

حل دقیق ارتعاشات عرضی تیر با سطح مقطع متغیر تحت بار محوری

عبدالرضا اوحدی همدانی
دانشجوی دکتری

ابراهیم اسماعیل زاده
استاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این پژوهش معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو غیر یکنواخت تحت بار محوری همراه با میرایی خارجی و سازه‌ای ارائه گردیده و سپس برای چند حالت خاص معادلات بازنویسی شده است. برای ارتعاشات آزاد تیر، با صرف نظر نمودن از کلیه میرایی‌ها، یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم کامل با ضرایب متغیر بر حسب زاویه دوران ناشی از خمش حاصل گردیده است. شرایط مرزی تیر به صورت جرم متمرکز در یک انتها و تکیه‌گاه الاستیک در انتهای دیگر می‌باشد. معادله فرکانسی بر حسب چهار حل اساسی مستقل خطی به دست آورده شده و سپس با بسط ضرایب معادله دیفرانسیل به صورت چند جمله‌ای و استفاده از روش فریبوس حل دقیق از معادله ارتعاشاتی ارائه گردیده است. به عنوان نمونه، برای یک تیر غیر یکنواخت یکسردار، اثر جرم متمرکز و بار محوری کششی و فشاری بر فرکانس‌های ارتعاشی تیر مورد بررسی قرار گرفته و همچنین وابستگی دقت نتایج به درجه چند جمله‌ای ضرایب معادله دیفرانسیل آورده شده است.

Exact Solution of Transversal Vibration of a Nonuniform Beam Under Axial Loading

E. Esmailzadeh
Professor

A. R. Ohadi
Ph.D. Candidate

Mech. Eng. Dept., Sharif Univ. of Tech.

Abstract

Transversal vibration of a nonuniform Timoshenko beam under axial loading is studied. Governing equations considering external and structural damping is derived and simplified for some special cases. In one case, a fourth-order differential equation with variable coefficients in terms of angle of rotation due to the bending of the beam is obtained for free vibration of a beam without considering damping. Boundary conditions are taken as a concentrated mass at one end and elastic support at the other end. The frequency equation is obtained using four linearly independent fundamental solution and then the Frobenius method is used to get the exact solution. For a nonuniform clamped beam, effects of concentrated mass, tensile and compressive axial loading on beam vibrational frequencies is studied. It is shown that increasing the concentrated mass and axial loading decrease the frequencies. Also it is observed that the accuracy of the solution depends to the degree of the polynomials used in the coefficients of the governing differential equation.

سازه‌هایی که امروزه طراحی می‌گردند، سبک وزن بوده و دارای مقاومت بالایی هستند. این بینش طراحی، مسائل ارتعاشاتی متعددی نظیر خستگی (Fatigue) ماده، نوفه (Noise) و حتی عدم آسایش انسان را ایجاد کرده است. جدای از این مسأله، هر سیستم مکانیکی پیچیده دارای تعدادی فرکانس رزونانس (Resonance) است و بنابراین امر بسیار مشکلی است که بتوان از همه این فرکانس‌های رزونانس اجتناب نمود. بر این اساس مطالعه رفتار سازه‌ها در فرکانس‌های رزونانس از نقطه نظر تنش‌های دینامیکی و یا دامنه ارتعاشات حائز اهمیت است. تیرها از جمله اجزاء مکانیکی هستند که از دیر زمان به صورت قابل توجهی مورد استفاده بشر قرار گرفته‌اند. بر این اساس تئوری ارتعاشات تیرها اهمیت بسیار زیادی در کاربردهای مهندسی نظیر طراحی ماشین‌ها و سازه‌ها دارد. اکثر مطالعات تیرها بر اساس تئوری کلاسیک می‌باشد که در آن اثر اینرسی دورانی (Rotatory Inertia) و تغییر فرم برشی (Shear Deformation) در نظر گرفته نشده است. بر این اساس تئوری مذکور نمی‌تواند تشریح کافی و دقیقی از مشخصات و رفتار ارتعاشات مودهای بالا داشته باشد. امروزه به منظور بهینه‌سازی توزیع وزن و مقاومت و همچنین در پاره‌ای از موارد ارضاء وظایف ویژه، تیرهای غیریکنواخت (Nonuniform) به صورت گسترده‌ای در بسیاری از کاربردهای سازه‌ای به کار گرفته می‌شوند. بنابراین تحلیل تیرهای غیریکنواخت مورد توجه مهندسان مکانیک، هوافضا و ساختمان است. در استانداردهای مهندسی تحلیل تیرهای یکنواخت و یا با خواص متغیر بر اساس تئوری اویلر - برنولی (Euler-Bernolli) انجام می‌پذیرد. ولی برای تحلیل‌های دقیق‌تر نظیر بررسی حرکت ارتعاشاتی بازوی ربات‌ها، لازم است که با در نظر گرفتن تغییر فرم برشی و اینرسی دورانی تئوری مرتبه بالای تیر غیر یکنواخت تیموشنکو (Timoshenko Beam) استفاده گردد.

اثر نیروی صفحه‌ای یا محوری بر فرکانس‌های ارتعاشات آزاد سازه‌های الاستیک نظیر تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها مورد توجه افراد مختلف بوده است. بار محوری کششی می‌خواهد فرکانس طبیعی را افزایش دهد، حال آنکه بار محوری فشاری در جهت کاهش آن عمل می‌کند. از آنجایی که کمانش (Buckling) زمانی اتفاق می‌افتد که پایین‌ترین فرکانس به صفر میل کند، لذا

این امکان وجود دارد که بتوان با محاسبه فرکانس‌ها در چند سطح مختلف بار، مقدار نیروی کمانش را تخمین زد. با توجه به اهمیت تیرها در صنعت، از چندین دهه گذشته تاکنون افراد متعددی مقالات مختلفی در زمینه تحلیل‌های استاتیکی، ارتعاشات آزاد (Free Vibration) و ارتعاشات اجباری (Forced Vibration) تیرها با شرایط هندسی، مرزی، و بارگذاری متنوع ارائه داده‌اند. بر این اساس تاکنون روش‌های مختلف تحلیلی و عددی برای حصول حل‌های دقیق و تقریبی معرفی گردیده است که در زیر، به اختصار، به چند مورد در زمینه تیرهای غیر یکنواخت و پله‌ای (Step Beam) اشاره می‌گردد. افراد زیادی بر پایه تئوری تیر اویلر - برنولی و با بکارگیری روش‌های مختلف به تحلیل تیرهای غیریکنواخت پرداخته‌اند. "Lee & Kuo" [۱، ۲] مروری اجمالی بر کارهای انجام شده در این زمینه داشته‌اند. آنها تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیر اویلر - برنولی غیر یکنواخت با نگهدارنده‌های الاستیک را انجام داده‌اند. حل دقیق مسأله که معادله حاکم بر آن از نوع معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه چهار خود همراه (Self Adjoint) با ضرایب متغیر چند جمله‌ای می‌باشد، به فرم تابع گرین (Green's Function) به دست آمده و به اختصار برحسب چهار حل اساسی نرمال شده (Normalized Fundamental Solution) سیستم بیان گردیده است. همچنین "Karabalis & Beskos" [۳] ماتریس سختی دقیقی را برای تحلیل تیرهای اویلر - برنولی غیریکنواخت ارائه نمودند. برای تیرهای تیموشنکو معادلات مشخصه حاکم دو معادله دیفرانسیل کوپل هستند که بر حسب دو متغیر وابسته جابجایی خمشی و زاویه دوران ناشی از خمش بیان می‌گردند. اگر تیر یکنواخت باشد، آنگاه دو معادله دیفرانسیل کوپل را می‌توان به دو معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه چهار کامل تبدیل نمود [۴، ۵]. در سال ۱۹۹۲ "Lee & Lin" در مقاله‌ای [۶] حل دقیق ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو غیریکنواخت با جرم متمرکز در یک انتها و تکیه‌گاه الاستیک در انتهای دیگر را ارائه نمودند. در این مقاله دو معادله دیفرانسیل کوپل حاکم به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه چهار با ضرایب متغیر برحسب زاویه دوران ناشی از خمش تبدیل گردیده است. آنها معادله فرکانسی را برحسب چهار حل اساسی نرمال شده معادله دیفرانسیل مشخصه به دست آورده و نشان دادند

رسم گردیده است. سپس مقدار ماکزیمم (در محدوده فرکانسی نیرو) و فرکانس نیروی متناظر به عنوان تابعی از بار محوری مورد مطالعه قرار گرفته است. منابع [۲۱، ۲۰، ۱۹] نیز به بررسی فرکانسی تیرهای یکنواخت تحت بار محوری پرداخته اند.

در این پژوهش پس از مرور اجمالی بر مقالات ارائه شده سال های اخیر در زمینه ارتعاشات تیرهای غیریکنواخت و پله ای، معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو غیریکنواخت تحت بار محوری همراه با میرایی خارجی و سازه ای ارائه گردیده است. سپس برای ارتعاشات آزاد یک تیر بدون میرایی با جرم متمرکز در یک انتها و تکیه گاه الاستیک در انتهای دیگر، معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم کامل با ضرایب متغیر و بر حسب زاویه دوران ناشی از خمش آورده شده است. حل دقیق با استفاده از معادله فرکانسی (بر حسب چهار حل اساسی مستقل خطی)، بسط ضرایب معادله دیفرانسیل به صورت چند جمله ای و بکارگیری روش فریبوس ارائه گردیده است. در انتها یک مثال مورد توجه قرار گرفته و اثر بار محوری، جرم متمرکز و درجه چند جمله ای ضرایب بررسی شده است.

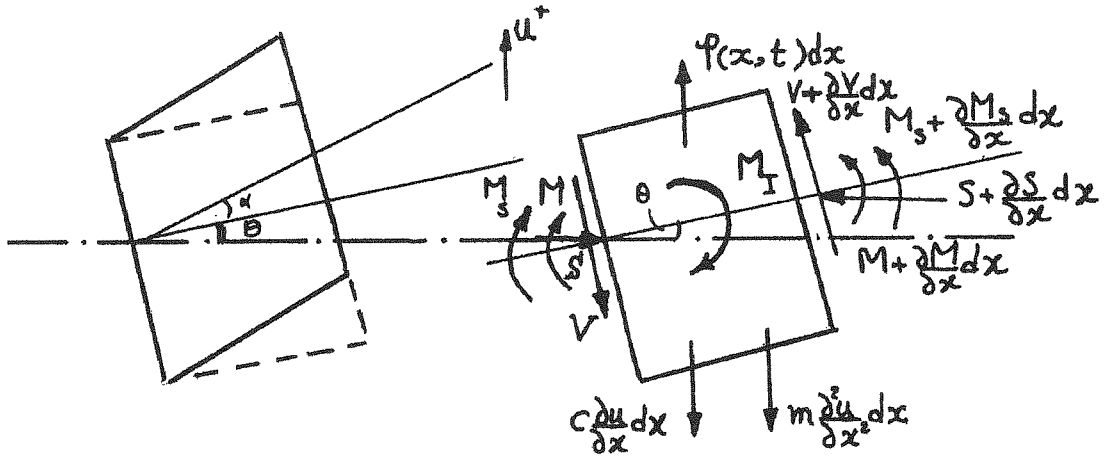
۲- معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو

معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو با استفاده از روش نیوتن به دست آورده شده است. در حصول این معادلات فرض گردیده که سطح مقطع تیر و مشخصات مکانیکی ماده متغیر بوده و بار محوری نیز بر تیر اثر می نماید. همچنین علاوه بر اینرسی دورانی و تغییر فرم برشی، میرایی خارجی و میرایی سازه ای (Structural Damping) نیز در نظر گرفته شده است. در شکل (۱) المانی از تیر نمایش داده شده است که در آن نیروی برشی (V)، گشتاور خمشی (M)، نیروی محوری (S)، ضریب میرایی خارجی (c)، گشتاور ناشی از میرایی سازه ای (M_s)، جرم واحد طول تیر (m)، نیروی خارجی (p)، اینرسی دورانی (M_r)، و در نهایت جابجایی عرضی تیر (u) می باشد. با فرض اینکه زاویه دوران θ کوچک می باشد و پس از نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت قائم و معادله تعادل گشتاور نتیجه می گردد:

$$\frac{\partial}{\partial x} [K' GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \theta \right)] - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial u}{\partial t} + p(x, t) = 0 \quad (1)$$

که اگر ضرایب معادله دیفرانسیل به فرم چند جمله ای باشد، آنگاه با استفاده از روش "Frebenius" می توان حل های اساسی دقیق را به دست آورد. بدین ترتیب با جایگزینی این حل های اساسی در معادله فرکانسی مربوطه، فرکانس های طبیعی تیر حاصل می شود. "Craver & Jampala" [۷] ارتعاشات عرضی تیر یکسر گیردار باریک شونده خطی که دارای فنر نگهدارنده است، را بررسی نمودند. آنها ارتعاشات آزاد تیر را بر پایه تئوری اویلر - برنولی بررسی نمودند و با استفاده از تکنیک متغیرهای از هم جدا، معادلات دیفرانسیل پاره ای را به معادلات معمولی تبدیل نموده و در نهایت جواب های عمومی را بر حسب توابع بسل نوع اول و دوم مرتبه دوم به دست آوردند. با ارضاء شرایط مرزی و صفر قرار دادن دترمینان ضرایب فرکانس های طبیعی حاصل گردید. "Naguleswan" در مقاله خود [۸] حل مستقیم (Direct Solution) برای ارتعاشات عرضی تیرهای مخروطی و گوه ای کامل و نیمه کامل ارائه نموده است. افراد مختلفی نظیر "Maurizi & Belles" [۹] و "Rosa" [۱۰] ارتعاشات تیرهای پله ای را مورد بررسی قرار داده اند. "Tong & Tabarrok" در مقاله ای [۱۱] حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد و اجباری تیر تیموشنکو پله ای ارائه نمودند و از آن برای تحلیل تقریبی تیر تیموشنکو غیریکنواخت استفاده کردند. در واقع تیر تیموشنکو غیریکنواخت غیر هموزن را به تعدادی تیرهای پله ای با سطح مقطع ثابت تبدیل نمودند و ادعا می کنند که اگر تعداد تیرهای پله ای افزایش داده شود نتایج به سرعت به سمت جواب دقیق تیر اصلی همگرا می گردد. حل های عددی و خصوصاً روش المان محدود به دلیل قابلیت هایی که دارا می باشند، برای بررسی مسائل ارتعاشاتی تیرهای غیریکنواخت مورد توجه بسیار قرار گرفته اند که می توان به چند مقاله سال های اخیر نظیر [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷] اشاره نمود.

اثر بار محوری بر ارتعاشات اجباری تیرها توسط "Virgin & Plaut" بررسی گردیده است [۱۸]. نویسندگان مقاله تیر الاستیک یکنواخت با چهار مجموعه شرط مرزی را مطالعه و پاسخ ماندگار را به صورت تحلیلی به دست آورده اند. نیروی عرضی به صورت متناوب نسبت به زمان و به فرم غیریکنواخت در طول تیر تغییر می کند. میرایی های ویسکوز و ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است. دامنه حرکت عرضی تیر در وسط محاسبه و تغییرات آن به عنوان تابعی از فرکانس تحریک



شکل (۱) المان تیر تیموشنکو همراه با نیروها و گشتاورهای وارده

- تیر ریلی (Raleigh Beam) غیریکنواخت بدون بار محوری و میرایی:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 u}{dx^2}) + \frac{d}{dx} [mr^2 \omega^2 \frac{du}{dx}] - m\omega^2 u = 0 \quad (۶)$$

و بر حسب θ :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{m\omega^2} \left[\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d\theta}{dx}) + \frac{d}{dx} (mr^2 \omega^2 \theta) \right] \right\} - \theta = 0 \quad (۷)$$

- تیر تیموشنکو غیریکنواخت بدون بار محوری و میرایی:

$$KGA \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{m\omega^2} \left[\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d\theta}{dx}) + \frac{d}{dx} (mr^2 \omega^2 \theta) \right] \right\} + \frac{d}{dx} (EI \frac{d\theta}{dx}) + (-KGA + mr^2 \omega^2) \theta = 0 \quad (۸)$$

- تیر تیموشنکو غیریکنواخت تحت بار محوری و بدون میرایی:

$$(H+S) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{m\omega^2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{H}{H+S} \frac{d}{dx} (EI \frac{d\theta}{dx}) + \frac{H}{H+S} (mr^2 \omega^2 + S) \theta \right) \right] \right\} + \frac{d}{dx} (EI \frac{d\theta}{dx}) + (mr^2 \omega^2 - H) \theta = 0 \quad (۹)$$

که در رابطه فوق $H = K'GA$ می باشد. روابط (۲، ۳، ۵، ۷، ۸) مشابه روابط ارائه شده در مراجع [۶، ۲۲، ۱۸] می باشند. از آنجایی که استفاده از معادلات بدون بعد مناسب تر می باشد، معادله (۹) که در

$$KGA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \theta \right) + \frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} [c_s I \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t}] - mr^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + S(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (۲)$$

در معادلات فوق c_s, r, I, G, E به ترتیب مدول الاستیسیته، مدول برشی، ممان اینرسی، شعاع ژیراسیون و ضریب میرایی سازه ای می باشد. معادلات (۱) و (۲) معادلاتی فراگیر و عمومی بوده و حل این معادلات به صورت تحلیلی و یا نیمه تحلیلی بسیار مشکل و یا غیر ممکن است. براین اساس، در زیر برای چند حالت خاص با قبول فرضیه های ساده کننده معادله ارتعاشاتی حاکم بازنویسی می گردد:

- تیر اوپلر - برنولی یکنواخت تحت نیروی محوری ثابت:

$$c_s I \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (۳)$$

- تیر اوپلر - برنولی غیریکنواخت بدون بار محوری و میرایی:

در حالت ارتعاشات آزاد، برای ارتعاشات هارمونیک زمانی با فرکانس زاویه ای ω می توان نوشت:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 u}{dx^2}) - m\omega^2 u = 0, \quad \ddot{u} = -\omega^2 u \quad (۴)$$

و یا

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m\omega^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d\theta}{dx}) \right] - \theta = 0 \quad (۵)$$

در $x = L$:

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} = I\ddot{\theta} \quad V = K'GA \left(\frac{du}{dx} - \theta \right) = M\ddot{u} \quad (14)$$

و یا پس از بدون بعدسازی:
در $\zeta = 1$

$$\alpha \Omega^2 \theta = r \frac{d\theta}{d\zeta} \quad (15)$$

$$\frac{\gamma}{S} \left[\frac{d}{d\zeta} \left[\frac{q}{p+q} \frac{d}{d\zeta} \left(r \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + \frac{q}{p+q} (\eta v \Omega^2 + \frac{p}{\delta}) \theta \right] \right] = - \left[\frac{d}{d\zeta} \left(r \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + [\eta v \Omega^2 + \epsilon] \theta \right] \quad (16)$$

در صورتی که نیروی محوری کنار گذاشته شود،
آنگاه $S = p = 0$ بوده و لذا شرایط مرزی ارائه شده در
مرجع [۶] حاصل می شود.

۴- حل دقیق - روش فرنیوس

اگر چهار حل اساسی مستقیم خطی
 $(V_j(\zeta); j = 1, 2, 3, 4)$ مربوط به معادله دیفرانسیل حاکم
به گونه ای اختیار گردند که شرایط تعامد را در مبدأ
سیستم مختصات ارضاء کنند، یعنی:

$$\begin{bmatrix} V_1(0) & V_2(0) & V_3(0) & V_4(0) \\ V_1'(0) & V_2'(0) & V_3'(0) & V_4'(0) \\ V_1''(0) & V_2''(0) & V_3''(0) & V_4''(0) \\ V_1'''(0) & V_2'''(0) & V_3'''(0) & V_4'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

آنگاه پس از جایگزین نمودن حل هموزن (که ترکیب
خطی چهار حل اساسی است) در شرایط مرزی می توان
معادله فرکانسی را به دست آورد. برای معادله
ارتعاشاتی (۱۰) با شرایط مرزی روابط (۱۲)، (۱۳)، (۱۴)،
(۱۶) نتیجه می گردد:

$$II = -(g_1 F_3 H_1 + g_4 F_4 H_3 + g_2 F_1 H_4 - g_4 F_3 H_4 - g_2 F_4 H_1 - g_1 F_1 H_3)$$

$$+ g_5 (g_1 F_3 H_2 + g_3 F_4 H_3 + g_2 F_2 H_4 - g_3 F_3 H_4 - g_1 F_2 H_3 - g_2 F_4 H_2) = 0$$

$$g_1 = A\beta_T; g_2 = C\beta_T + A\beta_T 2r'(0) + \Omega^2; A = \frac{1}{1+p(0)}; C = \frac{q(0)p(0) - p'(0)}{(1+p(0))^2}$$

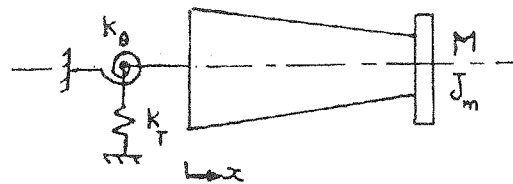
این گزارش مورد بررسی قرار گرفته است به صورت
زیر بدون بعد می گردد:

$$(p+q) \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{i}{s\Omega^2} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{q}{p+q} \frac{d}{d\zeta} \left(r \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + \frac{q}{p+q} (\eta v \Omega^2 + \frac{p}{\delta}) \theta \right] \right] + \delta \frac{d}{d\zeta} \left(r \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + (\delta \eta v \Omega^2 - q) \theta = 0 \quad (10)$$

پارامترهای بدون بعد در ضمیمه معرفی گردیده اند.
در رابطه بالا اگر نیروی محوری کنار گذاشته شود
($p=0$) آنگاه رابطه (۸) مرجع [۶] حاصل می شود.

۳- شرایط مرزی

معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات آزاد تیر (معادله
(۱۰)) از مرتبه چهارم می باشد و براین اساس نیاز به
چهار شرط مرزی است. در اینجا شرایط مرزی برای یک
تیر که از یک انتها توسط فنرهای نگهدارنده مقید بوده و
در انتهای دیگر دارای جرم متمرکز می باشد، آورده شده
است (شکل (۲)). لازم به ذکر است که با انتخاب مقادیر
 K_T و یا K_θ برابر بی نهایت می توان شرایط مرزی
کلاسیک نظیر حالت گیردار را به دست آورد.



شکل (۲) سیستم تیر غیریکنواخت همراه با شرایط مرزی مربوطه

در $x = 0$:

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} = K_\theta \theta, \quad V = K'GA \left(\frac{du}{dx} - \theta \right) = K_T u \quad (11)$$

پس از جایگزین ساختن مقادیر و بی بعدسازی
می توان نوشت:
در $\zeta = 0$

$$\beta_\theta \theta = \frac{d\theta}{d\zeta} \quad (12)$$

$$\frac{\beta_T}{\Omega^2} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{q}{p+q} \frac{d}{d\zeta} \left(r \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + \frac{q}{p+q} (\eta v \Omega^2 + \frac{p}{\delta}) \theta \right] = - \left[\frac{d}{d\zeta} \left(r \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + [\eta v \Omega^2 + \lambda] \theta \right] \quad (13)$$

همراه با

$$\left[\begin{array}{l} K_{1,0} = 1, K_{1,1} = K_{1,2} = K_{1,3} = 0 \\ K_{2,1} = 1, K_{2,0} = K_{2,2} = K_{2,3} = 0 \\ K_{3,2} = 1/2, K_{3,0} = K_{3,1} = K_{3,3} = 0 \\ K_{4,3} = 1/6, K_{4,0} = K_{4,1} = K_{4,2} = 0 \end{array} \right] \quad (22)$$

ارائه نمود. چهار حل اساسی فوق شرایط رابطه (۱۷) را ارضاء می نمایند. با جایگزین نمودن رابطه (۲۱) در رابطه (۱۹) و گردهم آوردن ضرایب توان های یکسان از آن رابطه بازگشتی زیر نتیجه می شود [۶]:

$$K_{i,z+4} = \frac{1}{\eta(z+4)(z+3)(z+2)(z+1)} \left[\sum_{j=0}^z \eta K_{i,z-j} + \sum_{j=0}^z (\eta-j+1) \eta K_{i,z-j+1} + \sum_{j=0}^z (\eta-j+2)(\eta-j+1) \eta K_{i,z-j+2} + \sum_{j=0}^z (\eta-j+3)(\eta-j+2)(\eta-j+1) \eta K_{i,z-j+3} + \sum_{j=0}^z (\eta-j+4)(\eta-j+3)(\eta-j+2)(\eta-j+1) \eta K_{i,z-j+4} \right] \quad (23)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad z = 0, 1, 2, 3, \dots$$

بدین ترتیب می توان چهار حل اساسی نرمال شده دقیق برای معادله (۱۹) به دست آورد. با جایگزین نمودن در معادله فرکانسی متناظر یعنی معادله (۱۸) فرکانس های طبیعی حاصل می شود.

۵- مثال های حل شده

به عنوان مثال یک تیر تیموشنکو غیریکنواخت یکسرگردار دارای جرم متمرکز در انتها مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای بدون بعد تیر به شرح زیر می باشد:

$$q = s = (1 + \lambda \zeta), \quad r = v = (1 + \lambda \zeta)^3, \quad p = \text{constant}$$

$$\lambda = -0.2, \quad \eta = 0.0016, \quad \delta = 0.004992, \quad \mu = 0.6$$

اختیار شده است. برای حل، یک کد کامپیوتری با استفاده از نرم افزار Maple V نوشته شده است که در آن کلیه مراحل حل مسأله انجام می پذیرد.

در جدول (۱) اثر بار محوری و همچنین وابستگی دقت نتایج به درجه چند جمله ای ضرایب نشان داده شده است. در حالتی که نیروی محوری وجود ندارد ($p=0$) نتایج کاملاً مشابه نتایج مرجع [۶] می باشد که نشان دهنده صحت الگوریتم حل و برنامه کامپیوتری است. مشاهده می گردد که برای مودهای سوم و چهارم ارتعاشاتی لازم است که درجه چند جمله ای ضرایب تا حدود ۴۰ نیز افزایش داده شود.

$$g_3 = C \beta_T r'(0) + Ar''(0) \beta_T + A(\eta \Omega^2 + \frac{p(0)}{\delta}) \beta_T + \Omega^2 r'(0)$$

$$g_4 = C(\eta \Omega^2 + \frac{p(0)}{\delta}) \beta_T + A(\eta \Omega^2 v'(0) + \frac{p'(0)}{\delta}) \beta_T + (\eta \Omega^4 + \Lambda \Omega^2) \beta_T, \quad g_5 = -\beta_0$$

$$g_6 = -\frac{\alpha \Omega^2}{r(1)}; \quad g_7 = \gamma Br(1); \quad g_8 = \gamma Dr(1) + \gamma D.2r'(1) + r(1)s(1)$$

$$g_9 = \gamma Df(1) + \gamma Br''(1) + \gamma B(\eta \Omega^2 v(1) + \frac{p(1)}{\delta}) + f(1)s(1), \quad B = \frac{q(1)}{p(1)+q(1)}, \quad D = \frac{q'(1)}{\phi(1)}$$

$$g_{10} = \gamma D(\eta \Omega^2 v(1) + \frac{p(1)}{\delta}) + \gamma B(\eta \Omega^2 v'(1) + \frac{p'(1)}{\delta}) + [\eta \Omega^2 v(1) + \epsilon]s(1)$$

$$F_j = v_j'(1) + g_6 v_j(1) \quad H_j = g_7 v_j''(1) + g_8 v_j'(1) + g_9 v_j(1) + g_{10} v_j(1), \quad j=1, 2, 3, 4$$

$$(18)$$

که پارامترهای فوق در ضمیمه معرفی گردیده اند. بدین ترتیب معادله فرکانسی بر حسب چهار حل اساسی معادله دیفرانسیل بیان گردیده است. در حالت کلی حل به فرم بسته برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار با ضرایب متغیر وجود ندارد. ولی اگر ضرایب معادله که شامل پارامترهای هندسی و خصوصیات مواد می باشد، به فرم چند جمله ای نوشته شود، آنگاه می توان نمایشی را به فرم سری توانی با استفاده از روش فروبینیوس ارائه نمود.

معادله دیفرانسیل حرکت تیر تیموشنکو مورد نظر را می توان به فرم:

$$P_4(\zeta) \frac{d^4 V(\zeta)}{d\zeta^4} + P_3(\zeta) \frac{d^3 V(\zeta)}{d\zeta^3} + P_2(\zeta) \frac{d^2 V(\zeta)}{d\zeta^2} + P_1(\zeta) \frac{dV(\zeta)}{d\zeta} + P_0(\zeta) V(\zeta) = 0 \quad \zeta \in (0, 1) \quad (19)$$

نوشت. V می تواند زاویه دوران و یا جابجایی خمشی بی بعد شده باشد. اگر ضرایب معادله دیفرانسیل فوق به صورت چند جمله ای های:

$$P_4 = \sum_{j=0}^{n_4} a_j \zeta^j, \quad P_3 = \sum_{j=0}^{n_3} b_j \zeta^j, \quad P_2 = \sum_{j=0}^{n_2} c_j \zeta^j \\ P_1 = \sum_{j=0}^{n_1} d_j \zeta^j, \quad P_0 = \sum_{j=0}^{n_0} e_j \zeta^j \quad (20)$$

نوشته شود، آنگاه می توان چهار حل اساسی معادله (۱۹) را به صورت:

$$V_i = \sum_{j=0}^{\infty} K_{i,j} \zeta^j, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (21)$$

جدول (۱) وابستگی دقت نتایج به درجه چند جمله‌ای ضرایب

بار محوری	درجه چند جمله‌ای ضرایب	۱	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰
p = 0	فرکانس اول Ω_1	۱/۸۵	۱/۸۵	۱/۸۵	۱/۸۵	۱/۸۵	۱/۸۵
	فرکانس دوم Ω_2	۱۴/۴۴	۱۴/۴۴	۱۴/۴۴	۱۴/۴۴	۱۴/۴۴	۱۴/۴۴
	فرکانس سوم Ω_3	۲۴/۰۸	۲۹/۸۷	۴۰/۰۷	۴۰/۰۷	۴۰/۰۷	۴۰/۰۷
	فرکانس چهارم Ω_4	۶۳/۵۷	۶۲/۰۷	۷۱/۸۳	۷۴/۲۲	۷۴/۲۴	۷۴/۲۴
p = 0.005	فرکانس اول Ω_1	۱/۳۲	۱/۳۲	۱/۳۲	۱/۳۲	۱/۳۲	۱/۳۲
	فرکانس دوم Ω_2	۱۳/۸۶	۱۳/۸۶	۱۳/۸۶	۱۳/۸۶	۱۳/۸۶	۱۳/۸۶
	فرکانس سوم Ω_3	۳۲/۲۸	۲۹/۲۵	۲۹/۴۶	۲۹/۴۶	۲۹/۴۶	۲۹/۴۶
	فرکانس چهارم Ω_4	۶۴/۰۸	۶۲/۰	۷۱/۲۸	۷۳/۵۵	۷۳/۵۸	۷۳/۵۸

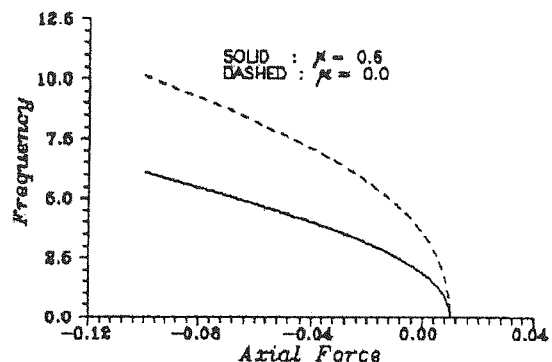
۶- نتیجه‌گیری

معادلات حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو غیریکنواخت تحت بار محوری همراه با میرایی خارجی و سازه‌ای ارائه گردیده است. معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم کامل با ضرایب متغیر برحسب زاویه دوران ناشی از خمش برای ارتعاشات آزاد تیز بدون میرایی با جرم متمرکز در یک انتها و تکیه گاه الاستیک در انتهای دیگر به دست آورده شده است. پس از بیان معادله فرکانسی برحسب چهار حل اساسی مستقل خطی و بسط ضرایب معادله به صورت چند جمله‌ای، روش فربنیوس برای حل دقیق معادلات ارتعاشاتی تیر استفاده گردیده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که به منظور رسیدن به جواب‌های دقیق برای فرکانس‌های بالا (فرکانس‌های سوم و چهارم) درجه چند جمله‌ای ضرایب باید ۳۵ و بالاتر باشد. افزایش جرم متمرکز و افزایش قدر مطلق نیروی محوری باعث کاهش فرکانس‌ها می‌شود. نیروی بحرانی کماتش متناظر با فرکانس صفر بوده و در صورتی که نیروی محوری در محل اتصال جرم متمرکز به انتهای تیر اثر نماید، اندازه بار بحرانی کماتش مستقل از مقدار جرم متمرکز می‌باشد.

فهرست پارامترها

- A(x) مساحت سطح مقطع تیر
- E(x) مدول الاستیسیته
- G(x) مدول برشی
- I(x) اینرسی گشتاور سطح تیر

در شکل (۳) اثر بار محوری و جرم متمرکز نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش مقدار جرم متمرکز در انتهای تیر باعث کاهش فرکانس‌ها گردیده است که از نظر فیزیکی کاملاً منطقی می‌باشد. زیرا که افزایش سختی را به همراه ندارد. همچنین در شکل مذکور مشاهده می‌شود که افزایش نیروی محوری کششی (p با علامت منفی) باعث افزایش فرکانس و افزایش نیروی محوری فشاری (p با علامت مثبت) باعث کاهش فرکانس گردیده است. همچنین به ازای بار فشاری $p=0.1010$ فرکانس تیر به حدود صفر می‌رسد که در واقع همان بار بحرانی کماتش تیر است که باعث ناپایداری آن می‌گردد. شکل (۳) نشان می‌دهد که مقدار این نیرو مستقل از جرم متمرکز بوده که از نقطه نظر فیزیکی قابل پیش بینی می‌باشد و صحت محاسبات را تأیید می‌نماید.



شکل (۳) اثر نیروی محوری و جرم متمرکز بر فرکانس ارتعاشاتی تیر

u : جابجایی عرضی تیر
 α : اینرسی دورانی بدون بعد جرم متمرکز $[J_m/(m(0)L^3]$
 β_T, β_0 : ضرایب بدون بعد فنر پیچشی و انتقالی
 $[K_0L/R(0)], [K_T L^3 (1 + p(0))/R(0)]$
 γ : جرم متمرکز بدون بعد $[M/m(0)L]$
 δ : نسبت بدون بعد صلبیت خمشی به صلبیت برشی در
 $[R(0)/(Q(0)L^2)] x = 0$
 η : نسبت بدون بعد گشتاور اینرسی جرم به جرم در
 $[J(0)/m(0)L^2] x = 0$
 λ : نسبت باریک شونده تیر
 $[p(0)/\delta] \Delta$
 μ : نسبت بدون بعد جرم متمرکز به جرم کل تیر $[M/M_b]$
 $[p(1)/\delta] \in$
 ζ : فاصله بدون بعد از یک انتهای تیر
 ω : فرکانس ارتعاشی
 Ω^2 : فرکانس بدون بعد $[m(0)\omega^2 L^4/R(0)]$

$J(x)$: اینرسی گشتاور جرم واحد طول تیر
 J_m : اینرسی دورانی جرم انتهایی
 K_T, K_0 : ضرایب فنر پیچشی و انتقالی تیر
 K' : ضریب تصحیح برش
 L : طول تیر
 M : جرم متمرکز در انتهای تیر
 M_b : جرم کل تیر
 $m(x)$: جرم واحد طول تیر
 $Q(x)$: صلبیت برشی تیر $[k' G(x) A(x)]$
 $q(\zeta)$: صلبیت برشی بدون بعد $[Q(\zeta)/Q(0)]$
 $R(x)$: صلبیت خمشی تیر $[E(x) / I(x)]$
 $r(\zeta)$: صلبیت خمشی بدون بعد $[R(\zeta) / R(0)]$
 $S(x)$: نیروی محوری
 $p(\zeta)$: نیروی محوری بدون بعد $[S(\zeta) / Q(0)]$
 $s(\zeta)$: جرم بدون بعد $[m(\zeta)/m(0)]$
 $v(\zeta)$: اینرسی گشتاور جرم بدون بعد $[J(\zeta) / J(0)]$
 x : متغیر طولی تیر

مراجع

- [1] Lee, S.Y. and Kuo, Y. H., "Exact Solutions for the Analysis of General Elastically Restrained Non-Uniform Beams" ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 59, No. 2, pp. 205-212, 1992.
- [2] Lee, S.Y. and Ke, H.Y. and Kuo, Y. H.; "Analysis of Non-Uniform Beam Vibration" Journal of Sound and Vibration", Vol. 142, No.1, pp. 15-29, 1990.
- [3] Karabalis, D. L. and Beskos, D.E., "Static, Dynamic and Stability Analysis of Structures Composed of Tapered Beams", Journal of Computers and Structures, Vol. 16, No. 6, pp. 731-748, 1983.
- [4] Bruch, J. C; Mitchell, T. P., "Vibrations of Mass-Loaded Clamped Free Timoshenko Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 114, No. 2, pp. 341-345, 1987.
- [5] Huang, T. C., "The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, No. 4, pp. 579-584, 1961.
- [6] Lee, S. Y. and Lin, S. M., "Exact Vibration Solutions for Nonuniform Timoshenko Beams with Attachments", AIAA Journal, Vol. 30, No. 12, pp. 2930-2934, 1992.
- [7] Craver, W. L. and Jampala, p., "Transverse Vibrations of Linearly Tapered Cantilever Beam with Constraining Springs", Journal of Sound and Vibration, Vol. 166 (3), pp. 521-529, 1993.
- [8] Naguleswaran, S., "A Direct Solution for the Transverse Vibration of Euler-Bernoulli, Wedge and Cone Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 172 (3), pp. 289 - 304, 1994.
- [9] Maurizi, M. J. and Belles, P. M., "Natural Frequencies of One Span Beams with Stepwise Variable Cross-Section, Journal of Sound and Vibration, Vol. 168 (1), pp. 184-488, 1993.

- [10] Rosa, M.A., "Free Vibrations of Stepped Beams with Elastic Ends", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, pp. 563-567, 1994.
- [11] Tong, X.; Tabarrok, B. and Yeh, K. Y., "Dynamics Analysis of Nonuniform Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, 1995.
- [12] Chehil, d.S. and Jategaonkar, R., "Determination of Natural Frequencies of a Beam with Varying Section Properties", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 115, No. 3, pp. 423-436, 1987.
- [13] Jategaonkar, R. and Chehil, D.S., "Natural Frequencies of a Beam with Varying Section Properties", *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 133 (2), pp. 303 - 322, 1989.
- [14] Gutierrez, R. H. ; Laura, P.A.A. and Rossi, R.E., "Fundamental Frequency of Vibration of a Timoshenko Beam of Non-Uniform Thickness", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145 (2), pp. 341-344, 1991.
- [15] Cleghorn, W. L. and Tabarrok, B., "Finite Element Formulation of a Tapered Timoshenko Beam for Free Lateral Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152 (3), pp. 461-470, 1992.
- [16] To, C.W.S., "A Linearly Tapered Beam Finite Element Incorporating Shear Deformation and Rotary Inertia for Vibration Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 78 (4). pp. 475-584, 1981.
- [17] Roy, P. K. and Ganesan, N., "Studies of the Dynamic Behaviour of a Cantilever Beam with Varying Thickness", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 177 (1). pp. 1-13, 1994.
- [18] Virgin, L.N. and Plaut, R. H., "Effect of Axial Load on Forced Vibrations of Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 163 (3), pp. 395-405, 1993.
- [19] Farghaly, S.H., "Comments on the General Equation of Frequencies for Vibration Uniform One-span Beams Under Compressive Axial Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 161 (1), pp. 181-183, 1993.
- [20] Lee. H. P., "Dynamic Response of a Rotating Timoshenko Shaft Subject to Axial Forces and Moving Loads.", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 188 (1), pp. 169-177, 1995.
- [21] Maurizi, M. J. and Belles, P. M., "General equation of frequencies for Vibrating Uniform One-Span Beams Under Compressive Axial Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, pp. 345, 1991.
- [22] J. L. Humur, "Dynamics of Structures", Prentice-Hall, 1990.