مدلسازی جدول

عقیل فرهاد خانی

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

سیدکمال الدین نیکروش

استاد دانشکده مهندسی برق
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده:

هدف این مقاله مدلسازی یك جدول به صورت معادلات حالت می باشد. (در مورد مفهوم جدول به متن مراجعه کنید.) مطالب مورد بحث به دو بخش قابل تقسیم هستند: ابتداء به شکل دهی ریاضی مسأله (فرموله کردن آن) پرداخته و سپس در جهت به دست آوردن معادلات حالت حاکم بر جدول، اقدام شده است. جدول به صورت یك سیستم گسسته، شامل دو مجموعه از اشیاء در نظر گرفته شده است: عنصرها و خانه ها. ورودی یا ورودی ها موجب حرکت عناصر در خانه ها می شوند. برای این سیستم دو مدل معرفی شده است. یکی یك بعدی و دیگری دو بعدی. در انتها مزایای مدل دو بعدی نسبت به مدل یك بعدی، ذکر شده است.

Puzzle Modelling

Aghil Farhadkhani

M. Sc. student
Amirkabir University of Technology

S. Kamaleddin Nikravesh

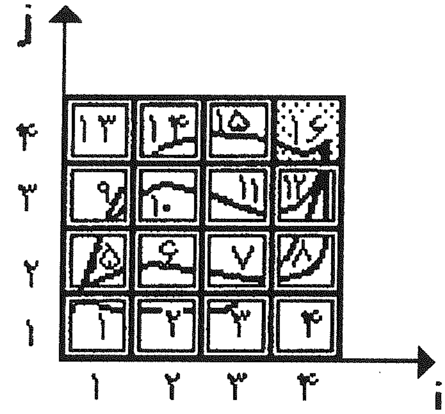
Proffesor of Electrical Engineering
Amirkabir University of Technology

Abstract:

The purpose of this paper is to model a puzzle game in form of state equations. The discussed subjects can be divided into two parts. First, the mathematical formulation of the problem will be presented. Second, the dominant state equations on the puzzle will be derived. The puzzle is considered to be a discrete system consisting of two sets of objects, namely elements and cells. The input(s) move(s) the element through the cells. This system is modeled in two different ways, ie a one dimentional model and a two dimentional model. Finally, the advantages of the 2D model compared with the 1D will be discussed.

۱ـ مقدمه

منظور از جدول[1] وسیله ای است که شبیه یک جدول ساخته شده و به عنوان یک وسیله سرگرمی مورد استفاده قرار می گیرد. این وسیله از یک مستطیل یا مربع تشکیل شده است که در آن مربعهای کوچکتری وجود دارند که در کنار یکدیگر قرار گرفته و قابل جابجا شدن می باشند. ما این مربعهای کوچکتر را عنصر[2] می نامیم.



شکل (۱)

صفحه مستطیل یا مربع شکلی را که عناصر روی آن قرار گرفته اند، می توان به طور فرضی تقسیم بندی نمود. (شبیه شکل ۱). برای این کار دو محور j و i را در نظر گرفته و هرقسمت آنها را شماره گذاری می کنیم. هر خانه را با دو عدد نشان می دهیم، پس ما برای جدول دو مجموعه از اشیاء در نظر گرفتیم: یک سری عنصر (که مربع های قابل حرکت می باشند) و یک سری خانه (که تقسیم بندی صفحه زیر مربع ها می باشد). تعداد عناصر یکی کمتر از تعداد خانه هاست و همین امر است که امکان حرکت و جابه جا شدن عناصر را در خانه ها فراهم می کند. برای این جای خالی عنصر، می توان یک وجود فرضی تصور کرد. اسم این شیء را حفره[3] می گذاریم. عناصر را شماره گذاری می کنیم. نحوه شماره گذاری را به این نحو در نظر می گیریم که فرض می کنیم، عناصر در خانه های اصلی خود قرار دارند. آنگاه عناصر را از گوشه سمت چپ به سمت راست تا آخر ردیف اول شماره گذاری می کنیم و سپس به همین نحو در مورد ردیف دوم عمل می کنیم و بقیه را هم به همین ترتیب ادامه می دهیم. (شبیه شکل۱)

خانه اصلی مربوط به حفره در یکی از گوشه های جدول در نظر گرفته می شود. در این مقاله جای اصلی حفره در گوشه بالا و سمت راست جدول در نظر گرفته شده است. بر روی عناصر شکلی کشیده شده است (یا اعدادی نوشته شده است، این اعداد از یک شروع می شود و به تعداد عناصر موجود در جدول است،) که اگر هر عنصر در خانه خود قرار گیرد، این شکل مرتب خواهد شد. منظور از این بازی در شکل امروزی آن معمولاً همین است که شکل مرتب شود. جدول در سال ۱۸۷۰ معرفی شده است. شکل اولیه بازی این بوده است که عناصر را چنان جابجا کنیم که تمام عناصر در جای اصلی خود قرار گیرند بجز دو عنصری که در ردیف خانه اصلی مربوط به حفره و در کنار آن در شکل مرتب شده جای می گیرند. این دو عنصر باید در خانه مربوط به دیگری قرار گیرند. در سال ۱۸۷۹ نشان داده شده است که این وضعیت ممکن نیست صورت گیرد [۱ و ۲]. از زمان معرفی جدول (بیش از ۱۲۰ سال پیش) تا کنون مقالات متعددی در مورد جدول نوشته شده است [۳ و ۴]. همچنین در کتابهای درسی هوش مصنوعی، اغلب مسأله جدول به صورت یکی از مثالهای معمولی مورد بررسی قرار می گیرد [۵].

هدف از این مقاله در نظر گرفتن این وسیله به عنوان یک سیستم گسسته و نوشتن معادلات حالت آن می باشد.

۲ـ شرح روش مدلسازی

در حالت کلی فرض می کنیم ابعاد جدول $I \times J$ باشد و تعداد $m=I.J$ عنصر (با در نظر گرفتن حفره) داشته باشیم. به ازای هر عنصر دو متغیر حالت در نظر می گیریم (البته برای حفره هم همین طور) مثلاً برای جدول (شکل ۱) ۳۲ متغیر حالت درنظر می گیریم. به نحو زیر:

برای عنصر اول	$i_1(n), j_1(n)$
برای عنصر دوم	$i_2(n), j_2(n)$
⋮	⋮
برای عنصر شانزدهم	$i_{16}(n), j_{16}(n)$

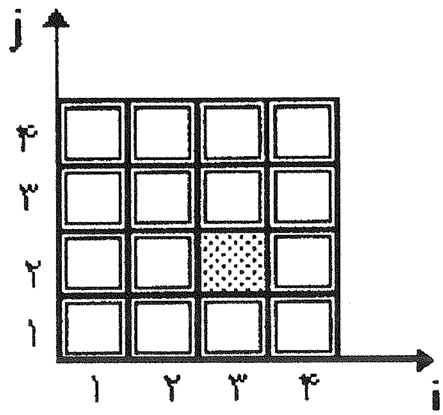
متغیر $i_k(n)$ ستونی را که عنصر kام در مرحله nام در آن قرار دارد و متغیر $j_k(n)$ سطری را که عنصر kام درمرحله nام در آن قرار دارد مشخص می کند.

j و i مربوط به حفره را که عنصر آخر در شماره گذاری ما می باشد (در این مثال، عنصر ۱۶) با i_p و j_p نشان می دهیم (بنابراین در حالت کلی $i_p=i_m$ و $j_p=j_m$). در رابطه با حرکت

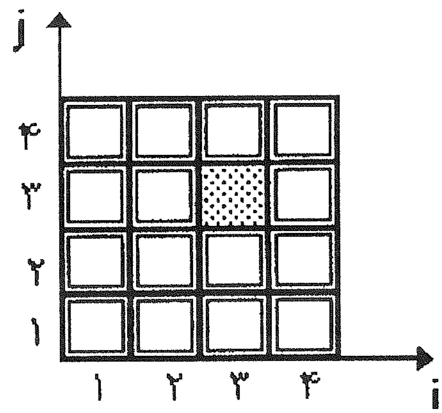
عناصر در خانه ها باید به نکات زیر توجه کرد:

الف- تنها عناصری که در کنار حفره قرار گرفته اند می توانند جا بجا شوند.

ب- می توان در نظر گرفت که به جای عناصر واقعی، حفره حرکت می کند. مثلاً در (شکل ۲) مشاهده می کنیم عنصری که در خانه j=۲ و i=۳ بوده است به خانه (۳ , ۲) رفته است.



الف) وضعیت جدول در مرحله n ام



ب) وضعیت جدول در مرحله (n+1) ام

(شکل۲)

لیکن می توان تصور کرد که حفره از خانه (۳ , ۲) به خانه (۳ , ۳) رفته است. یا در حالت کلی، حرکت حفره از خانه (i,j) به خانه (i + 1,j) در واقع به معنی حرکت عنصری است که در (i+1,j) بوده است و به خانه (i,j) رفته است. شبیه همین مطلب در مورد تغییر در j هم صادق است.

ج- با توجه به دو نکته فوق می توان تصور کرد که ورودی (عامل جابجائی عناصر در خانه ها) فقط* به حفره وارد می شود. این حرکت به صورتی خواهد بود که به متغیر i یا j حفره، یکی بیافزاید یا یکی از آن کم کند. بنابراین ما دو ورودی در نظرمی گیریم، u_i و u_j. این دو ورودی می توانند این مقادیر را اختیار کنند.

$$u_i = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

و

$$u_j = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

(توجه می کنیم که همواره یا u_i صفر است یا u_j یا هردو)

$u_i=1$، حرکت حفره به سمت راست (→) و $u_i=-1$، حرکت حفره به سمت چپ (←) و $u_j=1$ حرکت حفره به سمت بالا (↑) و $u_j=-1$، حرکت حفره به سمت پایین (↓) را موجب می شود.

د- حرکت عناصر محدود است. به این معنی که از چهار چوب جدول نمی توانند خارج شوند. بنابراین متغیرهای i و j در هر مرحله باید در شرایط زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} i_k(n) \in Z,\ 1 \le i_k(n) \le I \\ j_k(n) \in Z,\ 1 \le j_k(n) \le J \qquad K = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

مثلاً در مورد شکل (۱) می توان نوشت:

$$i_k(n) \in \{1, 2, 3, 4\},\ j_k(n) \in \{1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین ورودی ها نمی توانند i و j ای خارج از مجموعه های داده شده فوق تولید کنند.

هـ- برای نوشتن معادلات حالت، ابتدا می گوییم: هنگامی که ورودی به حفره وارد می شود، موقعیت برخی از عناصر تغییر نخواهد کرد. در حالت کلی مطمئن هستیم عناصری که در کنار حفره نبوده اند، جای آنها تغییر نمی کند. یعنی:

$$i_k(n+1)=i_k(n) \qquad \text{و} \qquad j_k(n+1)=j_k(n)$$

اما عناصری که در کنار حفره بوده اند، اگر به حفره ورودی u_i اعمال شده باشد، یکی از این سه حالت برای آنها اتفاق می افتد:

$$i_k(n+1) = i_k(n) + \begin{cases} +1 & \text{حالت اول} \\ -1 & \text{حالت دوم} \\ 0 & \text{حالت سوم} \end{cases}$$

حالت اول، هنگامی است که $u_i(n)=-1$ و عنصر kام در مرحله nام در سمت چپ حفره قرار داشته باشد.

حالت دوم، هنگامی است که $u_i(n)=1$ و عنصر kام در مرحله nام در سمت راست حفره قرارداشته باشد.

حالت سوم، هنگامی است که عنصر kام در مرحله nام در بالا یا پایین حفره قرار داشته باشد. $(j_p \neq j_k)$

با توجه به نکات فوق معادله تفاضلی زیر پیشنهاد می گردد:

$$i_k(n+1) = i_k(n) + \delta(j_k(n)-j_p(n))\,\delta(u_i(n)-(i_k(n)-i_p(n)))\,\delta(1-(|u_i(n)|+|u_j(n)|))\,(-u_i(n)) \qquad (۱)$$

$$1 \le i_k \le I \qquad \text{و} \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1$$

δ نشانه تابع دلتای کرونکر است که مقدار آن در صفر، ۱ و در سایر جاها، صفر می باشد.

ضریب $\delta(j_k(n)-j_p(n))$ در نظرگرفته شده است تا نشان دهد که شرط لازم برای تغییر مقدار $i_k(n)$ این است که $j_k(n)=j_p(n)$ یا به تعبیر دیگر، تنها مقدار i در عنصرهایی که با حفره در یک ردیف قرار گرفته باشند، می تواند تغییر کند.

ضریب $\delta(u_i(n)-i_k(n)-i_p(n))$ در نظرگرفته شده است تا نشان دهد که اگر $u_i(n)$ به سمت راست وارد شود (به عبارت دیگر مقدارآن ۱ باشد) تنها مقدار عنصر سمت راست حفره می تواند تغییر کند و اگر مقدار $u_i(n)=-1$ باشد، تنها عنصر سمت چپ حفره می تواند تغییر کند.

ضریب $\delta(1-(|u_i(n)|+|u_j(n)|))$ برای بیان این مسأله در نظر گرفته شده است که فقط حالتی مجاز است که حداکثر یکی از u_i و u_j غیر صفر باشد.

با بحث مشابه می توان رابطه تفاضلی زیر را برای j در نظر گرفت (یا می توان به سادگی در رابطه قبل جای i وj را عوض کرد):

$$j_k(n+1) = j_k(n) + \delta(i_k(n)-i_p(n))\,\delta(u_j(n)-(j_k(n)-j_p(n)))\,\delta(1-(|u_i|+|u_j|))(-u_j(n)) \qquad (۲)$$

$$1 \le j_k \le J \qquad \text{و} \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1$$

معادلات (۱) و (۲) برای همه kها جز آخری یعنی i_p و j_p صادق هستند، اکنون معادلات تفاضلی این دو متغیر را می نویسیم:

$$i_p(n+1) = i_p(n) + \delta(1-(|u_i(n)|+|u_j(n)|))\,u_i(n) \qquad (۳)$$

$$1 \le i_p \le I$$

$$j_p(n+1) = j_p(n) + \delta(1-(|u_i(n)|+|u_j(n)|))\,u_j(n) \qquad (۴)$$

$$1 \le j_p \le J$$

۳- بررسی مدل فوق

در مدلسازی بالا، به نظر می رسد نکات حل نشده ای وجود دارد.

الف- مشکل مرزها

در هر چهار معادله ممکن است ورودی موجب خروج i یا j از مقادیر مجاز آنها شود. هیچیک از معادلات نمی توانند مانع این مسأله شوند و به ناچار، به گذاشتن شرطهای قیدی در کنار معادلات اکتفا شده است.

ب- بالاخره ورودی به حفره وارد می شود یا به همه عناصر؟

در شرح روش مدلسازی گفته شده است: تصور می کنیم که ورودی ها فقط به حفره وارد می شوند، در صورتی که در هر چهار معادله فوق، ورودی وجود دارد.

ج- آیا تعداد متغیرهای حالت حداقل است؟

با توجه به فیزیک مسأله ، می دانیم که اگراز موقعیت (m-1) عنصر مطلع باشیم، جای تک عنصر باقیمانده را می توان مشخص کرد. بنابراین تعداد حداقل متغیرهای حالت m-1 است. حالا در معادلات، چگونه می توان، معادله یکی از عناصر را بر حسب دیگران نوشت؟

با توجه به اشکالات فوق، ببینیم اگر مسأله را به صورت یک سیستم دو بعدی (که با طبیعت مسأله نیز سازگارتر است) مدل کنیم، نتیجه چه خواهد شد.

۴- مدل دو بعدی جدول

به هر عنصر، یک متغیر که یک زوج مرتب است (یک بردار سطری ۲×۱) نسبت می دهیم:

$$e_k(n) = (i_k(n), j_k(n)) \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

باز هم عنصر آخری را حفره می گیریم:

$e_m = e_p$

$e_k(n)$ یعنی موقعیت عنصر kام در مرحله nام و تعریف $i_k(n)$ و $j_k(n)$ همان است که پیش از این گذشت. پس در واقع مجموعه‌ای از توابع (m تابع)، $e_k(n)$ با خصوصیات زیر مطرح می‌شوند:

$n \to (i,j) \qquad 1 \le i \le I$ و $1 \le j \le J$

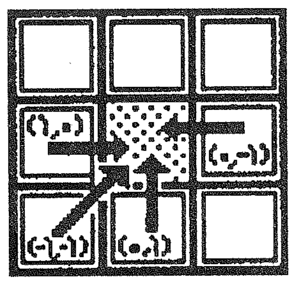
$Z \to Z^2$

برای مدل دو بعدی در نظر گرفتن تنها یک ورودی کافی است: $u(n)=(u_i(n), u_j(n))$ در این مدل، فرض می‌کنیم که ورودی به عناصر وارد می‌شود نه به حفره.

ورودی تنها یکی از پنج مقدار زیر را می‌تواند قبول کند:

جهت حرکت عنصر	مقدار ورودی
→	(۱ ، ۰)
←	(-۱ ، ۰)
↑	(۰ ، ۱)
↓	(۰ و -۱)
	(۰ ، ۰)

برای به دست آوردن یک رابطه که موقعیت عناصر را در مرحله n+1، $e_k(n+1)$ را برحسب موقعیت آنها در مرحله $e_k(n)$,n و ورودی اعمالی، $u(n)$ به ما بدهد، بین هر عنصر و حفره در مرحله n یک بردار هندسی در نظر می‌گیریم که ابتدای بردار روی عنصر kام و انتهای آن روی حفره باشد. مشخصات این بردار $e_k(n)-e_p(n)$ خواهد بود. شکل (۳) را ببینید.



شکل (۳)

دقت می‌کنیم که ورودی روی عنصری اثر می‌کند که بردار مربوط به آن هم‌راستا، هم اندازه و هم‌جهت با ورودی باشد.

یعنی:

$$e_k(n) - e_p(n) = u(n)$$

یا

$$e_k(n) - e_p(n) - u(n) = 0$$

یا

$$\delta(e_k(n) - e_p(n) - u(n)) = 1$$

در این صورت موقعیت این عنصر در لحظه n+1 از اضافه کردن مقدار ورودی به موقعیت عنصر در لحظه n حاصل می‌شود.

یعنی:

$$e_k(n+1) = e_k(n) + \delta(e_k(n) - e_p(n) - u(n))\, u(n) \qquad (۵)$$

$k=1, 2, \ldots, m-1$

در این رابطه δ تابع کرونکر دو بعدی است:

$$\delta(l,k) = \begin{cases} 1 & l=k=0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(m-1) معادله مربوط به رابطه (۵) در واقع معادلات حالت سیستم گسسته هستند.

اینک نشان می‌دهیم که موقعیت حفره را می‌توان بر حسب موقعیت بقیه عناصر در هر مرحله بیان کرد. بنابراین نیازی به در نظر گرفتن موقعیت حفره به عنوان متغیر حالت نمی‌باشد.

برای پیدا کردن موقعیت حفره در هر لحظه می‌گوییم:

در هر لحظه تمام خانه‌های جدول جز یکی (حفره) پر است. پس اگر iهای همه عناصر را در هر مرحله با هم جمع کنیم (حفره را هم در نظر بگیریم)، همواره این حاصل جمع مقدار ثابتی خواهد بود برابر با $\frac{JI(I+1)}{2}$.

برای به دست آوردن مجموع iهای عناصر در یک ردیف، باید مقدار I+...+2+1 را حساب کرد که مقدار $\frac{I(I+1)}{2}$ را دارد. اگر این مقدار را برای تمام سطرها حساب کنیم مقدار $\frac{JI(I+1)}{2}$ حاصل خواهد شد.

$$\sum_{k=1}^{m} i(n)=\frac{JI(I+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} i_k(n)+i_p(n)=\frac{JI(I+1)}{2}$$

$$i_p(n)=\frac{JI(I+1)}{2}-\sum_{k=1}^{m-1} i_k(n) \qquad (۶)$$

با استدلال مشابه به رابطه

$$j_p(n)=\frac{JI(J+1)}{2}-\sum_{k=1}^{m-1} j_k(n) \qquad (۷)$$

خواهیم رسید. (یا کافی است در رابطه (۶) جای I,i و J را با J,j و I عوض کنیم) بنابراین موقعیت حفره را می توان چنین حساب کرد:

$$\begin{aligned} e_p(n) &= (i_p(n), j_p(n)) \\ &= \left(\frac{JI(I+1)}{2}-\sum_{k=1}^{m-1} I_k(N), \frac{JI(J+1)}{2}-\sum_{k=1}^{m-1} j_k(n)\right) \\ &= \left(\frac{JI(I+1)}{2}, \frac{JI(J+1)}{2}\right)-\sum_{k=1}^{m-1} e_k(n) \end{aligned} \qquad (۸)$$

به عنوان متغیرهای خروجی، تمام متغیرهای حالت به همراه متغیر مربوط به موقعیت حفره، e_p را در نظر می گیریم.

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{m-1} \\ \cdots \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(m-1)(m-1)} \\ \cdots\cdots \\ -1\ -1\ \cdots\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0\ ,\ 0) \\ (0\ ,\ 0) \\ \vdots \\ (0\ ,\ 0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{JI(I+1)}{2}, \frac{JI(J+1)}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad (۹)$$

۵- بررسی مدل دو بعدی

در مورد مدل فوق نکات زیر قابل طرح هستند:

الف- با توجه به معادله حالت (۵)، مشاهده می کنیم که حالت بعدی هر عنصر بستگی به ورودی و موقعیت قبلی عنصر نسبت به حفره دارد. (به عبارت دیگر، بستگی به ورودی، موقعیت قبلی عنصر و موقعیت قبلی حفره دارد.)

ب- بر خلاف مدل یک بعدی، تعریف رز دیگر ضرورتی ندارد. i و j هیچ گاه از مقادیر مجاز خود، در مورد تمام عنصرها، بیرون نمی روند. تنها کافی است، شرط اولیه در محدوده جدول باشد. (این خاصیت، خاصیت جالبی است که برای ملاحظه بیشتر آن می توان به رابطه (۵)، طریقه به دست آوردن آن و توجه به بردارهایی که در این رابطه در نظر گرفته شده، دقت نمود.)

ج- در این مدل نسبت به مدل یک بعدی، تعداد ورودی ها نصف شده است و تعداد متغیرهای حالت نیز به بیش از نصف کاهش پیدا کرده است. هر چند ممکن است بگوییم در مقابل ابعاد سیستم دو برابر شده است، اما به نظر می رسد، وضعیت جدید سهولت بسیاری را ایجاد کرده است.

د- معادلات نسبت به حالت قبل، از سادگی بیشتر و تطبیق بهتر با فیزیک مسأله، بهره می برند.

هـ- معادلات حالت، مجدداً غیر خطی هستند.

۶- نتیجه گیری

ابتدا به مسأله شکل دهی ریاضی لازم داده می شود، سپس یک مدل یک بعدی معرفی می شود که هر چند از عهده توصیف مسأله بر می آید اما مشکلاتی را حل نشده باقی می گذارد. با توجه به مدل یک بعدی، یک مدل دو بعدی ارائه می شود که محاسن مدل یک بعدی را با خود دارد ولی مشکلات آن را خیر. در مدل نهایی، معادلات حالت، گسسته، دو بعدی، غیر خطی و غیر متغیر با زمان می باشند.

۷- پانویس:

1- Puzzle 2- Cell 3- blank

منابع:

[1]. Wm. Woolsey Johnson, l Notes on the "15" Puzzle, I, Amer. J. Math.2 (1879) 397-399.

[2]. W. E. Story, Notes on the "15" puzzle, II, Amer. J. Math. 2 (1879), 399-404.

[3]. Edward Hordenrn, sliding piece puzzles, Oxford University Press, Oxford,1986.

[4]. Sprincer P. Hard and David A. Trautman, The knight's Tou on the 15-Puzzle, Mathematics Magazine, June 1993, 159-166.

[5]. Nils J. Nillson, Problem-Solving Methods in Artficial Intelligence, McGrow-Hill, 1971.