\tilde{f}$ جدید عدد صحیح باشد.

قدم ۴ ـ شرایط اختتام:

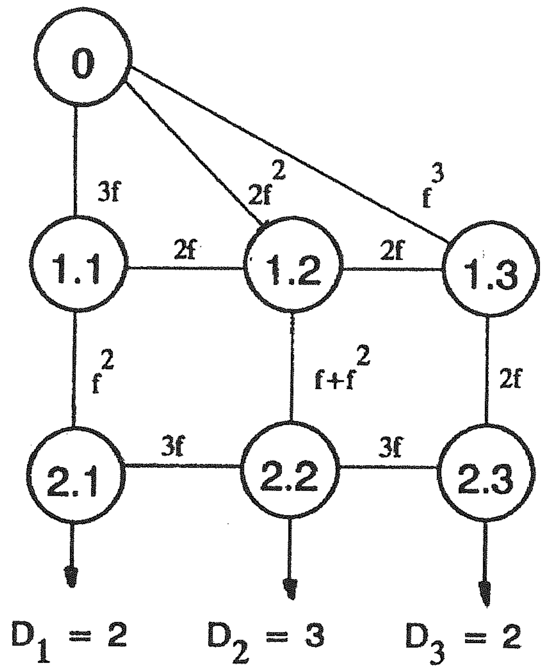
اگر $\theta = 0$ مسئله ختم شده است و متوقف می‌شویم.

اگر $| C[\tilde{f} + \theta (f^* - \tilde{f})] - C[\tilde{f}] | < \varepsilon$ مسئله ختم شده است و متوقف می‌شویم.

در غیر این صورت به جای $\tilde{f}$ مقدار به دست آمده $\tilde{f} + \theta (f^* - \tilde{f})$ را قرار داده و به قدم دوم می‌رویم.

به منظور توجیه بیشتر مطلب به حل یک مثال می‌پردازیم:

- هزینه متغیر تولید روی شکل نشان داده شده است.
- هزینه راه‌اندازی در مرحله اول معادل 10 و در مرحله دوم معادل 8 در نظر گرفته شده است.
- ظرفیت تولید در مرحله اول 5 و در مرحله دوم معادل 4 می‌باشد.



حل: اگر کمان‌های مربوط به تقاضاها را به یک گره فرضی متصل نماییم، مسئله تبدیل به یک شبکه می‌شود که محدودیت ظرفیت تولید در این کمان‌ها معادل تقاضای هر پریود بوده و هزینه تولید آنها صفر است. به منظور نمایش حل ممکن یا گرادیان به شکل زیر عمل می‌نماییم:

$$f = (X_{11}, X_{12}, X_{13} / X_{21}, X_{22}, X_{23} / D_1, D_2, D_3 / I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22})$$

باتوجه به توضیحات فوق طبق قدم‌های الگوریتم به حل مسئله می‌پردازیم. لازم به تذکر است در اولین تکرار توضیحات داده شده و در تکرارهای بعدی از ذکر توضیحات خودداری گردیده است.

قدم ۱:

$$\tilde{f} = (2, 3, 2 / 2, 3, 2 / 2, 3, 2 / 0, 0, 0, 0,) \qquad C(\tilde{f}) = 106$$

$$\nabla C(\tilde{f}) = (3, 12, 12, / 4, 7, 2 / 0, 0, 0 / 2, 2, 3, 3)$$

قدم ۲:

با استفاده از الگوریتم B &B خواهیم داشت:

$$f^* = (5, 2, 0 / 4, 1, 2 / 2, 3, 2 / 1, 2, 2, 0)$$

قدم ۳:

$$\tilde{f} + \theta (f^* - \tilde{f}) = (2 + 3\theta, 3 - \theta, 2 - 2\theta / 2 + 2\theta, 3 - 2\theta, 2 / 2, 3, 2 / \theta, 2\theta, 2\theta, 0)$$

با توجه به اینکه به دنبال یافتن جواب‌های عدد صحیح می‌باشیم، بنابراین θ می‌تواند صفر یا یک در نظر گرفته شود.

$$\theta = 0 \Rightarrow C(\tilde{f}) = 106$$

$$\theta = 1 \Rightarrow C(\tilde{f}) = 101$$

بنابراین $\theta = 1$ را انتخاب و $\tilde{f}$ جدید به شرح زیر است.

$$\tilde{f} = (5, 2, 0 / 4, 1, 2 / 2, 3, 2 / 1, 2, 2, 0) \qquad C(\tilde{f}) = 101$$

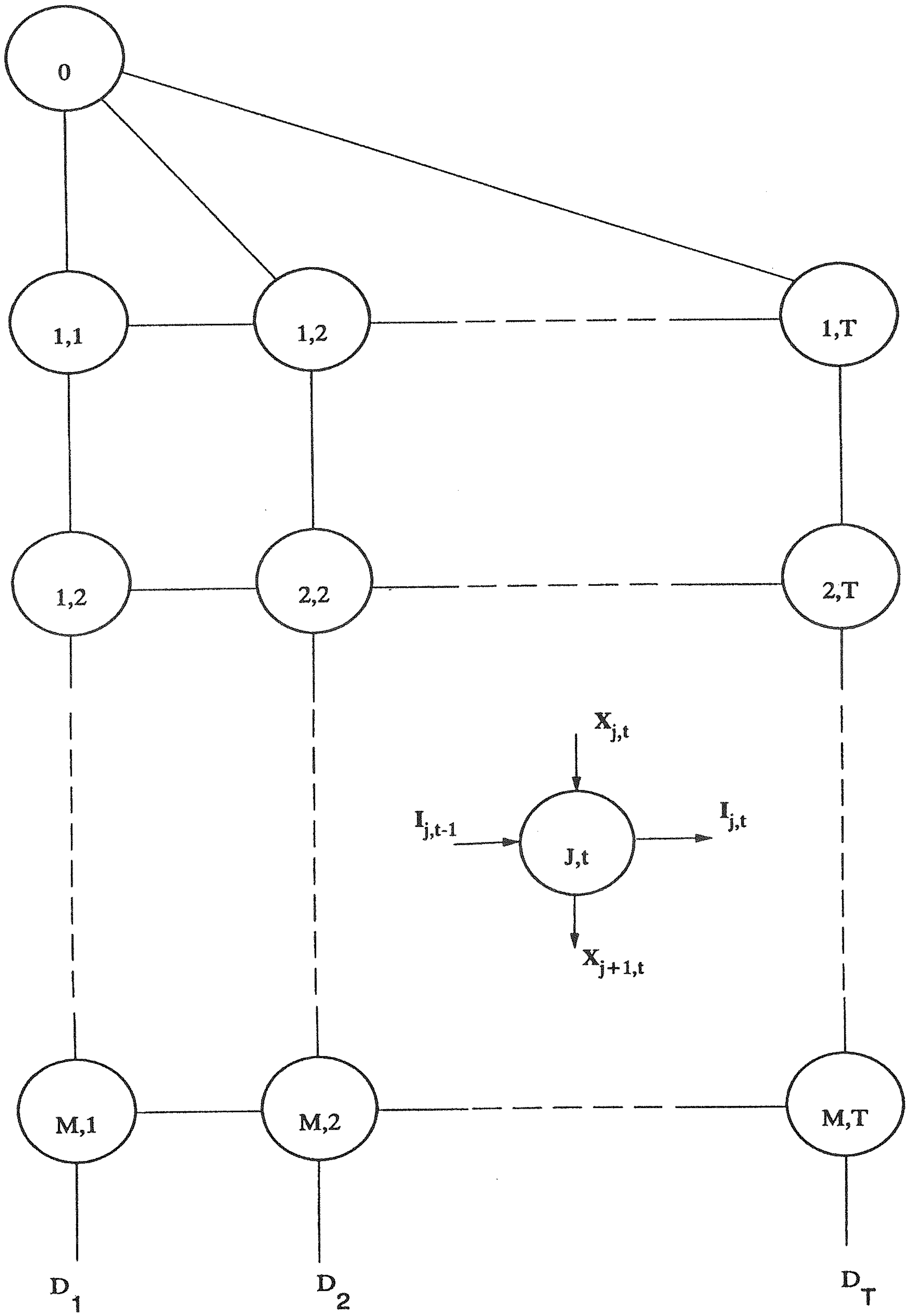
با تعیین $\tilde{f}$ جدید به قدم دوم باز می‌گردیم.

$$\nabla C(\tilde{f}) = (3, 8, 0 / 8, 3, 2 / 0, 0, 0 / 2, 2, 3, 3)$$

$$f^* = (5, 0, 2 / 2, 3, 2 / 2, 3, 2 / 3, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{f} + \theta (f^* - \tilde{f}) = (5, 2 - 2\theta, 2\theta / 4 - 2\theta, 1 + 2\theta, 2 / 2, 3, 2 / 1 + 2\theta, 2 - 2\theta, 2 - 2\theta, 0)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow C(\tilde{f}) = 101$$


0
1,1
1,2
1,T
1,2
2,2
2,T
$X_{j,t}$
$I_{j,t-1}$
J,t
$I_{j,t}$
$X_{j+1,t}$
M,1
M,2
M,T
D_1
D_2
D_T

$\theta = 0.5 \Rightarrow C(\tilde{f}) = 100$

$\theta = 1 \Rightarrow C(\tilde{f}) = 93$

$\tilde{f} = (5, 0, 2 / 2, 3, 2 / 2, 3, 2 / 3, 0, 0, 0)$

$C(\tilde{f}) = 93$

$\nabla C(\tilde{f}) = (3, 0, 12 / 4, 7, 2 / 0, 0, 0 / 2, 2, 3, 3)$

$f^* = (2, 5, 0 / 2, 3, 2 / 2, 3, 2 / 0, 2, 0, 0)$

$\tilde{f} + \theta(f^* - \tilde{f}) = (5 - 3\theta, 5\theta, 2 - 2\theta / 2, 3, 2 / 2, 3, 2 / 3 - 3\theta, 2\theta, \theta, 0)$

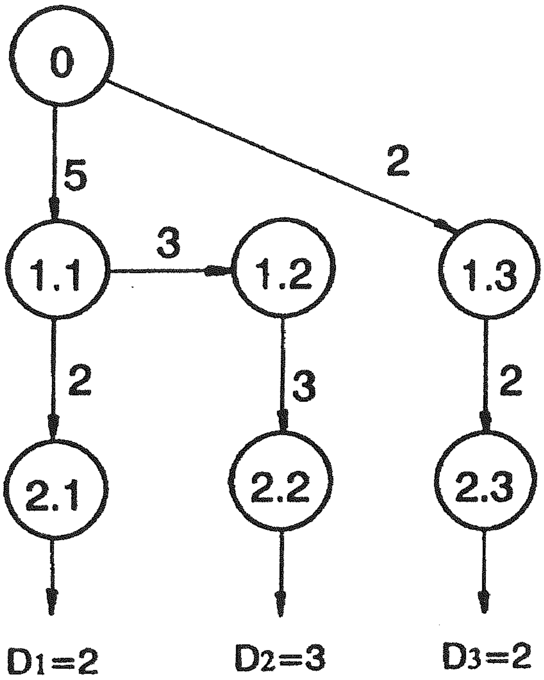
$\theta = 0 \Rightarrow C(\tilde{f}) = 93$

$\theta = 1 \Rightarrow C(\tilde{f}) = 124$

چون $\theta = 0$ است، بنابراین مسئله خاتمه یافته و جواب نهایی به شرح زیر می‌باشد:

$f^* = (5, 0, 2 / 2, 3, 2 / 2, 3, 2 / 3, 0, 0, 0) \qquad C(f^*) = 93$

و نمایش آن به شرح زیر است.



مراجع

[1] Afentakis P., Gavish B., "Optimal Lot-Sizing Algorithms for Complex Product Structures", Opl. Res. Soc. of America, No . 2, March-April 1986.

[2] Afentakis P., Gavish B., Karmarkar U., "Computationally Efficient Optimal Solutions to the Lot-Sizing Problem in Multi-Stage Assembly Systems", Mgmt. Sci., Vol. 30, No. 2, February 1984.

[3] Al-Najdawi M., Kleindorfer P., "Common Cycle Lot-Size Scheduling for Multi Product, Multi-Stage Production", Mgmt. Sci., Vol. 39, No.7, July 1993.

[4] Bahl H., Ritzman L. Gupta J., "Determining Lot Size and Resource Requirements: A Review", Opl. Res. Soc. of America, Vol. 35, No. 3, May-June 1987.

[5] Blackburn J., Millen R., "Simultaneous Lot-Sizing and Capacity Planning in Multi Stage Assembly Processes", Eur. J. Of Opns. Res., 16, 1984.

[6] Clark A. R., Armentano V. A., "Accelerated Solutions to the Multi-Stage Lot -Sizing Problem with Lead Time Through the Use of Strong Valid Inequalities", IEEE, Ch2917, 1990.

[7] Clark A. R., Armentano V. A., "Echelon Stock Formulation for Multi-Stage Lot-Sizing with Component", Int. J. Systems Sci. Vol. 24, No. 9, 1993.

[8] Goyal S.K., Gunasekaran A., "Multi-Stage Production Inventory Systems", Eur. J. of Opns. Res., 46, 1990.

[9] Gunasekaran A., Goyal S. k., Babu A., Ramaswamy N., "Optimization of a Multi - Stage Production - Inventory System with Significant Set-Up Operation Time", Int. J. System Sci., Vol. 22, No. 2, 1991.

[10] Gunasekaran A., Goyal S. K., "Multi - Level Lot - Sizing in a Rayon Yarn Company: A Case Study", Eur. J. of Opns. Res., 65, 1993.

[11] Huan N., Ming lin T., "An Optimal Lot-Sizing Model for Multi-Stage Series/Assembly Systems", Opns. Res., Vol. 15, No. 5, 1988.

[12] Karimi E. A., "Optimal Cycle Times in Multi-Stage Serial Systems with Set-Up and Inventory Costs", Mgmt. Sci., Vol. 38, No. 10, 1992.

[13] Kuik R., Salomono M., Van Wassenhove L., Maes J., "Linear Programming Simulated Annealing and Tabu Search Heuristics for Lot-Sizing in Bottleneck Assembly Systems", IIE Transactions, Vol. 25, No. 1, 1993.

[14] Maes J., Van Wassenhove L., "Multi-Item Single-Level Capacitated Dynamic Lot- Sizing Heuristics: A General Review", J., Opl. Res. Soc., Vol. 30, No. 11, 1988.

[15] Tamura T., "A Procedure for a Multi-Item and Multi-Stage Production Planning Problem", Jsme Int. J, Vol. 32, No.1, 1989.

[16] Toklu B., Wilson J. M., "A Heuristic for Multi - Level Lot-Sizing Problems with a Bottlenceck", Int. J. Pro. R., Vol. 30, No. 4, 1992.

[17] Vickery S., Markland R., "Multi - Stage Lot - Sizing in a Serial Production System", Int. J. Production. Research, Vol. 24, No. 3, 1986.

[18] Voros J., "Setup Cost Stability Region for the Multi-Level Dynamic Lot-Sizing Problem", Eur. J. of Opns. Res., 87, 1995.

[19] Wesley B.J., Jenesen P. A., Network Flow Programming, John Wiley & Sons, 1980.

[20] Wolsey L. A., "Invited Review: Progress with Single -Item Lot-Sizing", Eur. J. of Opns. Res., 86, 1995.

[21] Zahorik A., Thomas J., Trigeiro W., "Network Programming Models for Production Scheduling Multi - Stage, Multi-Item Capacitated Systems", Mgmt. Sci., 1994.

[22] Zangwill W. E., "A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot-Size Production System- A Network Approach", Mgmt.Sci., Vol. 15, No. 9, May 1969.

[23] Zapfel G., Missbauer H., "New Concepts for Production Planning and Control", Eur. J. of Opns. Res., 67, 1993.