فرمول‌بندی بسته معادلات دینامیکی رباتهای صفحه‌ای با N درجه آزادی

سیّداحمد فاضل‌زاده‌حقیقی
مربی دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه شیراز

علی مقداری
دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در مقاله حاضر فرمول‌بندی بسته‌ای از معادلات دینامیکی رباتهای صفحه‌ایی N بازویی با جرمهای متمرکز در انتهای هر بازو، ارائه گردیده است. مراحل انجام کار براساس استفاده از شتابهای جزیی و بکارگیری روش دالامبر می‌باشد. تفکیک شتابهای وارده بر هر جرم به شتابهای زاویه‌ای، کوریولیس، گریز از مرکز و شتاب جاذبه و بررسی جداگانه اثر هر کدام، روند مناسبی برای رسیدن به فرم بسته معادلات ایجاد نموده است. بدست آوردن معادلات دینامیکی بطور مستقیم و بدون انجام عملیات واسطه‌ای نظیر مشتق‌گیری، معکوس سازی و ...، و سهولت در دست‌یابی به معادلات بطور دستی از مزایای معادلات ارائه شده می‌باشد.

A Closed - Form Formulation of the Dynamical Equations of N - Axis Planar Manipulators

S.A. Fazelzadeh-Haghighi
Lecturer Mechanical Engineering Department
Shiraz University

A. Meghdari
Associate Prof.
Mechanical Engineering Department
Sharif University of Technology

ABSTRACT

This paper presents a closed - form formulation of the dynamical equations of N-axis planar manipulator arms. The method is based on the definition of partial accelerations, and D'Alembert principle.

Decomposing the acceleration applied on each link (concentrated mass at the distal end of each link) into the angular, Coriolis, centripetal and gravitational accelerations and studying their effects separately, has resulted in an efficient way of obtaining dynamical equations in a closed - form.

۱ـ مقدمه

در رباتها دو مسأله وجود دارد که معادلات دینامیکی نقش عمده‌ای در آنها ایفا می‌نمایند. در طراحی، معادلات دینامیکی برای شبیه‌سازی حرکت و بهینه‌سازی پارامترها بکار می‌روند. در ارتباط با عملکرد و کنترل ربات، معادلات دینامیکی برای محاسبه گشتاور و نیروهای محرک در طی مسیر از پیش تعیین شده مورد توجه می‌باشند.

معادلات دینامیکی رباتها بر اساس روشهای متنوعی نظیر

لاگرانژ، نیوتن اویلر، کین و اصلاحاتی که بر روی هر کدام از آنها شده است بدست می‌آیند [۲ و ۱] و مبنای توسعه روشهای نوین بر اساس کاهش حجم محاسبات می‌باشد [۳ و ۲]. در روشهای مرسوم، معادلات حاکمه بازاء یک فاصله زمانی محدود و برای یک موقعیت مشخص حل می‌گردند و در مراحل زمانی بعد، مجدداً تمامی عملیاتی که منجر به معادلات نهایی می‌گردند تکرار می‌شوند. از این‌رو در مراحل عددی راندمان روش انتخابی نقش تعیین کننده‌ای ایفا می‌نماید. اساس بهره‌وری روشها بر مبنای تعداد عملیات جمع، ضرب و حافظه اشغال شده توسط کامپیوتر برای ایجاد معادلات دینامیکی می‌باشد. از این‌رو چنانچه معادلات دینامیکی بطور تحلیلی ایجاد شوند به مراتب از روشهای عددی سودمندتر و بهینه‌تر می‌باشند [۴]. همچنین فرم تحلیلی معادلات دینامیکی بر حسب پارامترهای فیزیکی و مکانی ربات دید مناسبتری از فیزیک سیستم را برای مهندسان طراح، بویژه در مراحل خطی‌کردن معادلات دینامیکی، بررسی تقابل دینامیکی و طراحی و ارزیابی سیستم کنترل فیدبک ایجاد می‌کند [۵]. در رباتهای ساده و با درجات آزادی کم با بکارگیری روش لاگرانژ و انجام عملیات بوسیله دست می‌توان معادلات دینامیکی را بصورت تحلیلی بدست آورد. چنانچه درجات آزادی از عدد ۳ تجاوز کند یافتن معادلات تحلیلی با دست بسیار مشکل خواهد شد و برای درجات آزادی بیش از ۳ تقریباً غیرممکن می‌باشد [۶].

در چند سال اخیر تحقیقات جدیدی برای ایجاد معادلات به شکل پارامتریک بوسیله کامپیوتر صورت گرفته و چندین برنامه کامپیوتری توسعه یافته است. این برنامه‌ها بطور عمده از روش لاگرانژ و روشهای اصلاح شده مرتبط با آن استفاده می‌کنند [۶ و ۷] . اگرچه روش لاگرانژ از نظر حجم محاسبات در روشهای عددی از راندمان بسیار کمی برخوردار می‌باشند ولی در روشهای تحلیلی بدلیل خواص ویژه‌ای که دارد مورد استفاده قرارمی‌گیرد [۱، ۲ و ۷]. اگر چه مسأله مورد بررسی یک حالت خاص از حالتهای کلی رباتها می‌باشد ولی حالت کاربردی زیادی دارد و در حل معادلات دینامیکی رباتهای ماری شکل و مزدوج N بازویی سودمند می‌باشد [۸].

۲ـ قراردادهای هندسی و سینماتیکی

ربات صفحه‌ای مورد مطالعه شامل یک زنجیره N بازویی صلب است که اجزاء آن بوسیله مفاصل لولایی به هم متصل شده‌اند (شکل ۱). به منظور سهولت در بدست آوردن معادلات دینامیکی جرم هر بازو بطور متمرکز در انتهای آن درنظر گرفته شده است و بطور مستقیم ممان اینرسی صفحه‌ای بازوها در معادلات وارد نشده‌اند. نهایتاً به منظور اعمال اثر ممانهای اینرسی می‌توان مفاصل مجازی در سنتروئید هر بازو ایجاد نمود، بطوری که زاویه بین دو عضو جدیدی که در دو طرف مفصل مجازی ایجاد می‌شود، صفر باشد و عملاً هیچگونه افزایش درجه آزادی بوجود نخواهد آمد. فاصله مفصل مجازی از مفصل اصلی را می‌توان طبق معادله (۱) بدست آورد.

$$K_i = \sqrt{\frac{I_i}{m_i}} \qquad (۱)$$

بطوری که I_i ، m_i و k_i بترتیب ممان اینرسی، جرم و شعاع ژیراسیون بازوی iام می‌باشند.

طبق شکل (۱) پایه ربات در مفصل شماره ۱ در یک سیستم مختصات مرجع اینرسی $X_0 - Y_0$ ثابت شده است و سیستم مختصات $X_1\text{-}Y_1$ بر $X_0 - Y_0$ منطبق است. قراردادهای سینماتیکی بر اساس علائم دناویت ـ هارتنبرگ می‌باشند [۹]. طبق این قرارداد رابطه سینماتیکی بین دو رابط صلب متوالی در یک ربات که با مفاصل یک درجه آزادی به یکدیگر متصل شده‌اند (شکل ۲)، توسط ماتریس زیر قابل توصیف است.

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} d_i \\ S\theta_i\, S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

بطوری که $S_i=\sin(\theta_i)$ و $C_i=\cos(\theta_i)$ و پارامترهای d_i , α_i , a_i و θ_i طبق قواعد زیر مشخص می‌شوند.

a_i ، فاصله بین Z_i تا Z_{i+1} که در امتداد X_i اندازه‌گیری می‌شود.

α_i ، زاویه بین Z_i و Z_{i+1} که حول X_i سنجیده می‌شود.

d_i ، فاصله بین X_i تا X_{i-1} که در امتداد Z_i اندازه‌گیری می‌شود.

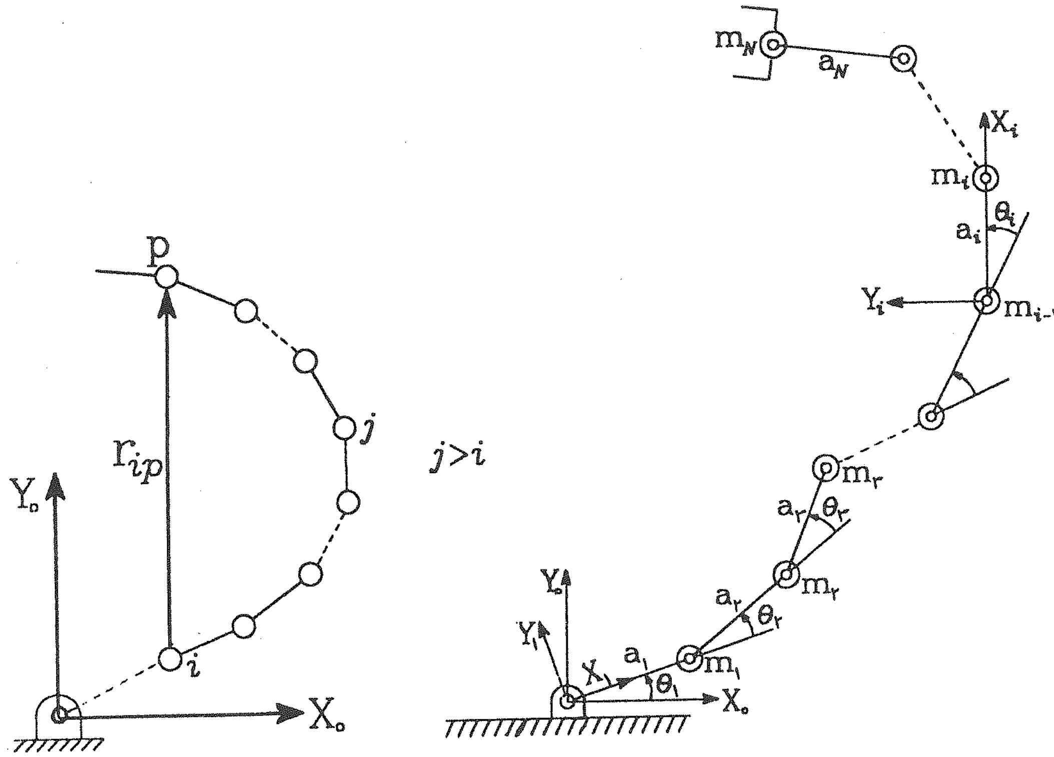
θ_i ، زاویه بین X_{i-1} و X_i که حول Z_i سنجیده می‌شود.

همچنین به منظور تبدیل سیستم مختصات P ام به سیستم مختصات مرجع O می‌توان از قاعده زنجیری انتقال، طبق معادله (۳) استفاده کرد.

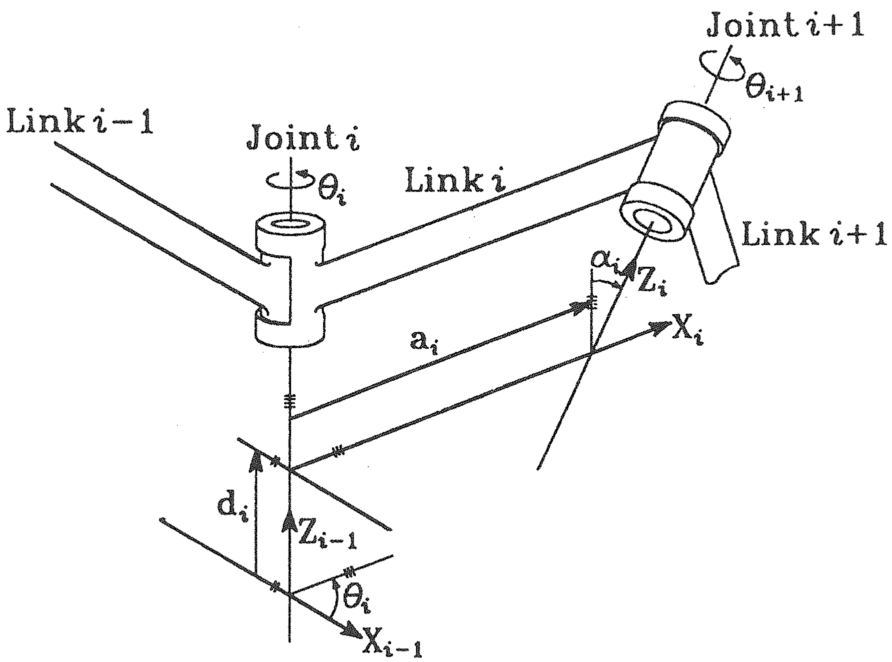
$${}^0T_p = {}^0T_1\, {}^1T_2\, {}^2T_3 \ldots\ldots {}^{p-1}T_p \qquad (۳)$$

۳ـ معادلات سینماتیکی

با توجه به خصوصیات رباتهای صفحه‌ای عملاً پارامترهای α_i و d_i برابر صفر می‌باشند و a_i طول هر بازو و θ_i زاویه نسبی بین



شکل (۱)   یک ربات صفحه‌ای با N درجه آزادی و مفاصل لولائی



شکل (۲)   توصیف سینماتیک دو رابط صلب متوالی در یک ربات

دو بازوی متوالی می‌باشد، با جایگذاری مقادیر فوق در معادله (۲) و استفاده از معادله (۳) و قواعد مثلثاتی (سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه) ماتریس تبدیل سیستم مختصات P ام به سیستم مختصات مرجع بصورت معادله (۴) قابل بیان است.

$$^{0}T_p=\begin{bmatrix} C_{1p} & -S_{1p} & 0 & \sum_{j=1}^{p} a_j C_{1j} \\ S_{1p} & C_{1p} & 0 & \sum_{j=1}^{p} a_j S_{1j} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

بطوری که :

$$C_{1j} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_j)$$

$$S_{1j} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_j) \qquad (۵)$$

و ماتریس دوران بین سیستم مختصات P ام و سیستم مختصات مرجع برابر است با :

$$^{0}R_p=\begin{bmatrix} C_{1p} & -S_{1p} & 0 \\ S_{1p} & C_{1p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

برای تبدیل بردار r_p در سیستم مختصات p نسبت به سیستم مختصات مرجع داریم :

$$^{0}r_p = {}^{0}R_p\, {}^{p}r_p \qquad (۷)$$

بطوری که بردار $^{p}r_p$ برای بازوی p ام بصورت زیر می‌باشد:

$$^{p}r_p = [a_p \quad 0 \quad 0]^T \qquad (۸)$$

با جایگذاری معادله (۶) و (۸) در معادله (۷) خواهیم داشت :

$$^{0}r_p = [a_p C_{1p} \quad a_p S_{1p} \quad 0]^T \qquad (۹)$$

معادله (۹) را می‌توان به فرم معادله (۱۰) نوشت :

$$^{0}r_p = a_p\,(C_{1p}\,\vec{i} + S_{1p}\,\vec{j}) \qquad (۱۰)$$

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهایی در سیستم مختصات مرجع می‌باشند. $^{0}r_p$ بردار r_p در سیستم مختصات مرجع X_0-Y_0 می‌باشد. به منظور فشرده‌تر شدن معادلات، فاصله برداری مفصل i ام تا مفصل p+1 ام (یا جرم p ام) ربات در سیستم مختصات مرجع را بصورت r_{ip} نمایش می‌دهیم.

$$r_{ip} = \sum_{q=i}^{p} r_q = r_i + r_{i+1} + \dots + r_p \qquad (۱۱)$$

مطابق شکل (۱) شتاب کل وارده بر جرم p ام، متأثر از شتابهای مفاصلی است که در حد فاصل سیستم مختصات X_p-Y_p و سیستم مختصات مرجع X_0-Y_0 قرارگرفته‌اند. برای بدست آوردن شتاب کل وارده بر جرم p ام از شتابهای جزیی که در اثر سرعتها و شتابهای زاویه‌ای جزیی حاصل از چرخش مفاصلی که قبل از آن واقع‌اند استفاده خواهد شد [۱۰ و ۱۱].

سرعتها و شتابهای زاویه‌ای جزیی، مشتقات اول و دوم سیستم مختصات تعمیم یافته θ_i می‌باشند. بمنظور محاسبه اثر شتاب جزیی مفصل j ام بر جرم p ام، بردار مکان r_{jp} از معادله (۱۱) را انتخاب و اثرات سرعت زاویه‌ای جزیی w_j^j و شتاب زاویه‌ای جزیی α_j^j مفصل j ام بر بردار r_{jp} را مطالعه می‌کنیم.

براساس قوانین حاکم بر سینماتیک اجسام صلب، چنانچه نقطه P+1 در سیستم مختصات X_p-Y_p و مبدأ سیستم مختصات X_j-Y_j در نقطه j-1 قرارداشته باشد آنگاه شتاب جزیی وارد بر جرم p ام (که در نقطه P+1 واقع شده) در اثر شتاب و سرعت زاویه‌ای مفصل j ام در سیستم مختصات X_0-Y_0 بصورت زیر خواهد بود :

$$A_p^j = A_j^j + A_{p/j}^j \qquad (۱۲)$$

بطوری که :

$$A_{p/j}^j = \alpha_j^j \times r_{jp} + 2\omega_j^j \times V_{rel_p}^j + \omega_j^j \times (\omega_j^j \times r_{jp}) \qquad (۱۳)$$

A_j^j : شتاب جزیی مبدأ سیستم مختصات X_j - Y_j در اثر دوران سیستم مختصات X_j - Y_j

$A_{p/j}^j$: شتاب جرم p ام نسبت به مبدأ سیستم مختصات X_j - Y_j

θ_j^j : زاویه بین دوبازوی متوالی (بین بازوی (j-1) ام و j ام)

ω_j^j، α_j^j : سرعت و شتاب زاویه‌ای جزیی بازوی j ام

$V_{rel_p}^j$: سرعت نسبی جزیی جرم p ام در اثر سرعت زاویه‌ای نسبی X_j - Y_j نسبت به یک نقطه ثابت در سیستم مختصات مرجع X_0 - Y_0

$$V_{rel_p}^j = \omega_{rel_p}^j \times r_{rel_p}^j \qquad (۱۴)$$

$r_{rel_p}^j$: فاصله نسبی جرم p ام تا مفصل j-1 است که برابر r_{jp} خواهد بود.

$\omega_{rel_p}^j$: سرعت زاویه‌ای نسبی سیستم مختصات X_j - Y_j نسبت به صفحه X_0 - Y_0 طبق قاعده سینماتیک نسبی معادله (۱۵)، $\omega_{rel_p}^j = \omega_{1(j-1)}$ می‌شود.

$$\omega_{1j} = \omega_j + \omega_{1(j-1)} \qquad (۱۵)$$

معادله (۱۳) بترتیب از سه بخش شناخته شده، شتاب زاویه‌ای A_M ، شتاب کوریولیس A_B و شتاب گریز از مرکز A_C تشکیل شده است. معادله (۱۳) را بصورت زیر نشان می‌دهیم.

$$A_{p/j}^j = A_{M\,p/j}^j + A_{B\,p/j}^j + A_{C\,p/j}^j \qquad (۱۶)$$

در معادله (۱۲) شتاب جزیی مؤثر به سیستم مختصات $X_j - Y_j$ مربوط به خودش ($A_j^j = 0$) صفر می‌باشد. از این‌رو شتاب سینماتیکی کل وارد بر جرم p ام، در اثر حرکت بازوهای اول تا p ام، طبق معادله (۱۷) قابل محاسبه است.

$$A_p = \sum_{j=1}^{p} A_{p/j}^{j} \qquad (۱۷)$$

شتاب جاذبه g بصورت ثابت بر تمامی گره‌ها بطور یکسان وارد می‌شود و مستقل از حرکات نسبی بازوهای ربات می‌باشد. شتاب جاذبه وارد بر جرم p ام را بصورت A_{Gp} نشان داده و اثر آن را به معادله (۱۷) می‌افزائیم. نهایتاً شتاب کل وارد بر جرم p ام طبق معادله (۱۸) قابل بیان می‌باشد.

$$A_p = A_{MP} + A_{BP} + A_{CP} + A_{GP} \qquad (۱۸)$$

۴ـ معادلات دینامیکی

طبق قانون دوم نیوتن نیروی اینرسی که در اثر شتاب A_p در جرم p ام (m_p) بوجود می‌آید برابر است با :

$$F_p = m_p A_p \qquad (۱۹)$$

طبق اصل اول دالامبر F_p بصورت یک بار استاتیکی در انتهای بازوی p ام قابل اعمال می‌باشد. چنانچه در مفصل i ام برای ایجاد حرکت یک محرک با تورک پیچشی τ_i قرار داشته باشد، آنگاه بر اساس اصل دوم دالامبر بایستی تورک پیچشی τ_i کلیه نیروهای اینرسی جرمهایی که بعد از آن واقع شده‌اند را تحمل کند. اگر فاصله برداری F_p تا مفصل i ام را با r_{ip} مشخص کنیم آنگاه :

$$\tau_i - \sum_{p=i}^{N} r_{ip} \times F_p = 0 \qquad (۲۰)$$

اندیس p از جرم i ام تا N که آخرین جرم است تغییر می‌کند. با جایگذاری معادله (۱۸) در (۱۹) می‌توان نیروی اینرسی هر جرمی را بر حسب اثرات هر یک از مؤلفه‌های شتاب، طبق معادله (۲۱)، تفکیک نمود.

$$F_p = F_{M_p} + F_{B_p} - F_{C_p} + F_{G_p} \qquad (۲۱)$$

چنانچه معادله (۲۱) را در معادله (۲۰) قرار دهیم آنگاه تورک پیچشی τ_i بصورت معادله (۲۲) تفکیک می‌گردد.

$$\tau_i - \tau_{M_i} - \tau_{B_i} - \tau_{C_i} - \tau_{G_i} = 0 \qquad (۲۲)$$

در ادامه بمنظور سهولت در جمع‌بندی معادلات بفرم بسته اثرات هر کدام از شتابها را به تنهایی مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

۴ـ۱ـ اثر شتاب زاویه‌ای

شتاب زاویه‌ای جزیی وارد بر جرم p ام برابر است با :

$$A^{j}_{M_{p/j}} = \alpha_j^{j} \times r_{jp} \qquad (۲۳)$$

بطوری که :

$$\alpha^{j}_{j} = \ddot{\theta}_j \vec{k} \qquad (۲۴ـ۱)$$

$$r_{jp} = \sum_{q=j}^{p} r_q \qquad (۲۴ـ۲)$$

$$r_q = a_q \,(C\theta_{1q} \vec{i} + S\theta_{1q} \vec{j}) \qquad (۲۴ـ۳)$$

با جایگذاری معادلات (۲۴) در (۲۳) خواهیم داشت :

$$A^{j\;p}_{M_{p/j}} = \ddot{\theta}_j \vec{k} \times \sum_{q=j}^{p} a_q \,(C\theta_{1q} \vec{i} + S\theta_{1q} \vec{j}) \qquad (۲۵)$$

با انجام ضرب برداری و استفاده از روابط مثلثاتی معادله (۲۵) بصورت معادله (۲۶) قابل بیان می‌باشد.

$$A^{j}_{M_{p/j}} = \bar{r}_{ip} \, \ddot{\theta}_j \qquad (۲۶)$$

بطوری که :

$$\bar{r}_{jp} = \sum_{q=j}^{p} a_q[C(\theta_{1q} + \frac{\pi}{2})\vec{j} + S(\theta_{1q} + \frac{\pi}{2})\vec{j}] \qquad (۲۷)$$

طبق معادله (۱۷)، شتاب زاویه‌ای کل وارد بر جرم p ام برابر است با :

$$A_{M_p} = \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_{jp} \, \ddot{\theta}_j \qquad (۲۸)$$

و با استفاده از معادله (۱۹) نیروی اینرسی جرم P ام برابر است با :

$$F_{MP} = m_p \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_{jp} \, \ddot{\theta}_j \qquad (۲۹)$$

مؤلفه تورک ایجاد شده در اثر F_{MP} بر اساس معادله (۲۰) قابل محاسبه است. با قراردادن معادله (۲۹) در معادله (۲۰) خواهیم داشت:

$$\tau_{M_1} = \sum_{p=i}^{N} r_{ip} \times (m_p \sum_{j=1}^{P} \bar{r}_{jp} \, \ddot{\theta}_j) \qquad (۳۰)$$

حد نهایی اندیس p ، N و ماکزیمم اندیس j ، p می باشد. از این‌رو با استفاده از قاعده سریها می‌توان معادله (۳۰) را بصورت زیر نوشت:

$$\tau_{M_i} = \sum_{j=1}^{i-1} M_{ji} \, \ddot{\theta}_j + \sum_{j=i}^{N} M_{ij} \, \ddot{\theta}_j \qquad (۳۱)$$

بطوری که :

$$M_{ij}=\sum_{P=i}^{N} m_p\, r_{ip} \times \bar{r}_{jp} \qquad j\geq i \tag{۳۲-۱}$$

$$M_{ji}=\sum_{P=j}^{N} m_p\, r_{jp} \times \bar{r}_{ip} \qquad j<i \tag{۳۲-۲}$$

با توجه به معادله (۱-۳۲) و (۲-۳۲)، در دو حالت فوق اندیس p از مقدار حداقل بین j و i شروع می‌شود. بنابراین M_{ij} بصورت معادله (۳۳) تعریف می‌شود.

$$M_{ij}=\sum_{P=min(i,j)}^{N} m_p\, r_{ip} \times \bar{r}_{jp} \tag{۳۳}$$

حد بالای اندیس i و j برابر N می‌باشد در نتیجه M بصورت یک ماتریس N×N در خواهد آمد. بر اساس خواص ضرب داخلی و خارجی که بین دو بردار و بردارهای عمود بر آنها برقرار است می‌توان نتیجه گرفت :

$$r_{jp} \times \bar{r}_{ip} = r_{ip} \cdot r_{jp} \tag{۳۴}$$

$$r_{jp} \times \bar{r}_{ip} = r_{ip} \times \bar{r}_{jp} \tag{۳۵}$$

از این‌رو طرفین معادله (۱-۳۲) و (۲-۳۲) برابر خواهد بود، یعنی $M_{ij}=M_{ji}$. در نتیجه ماتریس M یک ماتریس متقارن می‌باشد. با توجه به خاصیت تقارن ماتریس M، در مجموع N(N+1)/2 درایه برای ایجاد ماتریس M احتیاج است. با انجام ضرب خارجی چند بردار متوالی می‌توان نوشت :

$$r_{ip} \times \bar{r}_{jp} = r_{i(i-1)} \times \bar{r}_{jp} + r_{jp} \times \bar{r}_{jp} \qquad j\geq i \tag{۳۶}$$

$$r_{ii} \times \bar{r}_{jj} = a_i\, a_j\, C\theta_{(i+1)j} \qquad j\geq i \tag{۳۷}$$

$$r_{i(j-1)} \times \bar{r}_{jp} = \sum_{u=i}^{j-1} a_u \sum_{v=j}^{P} a_v\, C_{(u+1)v} \qquad j\geq i \tag{۳۸}$$

$$r_{jp}\times\bar{r}_{jp} = \sum_{s=j}^{P} a_s^2 + 2\Big[\sum_{s=i}^{P-1} a_s\Big[\sum_{t=s+1}^{P} a_t C_{(s+1)t}\Big]\Big] \qquad j\geq i \tag{۳۹}$$

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۳۳) خواهیم داشت :

$$M_{ij} = \sum_{P=i}^{N} m_p\, r_{jp} \times \bar{r}_{jp} + \sum_{P=i}^{N} m_p\, r_{i(j-1)}\times \bar{r}_{jp} \qquad j\geq i \tag{۴۰}$$

با جایگذاری معادلات (۳۸) و (۳۹) در معادله (۴۰) عناصر ماتریس M مشخص می‌گردد. بنابراین برای ایجاد ماتریس M از مجموعه معادلات (۴۱) استفاده می‌شود.

$$M_{ij} = \sum_{P=i}^{N} m_p \Big[\sum_{s=j}^{P} a_s^2 + 2\sum_{s=i}^{P-1} a_s \Big(\sum_{t=s+1}^{P} a_t C_{(s+1)t}\Big)$$

$$+ \sum_{u=i}^{j-1} a_u \sum_{v=j}^{P} a_v\, C_{(u+1)v}\Big] \qquad j>i \tag{۴۱-۱}$$

$$M_{ij} = M_{ji} \qquad j<i \tag{۴۱-۲}$$

$$M_{ii}= \sum_{P=i}^{N} m_p\Big[\sum_{s=j}^{P} a_s^2+2\sum_{s=i}^{P-1} a_s\Big(\sum_{t=s+1}^{P} a_t C_{(s+1)t}\Big)\Big] \quad i=j \tag{۴۱-۳}$$

پس از مشخص شدن اجزاء ماتریس M معادله (۳۱) را به فرم ماتریسی می‌نویسیم :

$$\tau_M = [M]\,\{\ddot{\theta}\} \tag{۴۲}$$

۴-۲-۴-اثر شتاب کوریولیس

شتاب کوریولیس جزیی که بر جرم P ام وارد می‌شود برابر است با :

$$A^{j}_{B_{p/j}} = 2\omega^{j}_{j} \times V^{j}_{rel_p} \tag{۴۳}$$

بطوری که :

$$\omega^{j}_{j} = \dot{\theta}_j\, \vec{k} \tag{۴۴-۱}$$

$$V^{j}_{rel_p} = \dot{\theta}_{1(j-1)}\, \vec{k} \times r_{jp} \tag{۴۴-۲}$$

با جایگذاری معادلات (۴۴) در (۴۳) و انجام ضرب برداری معادله (۴۳) بصورت (۴۵) قابل بیان می‌باشد.

$$A^{j}_{B_{p/j}} = -\,2\, r_{jp}\, \dot{\theta}_{1(j-1)}\, \dot{\theta}_j \tag{۴۵}$$

با جایگذاری معادله (۴۵) در (۱۷) و نتیجه آن در معادله (۱۹)، نیروی اینرسی جرم P ام که حاصل از شتاب کوریولیس کل وارد بر جرم P ام است بدست می‌آید :

$$F_{B_p} = -2\, m_p \sum_{j=1}^{P} r_{jp}\, \dot{\theta}_{1(j-1)}\, \dot{\theta}_j \tag{۴۶}$$

با توجه به اینکه در ازاء j=1 یک ترم شتاب گریز از مرکز ایجاد می‌کند، لذا اندیس j را از 2 شروع می‌نمائیم. مؤلفه تورک ایجاد شده در اثر F_{BP} بر اساس معادله (۲۰) قابل محاسبه است. با قراردادن معادله (۴۶) در معادله (۲۰) خواهیم داشت:

$$\tau_{Bi} = -2 \sum_{p=i}^{N} r_{ip} \times \Big(m_p \sum_{j=2}^{P} r_{jp}\dot{\theta}_{1(j-1)}\dot{\theta}_j\Big) \tag{۴۷}$$

با توجه به خواص جابجایی اندیس در سری‌ها می‌توان نوشت :

$$\tau_{Bi} = \sum_{j=2}^{j-1} D_j^{1(i-1),i}\, \dot{\theta}_{1(j-1)}\dot{\theta}_j + \sum_{j=i}^{N} D_i^{1(j-1),j}\, \dot{\theta}_{1(j-1)}\dot{\theta}_j \tag{۴۸}$$

بطوری که :

$$D_i^{1(j-1),j} = -2 \sum_{p=i}^{N} m_p\, r_{ip}\times r_{jp} \qquad j\geq i \tag{۴۹-۱}$$

$$D_j^{1(i-1),i} = -2 \sum_{p=j}^{N} m_p\, r_{jp} \times r_{ip} \qquad j<i$$ (۴۹-۲)

با توجه به معادله (۱-۴۹) و (۲-۴۹)، در دو حالت فوق اندیس p از مقدار حداقل بین j و i شروع می‌شود. بنابراین D_{ij} بصورت معادله (۵۰) تعریف می‌شود.

$$D_i^{1(j-1),j} = -2 \sum_{p=min(i,j)}^{N} m_p\, r_{ip} \times r_{jp}$$ (۵۰)

چنانچه جای i و j در معادله (۱-۴۹) عوض شود آنگاه :

$$D_j^{1(i-1),i} = -2 \sum_{p=j}^{N} m_p\, r_{jp} \times r_{ip} \qquad i>j$$ (۵۱)

طبق خاصیت جابجایی در ضرب خارجی، بین دو معادله (۱-۴۹) و (۵۱) رابطه زیر برقرار خواهد بود :

$$D_j^{1(i-1),i} = -\, D_i^{1(j-1),j}$$ (۵۲)

بنابراین ماتریس D یک ماتریس پاد متقارن می‌باشد. چنانچه i=j باشد طبق خواص ضرب خارجی خواهیم داشت :

$$D_i^{1(i-1),i} = -2 \sum_{p=i}^{N} m_p r_{ip} \times r_{ip} = 0 \qquad i=j$$ (۵۳)

با انجام ضرب خارجی چند بردار متوالی می‌توان نوشت :

$$r_{ii} \times r_{jj} = a_i\, a_j\, S_{(i+1)j} \qquad j>i$$ (۵۴)

$$r_{ip} \times r_{jp} = \sum_{u=i}^{j-1} a_u \sum_{v=j}^{P} a_v\, S_{(u+1)v} \quad j>i$$ (۵۵)

با جایگذاری معادله (۵۵) در معادله (۱-۴۹) اجزاء بالا مثلثی ماتریس D ، (j>i) بدست می‌آید. بنابراین برای ایجاد اجزاء ماتریس D از مجموعه معادلات (۵۶) استفاده می‌شود.

$$D_i^{1(j-1),j} = -2 \sum_{p=i}^{N} [m_p \sum_{u=i}^{j-1} a_u \sum_{v=j}^{P} a_v S_{(u+1)v}] \quad j>i$$ (۱-۵۶)

$$D_i^{1(j-1),j} = 0 \qquad j=i$$ (۲-۵۶)

$$D_j^{1(i-1),i} = -D_i^{1(j-1),j} \qquad j<i$$ (۳-۵۶)

پس از مشخص شدن اجزاء ماتریس D ، برای تبدیل معادله (۴۸) به فرم استاندارد فضای حالت، $\theta_{1(i-1)}$ را بسط می‌دهیم.

$$\dot{\theta}_{1(j-1)} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \ldots + \dot{\theta}_{(j-1)}$$ (۵۷)

با جایگذاری معادله (۵۷) در معادله (۴۸) و تعریف ماتریس [B]، معادله (۴۸) بصورت شناخته شده معادله (۵۸) در می‌آید. در پایان معادلهٔ ماتریس [B] بصورت یک ماتریس N×N(N-1)/2 در می‌آید.

$$\tau_B = [B]\ \{\dot{\theta}\ \dot{\theta}\}$$ (۵۸)

بطوری که :

$$B_i^{k,j} = D_i^{1k,j} \qquad j>i$$ (۵۹)

$$B_i^{j,k} = B_i^{k,j}$$ (۱-۶۰)

$$B_i^{k,j} = -B_j^{k,j} \qquad j\leq i \wedge i<k$$ (۲-۶۰)

$$B_i^{k,i} = 0 \qquad k\leq i$$ (۳-۶۰)

شکل بسط داده شده ماتریس [B] بصورت معادله (۴-۶۰) در پائین صفحه می‌باشد.

۴-۳-اثر شتاب گریز از مرکز

شتاب گریز از مرکز جزیی که بر جرم p ام وارد می‌شود برابر است با :

$$A_{Cp/j}{}^{j} = \omega^j{}_j \times (\omega^j{}_j \times r_{jp})$$ (۶۱)

با انجام ضرب برداری معادله (۶۱) بصورت معادله (۶۲) قابل بیان می‌باشد.

$$A_{Cp/j}{}^{j} = -r_{jp}\, \dot{\theta}_j\, \dot{\theta}_j$$ (۶۲)

با جایگذاری معادله (۶۲) در معادله (۱۷) و نتیجه آن در معادله (۱۹)، نیروی اینرسی جرم P ام که حاصل از شتاب گریز از مرکز است بدست می‌آید:

$$F_{Cp} = -m_p \sum_{j=1}^{P} r_{jp}\, \dot{\theta}_j\, \dot{\theta}_j$$ (۶۳)

مؤلفه تورک ایجاد شده در اثر F_{Cp} بر اساس معادله (۲۰) قابل

(۴-۶۰)

$$[B]=\begin{bmatrix}
b_1^{1,2} & b_1^{1,3} & \ldots & b_1^{1,n} & \vdots & b_1^{2,3} & b_1^{2,4} & \ldots & b_1^{2,n} & \vdots & \ldots & \vdots & b_1^{n-2,n-1} & b_1^{n-2,n} & \vdots & b_1^{n-1,n} \\
0 & b_2^{1,3} & \ldots & b_2^{1,n} & \vdots & b_2^{2,3} & b_2^{2,4} & \ldots & b_2^{2,n} & \vdots & \ldots & \vdots & b_2^{n-2,n-1} & b_2^{n-2,n} & \vdots & b_2^{n-1,n} \\
-b_2^{1,3} & 0 & \ldots & b_3^{1,n} & \vdots & 0 & b_3^{2,4} & \ldots & b_3^{2,n} & \vdots & \ldots & \vdots & b_3^{n-2,n-1} & b_3^{n-2,n} & \vdots & b_3^{n-1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-b_2^{1,n-1} & -b_3^{1,n-1} & \ldots & b_{n-1}^{1,n} & \vdots & -b_3^{2,n-1} & -b_2^{2,n-1} & \ldots & b_{n-1}^{2,n} & \vdots & \ldots & \vdots & 0 & b_{n-1}^{n-2,n} & \vdots & b_{n-1}^{n-1,n} \\
-b_2^{1,n} & -b_3^{1,n} & \ldots & 0 & \vdots & -b_3^{2,n} & -b_2^{2,n} & \ldots & 0 & \vdots & \ldots & \vdots & -b_{n-1}^{n-2,n} & 0 & \vdots & 0
\end{bmatrix}$$

محاسبه است. با قراردادن معادله (۶۳) در معادله (۲۰) خواهیم داشت:

$$\tau_{C_1} = \sum_{p=i}^{N} r_{ip} \times (m_p \sum_{j=1}^{P} r_{jp}\, \dot{\theta}_j\, \dot{\theta}_j) \qquad (۶۴)$$

با توجه به خواص جابجایی اندیس در سریها می‌توان نوشت:

$$\tau_{C_1} = \sum_{j=1}^{N} C_i^{j,j}\, \dot{\theta}_j\, \dot{\theta}_j) \qquad (۶۵)$$

بطوریکه:

$$C_i^{j,j} = \sum_{p=min(i,j)}^{N} m_p\, r_{ip} \times r_{jp} \qquad (۶۶)$$

از تساوی معادله (۶۶) با معادله (۵۰) رابطه زیر بین اجزاء ماتریس C ، D نتیجه خواهد شد:

$$C_i^{j,j} = \frac{1}{2} D_i^{1(j-1)j} \qquad j>i \qquad (۶۷)$$

با توجه به خواص ماتریس D ، برای ایجاد ماتریس C از مجموعه معادلات (۶۸) استفاده می‌شود.

$$C_i^{j,j} = \frac{1}{2} D_i^{1(j-1)j} \qquad j>i \qquad (۶۸\text{-}۱)$$

$$C_i^{j,j} = 0 \qquad j=i \qquad (۶۸\text{-}۲)$$

$$C_j^{i,i} = -C_i^{j,j} \qquad j<i \qquad (۶۸\text{-}۳)$$

ماتریس C یک ماتریس $N\times N$ بوده و برای ایجاد آن به $N(N-1)/2$ درآیه نیاز می‌باشد. پس از مشخص شدن اجزاء ماتریس C معادله (۶۵) را به فرم ماتریسی می‌نویسیم:

$$\tau_C = [C]\ \{\dot{\theta}^2\} \qquad (۶۹)$$

۴-۴-اثر شتاب جاذبه

شتاب ثقل g بر روی تمام جرمها بطور یکسان وارد می‌گردد از این‌رو شتاب ثقل وارد بر جرم P ام برابر است با:

$$A_{G_p} = -g\, \vec{j} \qquad (۷۰)$$

با جایگذاری معادله (۷۰) در معادله (۱۹)، نیروی اینرسی جرم P ام که حاصل از شتاب جاذبه است بدست می‌آید. مؤلفه تورک ایجاد شده در اثر F_{Gp} بر اساس معادله (۲۰) قابل محاسبه است. بنابراین:

$$\tau_{G1} = -g \sum_{p=i}^{N} m_p\, r_{ip} \times \vec{j} \qquad (۷۱)$$

طبق قواعد ضرب خارجی، و درنظر گرفتن بسط r_{ip} می‌توان نوشت:

$$r_{ip} \times \vec{j} = -\sum_{q=i}^{N} a_q\, C\theta_{1q}\, \vec{k} \qquad (۷۲)$$

با جایگذاری معادله (۷۲) در معادله (۷۱) خواهیم داشت:

$$\tau_{G1} = G_i\, g \qquad (۷۳)$$

بطوریکه:

$$G_i = \sum_{p=i}^{N} m_p \left(\sum_{q=i}^{N} a_q\, C\theta_{1q} \right)$$

بنابراین G یک ماتریس $(N\times 1)$ می‌باشد. پس از مشخص شدن اجزاء ماتریس G معادله (۷۳) را به‌فرم ماتریسی می‌نویسیم:

$$\tau_G = [G]\ \{g\} \qquad (۷۴)$$

۴-۵-معادلات دینامیکی نهایی

با جایگذاری ماتریسهای بدست آمده از معادلات (۴۲)، (۵۸)، (۶۹) و (۷۴) در معادله (۲۲)، معادلات دینامیکی ربات بصورت معادله (۷۵) قابل بیان است.

$$\tau = [M]\{\ddot{\theta}\} + [B]\{\dot{\theta}\,\dot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}^2\} + [G]\{g\} \qquad (۷۵)$$

۵-مثال

با استفاده از معادلات بدست آمده، معادلات دینامیکی یک ربات صفحه‌ای با ۳ درجه آزادی $(N=3)$ ایجاد گردیده است.

اجزاء ماتریس [M] :

$$M_{11} = m_1 a_1^2 + m_2\,[a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\, a_2\, C_{22}]$$
$$+ m_3\,[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1\, a_2\, C_{22}$$
$$+ 2a_2\, a_3\, C_{33} + 2a_1\, a_3\, C_{23}\,]$$

$$M_{22} = m_2 a_2^2 + m_3[a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_{33}]$$

$$M_{33} = m_3 a_3^2$$

$$M_{12} = m_2[a_2^2 + 2a_1\, a_2\, C_{22}]$$
$$+ m_3[a_2^2 + a_3^2 + 2a_2\, a_3\, C_{33}$$
$$+ a_1\, a_2\, C_{22} + a_1\, a_3\, C_{23}]$$

$$M_{13} = m_3[a_3^2 + a_1\, a_3\, C_{23} + a_2\, a_3\, C_{33}]$$

$$M_{23} = m_3[a_3^2 + a_2\, a_3\, C_{33}]$$

$$M_{31}=M_{13} \qquad M_{32}=M_{23} \qquad M_{21}=M_{12}$$

اجزاء ماتریس [B] :

طبق روابط بدست آمده ابتدا ماتریس D رابدست می‌آوریم :

$$D_1^{11,2}= -2[m_2a_1a_2S_{22}+m_3(a_1a_2S_{22} + m_3a_1a_3S_{23})]$$

$$D_1^{12,3}= -2[m_3a_1a_3S_{23}+m_3a_2a_3S_{33}]$$

$$D_2^{12,3}= -2[m_3a_2a_3S_{33}]$$

$$D_2^{11,2}=0 \qquad D_3^{12,3}=0$$

$$D_2^{10,1}=-D_1^{11,2} \qquad D_3^{10,1}=-D_1^{12,3} \qquad D_3^{11,2}=-D_1^{12,3}$$

و با استفاده از معادلات (۵۹) و (۶۰)، اجزاء ماتریس [B] بدست می‌آید :

$$B_1^{1,2}=D_1^{11,2} \quad B_1^{1,3}=B_1^{2,3}=D_1^{12,3} \quad B_2^{1,3}=B_2^{2,3}=D_2^{12,3}$$

اجزاء ماتریس [C] :

طبق معادلات (۶۸) می‌توان نوشت :

$$C_1^{2,2} = \frac{1}{2} D_1^{11,2} \qquad C_1^{3,3}= \frac{1}{2} D_1^{12,3}$$

$$C_2^{3,3}=\frac{1}{2}D_2^{12,3}$$

$$C_2^{1,1}=-C_1^{2,2} \qquad C_3^{1,1}=-C_1^{3,3} \qquad C_3^{2,2}=-C_2^{3,3}$$

$$C_1^{1,1}=0 \qquad C_2^{2,2}=0 \qquad C_3^{3,3}=0$$

اجزاء ماتریس [G] :

$$G_1 = m_1a_1C_{11} + m_2[a_1C_{11} + a_2 C_{12}] + m_3[a_1 C_{11} + a_2 C_{12} + a_3 C_{13}]$$

$$G_2 = m_2 a_2 C_{12} + m_3[a_2 C_{12} + a_3 C_{13}]$$

$$G_3 = m_3 a_3 C_{13}$$

بنابراین معادلات دینامیکی نهایی برابر است با :

$$\begin{Bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{12} & M_{22} & M_{23}\\ M_{13} & M_{23} & M_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\\ \ddot\theta_3\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^{1,2} & B_1^{1,3} & B_1^{2,3}\\ 0 & B_2^{1,3} & B_2^{2,3}\\ -B_2^{1,3} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot\theta_1\dot\theta_2\\ \dot\theta_1\dot\theta_3\\ \dot\theta_2\dot\theta_3\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C_1^2 & C_1^3\\ -C_1^2 & 0 & C_2^3\\ -C_1^3 & -C_2^3 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot\theta_1^2\\ \dot\theta_2^2\\ \dot\theta_3^2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}G_1\\ G_2\\ G_3\end{bmatrix}\{g\}$$

در جدول (۱) حجم محاسبات عددی مورد نیاز برای ایجاد ماتریسهای ضرائب مثال فوق (N=3) با روشهای لاگرانژ ـ اویلر، لاگرانژ ـ دالامبر [۱]، یک روش لاگرانژ بهینه شده [۳] و روش ارائه شده در این مقاله با یکدیگر مقایسه گردیده‌اند.

جدول (۱) مقایسه حجم محاسبات عددی

روش	لاگرانژ- اویلر	لاگرانژ- دالامبر	لاگرانژ بهینه‌شده	این مقاله
تعداد ضرب	۱۰۴۴۱	۸۶۸	۴۹۸	۹۴
تعداد جمع	۷۹۶۰	۶۲۸	۳۸۱	۴۳

۶ـ نتیجه‌گیری

در این مقاله فرم بسته‌ای از معادلات دینامیکی رباتهای صفحه‌ای ارائه شد. استفاده از روش شتابهای جزیی و تفکیک ترمهای شناخته شده شتاب، کمک قابل توجهی برای رسیدن به فرم بسته معادلات نموده است.

روش ارائه شده در مقایسه با روش لاگرانژ از محاسبات کمتری برخوردار می‌باشد و نسبت به مدلهای ارائه شده قبلی از راندمان بالاتری برخوردار می‌باشد. این راندمان بالا به دلیل حذف عملیات ماتریسی واسطه‌ای نظیر معکوس‌سازی، Trace و .... می‌باشد. همچنین در روش لاگرانژ به دلیل انجام عملیات ریاضی ماتریسی هزینه کامپیوتری بیشتری از نظر زمان ایجاد معادلات، امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری لازم می‌باشد. در حالی که معادلات دینامیکی ارائه شده بطور دستی قابل ایجاد می‌باشد.

مراجع

[1] *Fu, K.S., Gonzalez, R.C., Lee C.S.G., Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence, McGraw - Hill International Editions, 1987.*

[2] *Meghdari, A., "Dynamics Simulation Algorithms of Industrial Robots", Amir-Kabir, Journal of Science & Engineering, Vol. 4, No. 15, PP. 79-90, 1990.*

[3] Megahed, S., Renaud, M., "Minimization of the Computaion Time Necessary for the Dynamic Control of Robot Manipulators", Proceedings 12th International Symposium on Industrial Robots, 6th International Conferecne on Industrial Robtos Technology, June 9th- 11th, 1982. Paris, France. PP. 469-478.

[4] Renaud, M. "An Efficient Iterative Analytic Procedure for Obtaining A Robot Manipulator Dynamic Model", Robotics Reserch, ed. by M. Brady & R. Paul, PP. 479-769, MIT Press, Cambridge, 1984.

[5] Khatib, O., Burdick, J.W., "Dynamic Optimization in Manipulator Design: The Operational Space Approach", ASME Winter Annal Meeting, Miami, FL, November, 1985.

[6] Murray, J.J., Neuman, C.P., "ARM: An Algebraic Robot Dynamic Modeling Program", Proceedings of the 1994 International IEEE Conference on Robotics, Atlanta, GA, March 13-15, 1984, PP. 115-120.

[7] Burdick, J.W., "An Algorithm for Generation of Efficient Manipulator Dynamic Equations". Proceedings IEEE Conference on Robotics and Automations San Francisco, PP. 212-218 April 1986.

[8] Meghdari, A.,"Conceptual Design and Characteristics of A Dual Arm Cam-Lock Mamipulator". Proceedings of the ASCE SPACE-94 Conference on Robotics for Challenging Environments, Feb. 28-March 3, 1994, PP. 140-148, Albuquerque, N.M, USA.

[9] Craig, J.J., Introduction to Robotics: Mechanics and Control, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1986.

[10] Kane, T.R., Levinson, D.A., "The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics". The International Journal of Robotics Reserch, Vol. 2, No. 3, PP. 3-20, Fall 1983.

[11] Kane, T.R., Levinson, D.A., "Dynamics: Theory and Applications. McGraw - Hill Book Co. 1985.