

روش تطبیقی مدل دو بعدی حلقه برای پارچه های حلقوی پودی

علی اصغر اصغریان جدی

سعید حمزه

دانشیار دانشکده مهندسی نساجی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی نساجی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مسعود لطیفی

استادیار دانشکده مهندسی نساجی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این تحقیق تئوری، معادله ای که منحنی آن تشابه ظاهری با شکل حلقه پارچه های حلقوی پودی دارد، به عنوان یک قالب ریاضی اولیه برای حلقه فرض گردید و سپس، جهت تطبیق با تئوری تغییر شکل میله های الاستیک به عنوان مدل ریاضی دو بعدی برای حلقه پارچه اصلاحات لازم ارائه گردید. با محاسبه طول، ارتفاع ماکزیمم و عرض ماکزیمم این مدل فرضی و تعیین روابط بین طول حلقه و تراکم سطحی پارچه نشان داده شد که مدل مذکور با نتایج تئوری و تجربی محققین قبلی موافقت نزدیکی دارد.

Two Dimensional Comparative Loop Model for Weft Knitted Fabric

Ali A.A. Jeddi

S. Hamzeh

Associate professor
Textile Engineering Department
Amirkabir University of Technology.

Ph.D. Student
Textile Engineering Department
Amirkabir University of Technology.

M. Latifi

Assistant professor
Textile Engineering Department
Amirkabir University of Technology.

Abstract

In the present theoretical research, an equation that is similar to knitted fabric loop shape, has been assumed as a basic mathematical function. A new tow dimensional model for knitted fabric loop was then obtained by adapting the equation according to the buckled elastic rod theory.

The calculated length, maximum height and maximum width and also the relations between the loop length and fabric geometry obtained from this model showed good agreement with the theoretical and experimental suggestions reported by other researchers.

۱- مقدمه

در قرن جاری، تئوری مدل‌های مختلف حلقه به صورت دو بعدی و سه بعدی توسط محققین [۱، ۲، ۳] و [۴] ارائه گردید و در این زمینه نیز تجربیات عملی فراوانی نیز انجام گرفت [۵ و ۶]. بحث اساسی در ارتباط بین طول حلقه و خواص ابعادی پارچه‌های حلقوی پودی توسط ماندن Munden [۷] ارائه گردید. وی بیان داشت «هر گاه حلقه‌ها به استراحت کامل برسند، حداقل انرژی در آنها بوجود می‌آید.» وی همچنین نتیجه گرفت شکل حلقه در حالت استراحت کامل، مستقل از خصوصیات فیزیکی نخ می‌باشد، و روابط ذیل را بین طول حلقه و خواص ابعادی آن ارائه نمود:

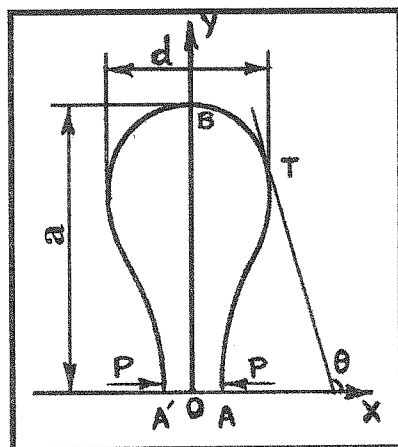
$$\begin{cases} c.p.c = \frac{K_c}{L}, & S.D. = \frac{K_s}{L^2} \\ w.p.c = \frac{K_w}{L}, & K_r = \frac{K_c}{K_w} \end{cases} \quad (1)$$

که در آنها L طول حلقه (طول نخ مصرفی در یک حلقه) K_r, K_s, K_w, K_c پارامترهای ثابت ابعادی پارچه، $c.p.c$ تعداد رج در سانتیمتر $w.p.c$ تعداد ردیف در سانتیمتر و $S.D.$ تعداد حلقه در یک سانتیمتر مربع است. دیل Doyle [۸] براساس یک سری تجربیات عملی نتیجه گرفت که طول حلقه مهمترین عامل در ساختمان و خواص ابعادی پارچه حلقوی پودی می‌باشد، و رابطه (۲) را به دست آورد:

$$S.D. = \frac{19.3}{L^2} \quad (2)$$

لیف Leaf [۹] طی مطالعات خود بر روی میله‌های الاستیک بیان داشت «اگر به دو سر یک میله الاستیک یک جفت نیرو و کوپل معادل وارد کنیم تا به هم نزدیک شود شکلی حاصل می‌گردد که الاستیکا نام دارد» (شکل ۱). در این شکل $AA' = B.L$ می‌باشد که L طول کل حلقه مدل و B ضریب ثابت بوده و متناسب با فاصله AA' است. وی نتیجه گرفت که نسبت ارتفاع ماکزیمم به عرض ماکزیمم این شکل، مستقل از خواص میله است و از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{a}{d} = -2.72B + 2.078 \quad (3)$$



شکل (۱) میله الاستیک در اثر اعمال کوپل و نیرو به دو انتهای آن

که در آن:

a حداکثر ارتفاع حلقه و d حداکثر عرض حلقه است. اگر مقدار B صفر گردد، یعنی دو سر الاستیکا به هم نزدیک شود صرفنظر از مواد و طول میله، نسبت $a/d = 2.08$ می‌شود.

در کلیه تحقیقات قبلی برای ارائه مدل تئوری حلقه، از هندسه حلقه و با فرضیات انجام شده روابط ریاضی به دست آمدند که تعدادی از آنها با تقریب خوبی به یکدیگر و با نتایج آزمایشات انجام شده بر روی پارچه نزدیک بودند و تعدادی از آنها موافقت نزدیکی نداشتند. در تحقیق حاضر ابتدا یک قالب ریاضی معین که با شکل ظاهری حلقه پارچه تشابه نزدیکی دارد انتخاب شده و سپس با اصلاحات لازم در پارامترهای این مدل ریاضی، آن را با حلقه الاستیکا تطبیق [۳ و ۱۰] داده و به عنوان مدل ریاضی حلقه ارائه گردید.

۲- تئوری مدل دو بعدی حلقه

به منظور ارائه مدل ریاضی، ابتدا تعدادی از روابط را جهت محاسبه طول قوس، مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای محاسبه طول قوس خم‌ها بر حسب اینکه معادله خم به چه صورت داده شده باشد، سه حالت زیر را که به وسیله انتگرال معین قابل محاسبه هستند، در نظر می‌گیریم.

(I) بر حسب معادله دکارتی:

$$\begin{cases} \widehat{AB} = \int_a^b (1 + Y'^2)^{0.5} . dx \\ Y = f(X) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad (4)$$

II) بر حسب معادله پارامتری:

$$\begin{cases} \widehat{AB} = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + y^2) \cdot dt \\ x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (5)$$

III) بر حسب معادله قطبی:

$$\begin{cases} \widehat{AB} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r^2 + r'^2)^{0.5} \cdot d\theta \\ r = f(\theta) \end{cases} \quad (6)$$

بعضی از انتگرال‌های معین با انتگرال‌گیری به روش‌های مرسوم حل نمی‌گردند و جهت حل آنها از قواعد آنالیز عددی استفاده می‌شود. در میان آنها دقت روش سیمپسون در کاربردهای مهندسی بیشتر قابل قبول است که فرمول آن به صورت ذیل می‌باشد:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \frac{1}{3} \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \quad (7)$$

در این رابطه تعداد تقسیمات در فاصله a تا b الزاماً زوج ($2n$) باید در نظر گرفته شوند.

۲-۱- مدل انتخابی برای حلقه

منحنی Strophoid با معادله $y^2 = a - x/a + x \cdot x^2$ (شکل ۲) که قسمت سمت راست آن در فاصله $0 \leq x \leq a$ بخش اصلی مدل یک حلقه بافت یعنی حلقه سوزن (needle loop) به علاوه دو ساق حلقه را نمایش می‌دهد، به عنوان قالب اولیه مدل حلقه انتخاب گردید. در ضمن با فرض آن که حلقه سینکر (sinker loop) دایروی شکل و به قطر عرض ماکزیمم حلقه سوزن می‌باشد به عنوان بخش دیگری از مدل حلقه در نظر گرفته شد.

بنابر این شکل هندسی مدل کل حلقه مطابق شکل (۳) خواهد بود. برای آن که بخش اصلی مدل انتخابی با مشخصات یک حلقه پارچه تطبیق یابد و مدل نهایی حلقه مشخص گردد، فرضیات ذیل در نظر گرفته شدند:

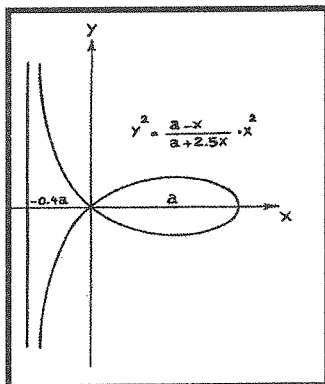
الف) تئوری لیف Leaf را در مورد تغییر شکل میله‌های الاستیک، در مورد این مدل فرضی صادق در نظر می‌گیریم.

ب) دو سر حلقه به هم کاملاً نزدیک هستند (یعنی $B=0$).
ج) از قطر نخ صرف‌نظر می‌شود.

د) فاصله حلقه‌ها از یکدیگر در جهت ردیف صفر است (یعنی حلقه‌ها در جهت عرض کاملاً به هم مماسند).

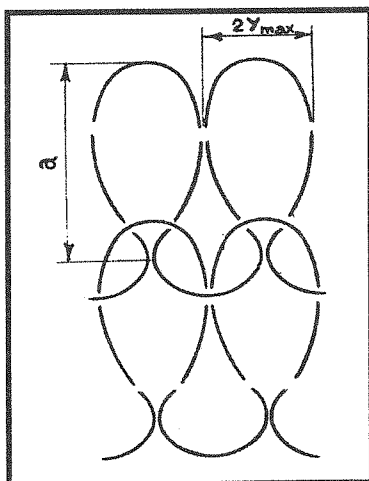
با فرضیات فوق لازم است مدل انتخابی با مدل الاستیکا برای حلقه تطبیق یابد. در مدل الاستیکای Leaf نسبت ارتفاع ماکزیمم به عرض ماکزیمم وقتی دو سر حلقه به هم می‌رسند ($B=0$) برابر $2/0.8$ می‌باشد، در حالی که در مدل اولیه انتخابی این نسبت $1/0.66$ است. بنابر این به روش سعی و خطا فرم تابع انتخابی به صورت رابطه (۸) اصلاح می‌گردد. بدین ترتیب این رابطه اصلاح شده از منحنی Strophoid به عنوان (بخش اصلی) مدل حلقه خواهد بود.

$$y^2 = \frac{a-x}{a+2.5x} \cdot x^2 \quad (8)$$



شکل (۲) منحنی حاصل از تابع در نظر گرفته شده به صورت مدل فرضی

برای قسمت حلقه سوزن و ساق‌های حلقه



شکل (۳) وضعیت دو حلقه فرضی متوالی و مجاور

۲-۲- محاسبه طول کل حلقه مدل

ابتدا منحنی نمایش تابع (۸) را در حدود تغییرات $-0.4a \leq x \leq a$ رسم نموده (شکل ۲) و نقاط اکسترم منحنی را به دست می‌آوریم، پس:

$$y_{\max} = 0.24015 a$$

در نتیجه عرض ماکزیمم حلقه برابر است با:

$$d = 2y_{\max} = 0.4803 a \quad (۹)$$

همچنین مجانب قائم منحنی، خط $x = -0.4a$ می‌شود.

الف) محاسبه طول بخش اصلی حلقه l_1 (حلقه سوزن و ساق‌ها):

با استفاده از معادله پارامتری تابع (۸) مقدار طول حلقه با تغییر متغیر $y = tx$ که t پارامتر است، به دست می‌آید.

$$t^2 x^2 = \frac{a-x}{a+2.5x} \cdot x^2$$

$$x_t = \frac{a(1-t^2)}{(1+2.5t^2)}, \quad y_t = \frac{at(1-t^2)}{(1+2.5t^2)}$$

$$x'_t = a \cdot \frac{-7t}{(1+2.5t^2)^2}, \quad y'_t = a \cdot \frac{-2.5t^4 - 5.5t^2 + 1}{(1+2.5t^2)^2}$$

داشتیم:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} (x_t'^2 + y_t'^2)^{0.5} \cdot dt$$

بنابراین حدود جدید برای انتگرال گیری برابر است با:

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=a \rightarrow t=0 \end{cases}$$

پس:

$$l_1 = 2 \int_0^a (1 + f(x)')^{0.5} \cdot dx = 2 \int_1^0 (x_t'^2 + y_t'^2)^{0.5} \cdot dx$$

چون t به توان زوج رسیده است بنابراین:

$$l_1 = 2 \int_0^1 (x_t'^2 + y_t'^2)^{0.5} \cdot dt$$

$$l_1 = 2a \int_0^1 \frac{(-2.5t^4 - 5.5t^2 + 1)^2 + 49t^2}{(1+2.5t^2)^4} \cdot dt$$

انتگرال معین فوق از طریق قاعده سیمپسون و به ازاء $n=10$ حل گردید و مقدار آن با استفاده از یک برنامه کامپیوتری به قرار ذیل به دست آمد:

$$l_1 = 2 \times 1.17355 a = 2.3471 a \quad (۱۰)$$

$$\frac{l_1}{a} = 2.3471 \quad (۱۱)$$

باید توجه نمود گروسبرگ Grosberg [۱۰] مقدار نسبت فوق را برای الاستیکا که نسبت طول حلقه میله الاستیکا به ارتفاع آن است برابر $2/543$ پیدا نمود که حدود ۸٪ با مقدار پیدا شده در تئوری حاضر تفاوت دارد. البته با احتساب قطر نخ به اندازه D مقدار l_1 افزایش یافته و برابر $l_1 = 2/3471 (a + \frac{D}{2})$ خواهد شد. در نتیجه نسبت $\frac{l_1}{a}$ افزایش می‌یابد و به مقدار تئوری گروسبرگ نزدیکتر خواهد شد.

ب) محاسبه طول حلقه سینکر l_2 :

طبق فرض انجام شده، حلقه سینکر را دایره‌ای به قطر عرض ماکزیمم حلقه سوزن در نظر گرفتیم، پس خواهیم داشت:

$$l_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi y_{\max} \cdot 2 = 0.7544 a \quad (۱۲)$$

پس:

$$L = l_1 + l_2 = 3.1015 a \quad (۱۳)$$

که در آن L طول کل حلقه مدل و a ارتفاع ماکزیمم مدل حلقه می‌باشد.

با تقسیم ارتفاع ماکزیمم a به عرض ماکزیمم (رابطه ۹) خواهیم داشت:

$$\frac{a}{d} = 2.0820 \quad (۱۴)$$

که این نسبت توسط Leaf [۹] وقتی دو سر حلقه کاملاً به هم چسبیده‌اند $2/08$ بوده است که در مقایسه سازگاری کامل بین این دو مدل وجود دارد.

۳- ارتباط بین طول حلقه مدل و پارامترهای ابعادی پارچه

با توجه به وضعیت شکل دو حلقه متوالی (شکل ۳) و فرضیات انجام شده اولیه، روابط بین طول حلقه به دست آمده از مدل فرضی (رابطه ۱۲) و خواص ابعادی پارچه را براساس روابط ماندن می توان به قرار ذیل نوشت:

$$(15)$$

$$c.p.c = \frac{3.1015}{L}$$

$$w.p.c = \frac{6.457}{L} \quad (16)$$

$$S.D. = \frac{20.0272}{L^2} \quad (17)$$

همانطور که مشاهده می گردد مقدار ثابت رابطه (۱۷) حاصل از مدل فرضی (۲۰/۰۲۷۲) با مقدار تجربی به دست آمده توسط Doyle (یعنی ۱۹/۳) و مقدار تئوری به دست آمده توسط Chambelian [۱۱] (یعنی ۲۰) سازگاری نزدیکی دارد. بنابراین مدل تئوری حاضر از نظر ارتباط بین طول حلقه و خواص ابعادی پارچه نیز مورد تأیید می باشد.

لازم است متذکر شویم مقادیر ثابت روابط (۱۵) و (۱۶) به علت صرفنظر نمودن از قطر نخ در این مدل، با مقادیر به دست آمده توسط محققین قبلی هماهنگی

۵- منابع

- [1]-Peirce, F.T., "Geometrical Principles applicable to the design of functional fabrics." T.R.J., 17, 1947, 123-147.
- [2]-Leaf, G.A.V., & "Glaskin, A., "The Geometry of a plain knitted loop", J.Text. Inst., 46, 1955, T587-T605.
- [3]-Leaf, G.A.V., "Models of plain knitted loop", J.Text.Inst., 51, 1960, T49.
- [4]-Postle, R and Munden, D.L., "Analysis of the Dry-relaxed knitted loop configuration., part I & II, J. Text. Inst., 58, 1967, T 329-T365.
- [5]-Dutton, W.A. "The influence of knitting structure on the shrinkage and finishing of hosiery fabrics." The Journal of the society of Dyers and colourist, vol. 60, No. 11, 1944.
- [6]-Knapton, J.J.F., Truter, E.V., Aziz, A.K.M.A., "The geometry, dimensional properties, and stabilization of the cotton plain Jersey structure." J.Text. Inst., 12, 1975, 413.
- [7]-Munden, D.L., "The Geometry and Dimensional properties of plain knit fabrics.", J. Text. Inst., 50, 1959, T448.
- [8]-Doyle, P.J., "Fundamental aspects of the design of knitted fabrics", J. Text. Inst., 44, 1953, P561-578.
- [9]-Leaf, G.A.V., "A property of a Buckled Elastic Rod.", British J. of Appl. phy., 9, 1958, 71-72.
- [10]-Grosberg, J. Text. Inst., 51, 1960, T39-T48.
- [11]-Chamberlain, J., "Hosiery Yarns and Fabrics.", City of Leicester, College of Technology, Vol. II, 1926, 103-104.

نداشته که در تحقیقات بعدی باید بر روی این مدل دوبعدی بررسی دقیقتری شود و مدل سه بعدی حلقه نیز ارائه گردد.

۴- نتیجه گیری

منحنی Strophoid با معادله $y^2 = \frac{a-x}{a+x} \cdot x^2$ با شباهت ظاهری که با حلقه بافت ساده پارچه حلقوی بودی دارد، به عنوان قالب اولیه انتخاب گردید و پس از تطبیق با خواص الاستیکا اصلاح شد و به صورت معادله $y^2 = \frac{a-x}{a+2.5x} \cdot x^2$ به عنوان مدل دو بعدی بخش اصلی واحد ساختمانی پارچه (یعنی حلقه سوزن و دو ساق حلقه) ارائه گردید. قسمت دیگر واحد ساختمانی پارچه (حلقه سینکر) به صورت دایره و با قطر ماکزیمم عرض حلقه سوزن فرض گردید. طول، عرض ماکزیمم و ارتفاع ماکزیمم، نسبت ارتفاع به عرض حلقه و نسبت طول منحنی الاستیکا به ارتفاع این مدل تئوری حلقه محاسبه گردید. ارتباط طول حلقه محاسبه شده با تراکم سطحی پارچه نیز به دست آمد. کلیه نتایج حاصل، با مدل های حلقه الاستیکا و تجربیات خواص ابعادی پارچه که توسط محققین قبلی به دست آمده بودند، نزدیکی زیادی را نشان می دهند و صحت این مدل فرضی تطبیقی را برای پارچه ساده حلقوی بودی تأیید می نماید.