

آنالیز دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع به روش انتگرالهای مرزی

امیررضا خوئی

امیر مسعود کی نیا

مریی دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشیار دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده:

مطالعه پدیده‌های شبه استاتیکی در محیط‌های متخلخل اشباع از آب نظیر تحکیم در خاکها در چند دهه اخیر صورت گرفته است، اما کاربرد آنالیز محیط‌های متخلخل اشباع تحت انتشار موج در بررسی رفتار سدهای خاکی، طراحی پی‌های ماشین، پدیده‌های روانگونی و مسائل اثر متقابل خاک - سازه، اهمیت تحقیق و بررسی مسأله را در حالت دینامیکی ایجاب می‌کند. رفتار چنین محیط‌هایی به علت وجود دو فاز جامد و مایع، در بردارنده اثرات اینرسی ناشی از شتاب توده جرم خاک و شتاب جرم مایع که دارای مؤلفه‌های جابجائی مستقل از یکدیگرند، می‌باشد. مطالعات اولیه معطوف به آنالیز مسأله در حالت شبه استاتیکی یعنی با صرف نظر از اثرات اینرسی بوده، ولی با توجه به اهمیت مسأله تحقیقات دامنه‌داری توسط محققین در این زمینه انجام شده که نهایتاً منجر به تعیین معادلات دیفرانسیل ممزوج محیط‌های متخلخل اشباع با استفاده از معادلات بنیادی، داری، ممنوم و پیوستگی توسط بیو شد. حل این معادلات ممزوج به روش انتگرالهای مرزی و سپس کاربرد روش المان مرزی برای حل مسائل مختلف از جمله اهداف این مقاله می‌باشد.

در این مقاله بر اساس فرمول بندی مستقیم انتگرال مرزی، معادلات انتگرالی محیط‌های متخلخل اشباع را با کاربرد تکنیک باقیمانده وزنی بر کوپل معادلات دیفرانسیل بیو به دست آورده، سپس با انتگرال گیری جزء به جزء این معادلات، دو دسته معادلات انتگرالی شامل انتگرالهای روی کل میدان و انتگرالهای روی مرز سیستم حاصل می‌شود. حل اساسی یا توابع گرین به فرمی تعیین می‌شود که انتگرالهای روی میدان را حذف کرده و معادله انتگرالی که فقط مرزهای سیستم را شامل شود، باقی می‌ماند، حل معادله انتگرال مرزی فوق به روش عددی با استفاده از توابع گرین ومحاسبه توابع تنش نظیر آنها در روش المان مرزی صورت می‌گیرد. با المان بندی سیستم در محلهایی که دارای خواص فیزیکی متفاوت است، کمیت‌های مجهول گره‌های مرزی که شامل تغییر مکانها و فشار آب منفذی و یا بردارهای تنش و دبی خروجی بوده، به صورت عددی ارزیابی می‌شود.

Dynamic Analysis of Fluid-Saturated Porous Media by Boundary Integral Method

A.R. Khoee, M. Sc.

A.M. Kaynia, Ph. D.

Lecturer Dept. of Civil Eng.
Isfahan Univ. of Tech.

Associate Prof. Dept. of Civil Eng.
Sharif Univ. of Tech.



Abstract:

Dynamic poroelasticity has applications in numerous branches of science and engineering, including geophysics, biomechanics and earthquake engineering. This paper presents a two-dimensional boundary element formulation for the steady-state dynamic analysis of fluid-saturated porous media. The governing equations of the medium are derived by applying the Fourier transform to Biot's equations of dynamic poroelasticity and replacing the fluid displacements by the fluid pressure. The boundary integral formulation is obtained through the application of the weighted residual method to the governing equations of the medium. The fundamental solutions pertaining to this formulation, which define the solid displacement field and the fluid pressures due to point forces in the solid and a point source in the fluid, are obtained by a procedure developed by Kupradze. The boundary element model is next used to obtain impedance functions of a strip footing bonded to a fluid-saturated porous half plane. The effect of the soil permeability on the variation of the impedance functions is also examined.

مقدمه

نمایش داده می شود با استهلاک کم و موج طولی دوم (P_2) با استهلاک زیاد انتشار می یابند.

پس از ارائه معادلات دینامیکی محیطهای متخلخل الاستیک توسط بیو، تحقیقات برای تعیین حل اساسی^۳ این کوپل معادلات دیفرانسیل آغاز شد. دسته ای از حل ها با حفظ شکل کلی معادلات دیفرانسیل بیو، بر اساس فرمول بندی $u-w$ صورت گرفت. عده ای دیگر از محققین برای تعیین حل معادلات از فرم $u-p$ که در آن متغیرهای اساسی مسأله تغییر مکان فاز جامد و فشار آب منفذی است، استفاده کردند. در این مقاله نیز به منظور کاربرد روش انتگرال مرزی استفاده از این فرم مناسب تر می باشد.

حلهایی اساسی برای حالت شبه استاتیکی توسط کلری [۱۰] و مراحل اصلاحی آن توسط رود نیکی [۱۴] ارائه شد. در حالت دینامیکی مسأله، برای شرایطی که نیرو بر روی محیط نیم فضا^۱ اعمال می شود، حلهایی توسط پل [۱۳] و همچنین توسط هالپرن و کریستیان [۱۱] به دست آمد. در هر صورت این طور به نظر می رسد که اولین گام در تعیین حل اساسی برای یک محیط متخلخل الاستیک نامحدود (تمام فضا^۲) توسط بوریچ و وارگاس [۸] با استفاده از روش نقطه زینی^۳ برداشته شده، و بر اساس آن جابجایی های فواصل دور در اثر اعمال بار در نقطه ای از توده جامد قابل محاسبه می باشد. در پی تحقیقات انجام شده در این زمینه، نهایتاً حلهای اساسی معادلات بیو توسط کی نیا [۱۲] با تکنیک تبدیل لاپلاس و فرمول بندی معادلات بر اساس $u-p$ برای تعیین جابجایی میدان محیط اشباع، هنگامی که بارهای نقطه ای در فاز جامد و مایع اثر می کند، به دست آمد. کاربرد آنالیزهای عددی در حل معادلات دیفرانسیل

آنالیز دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع از مایع دارای کاربردهای متعددی در شاخه های مختلف علوم و مهندسی نظیر ژئوفیزیک، زلزله شناسی، مهندسی ساختمان و مکانیک می باشد. جریان آب در ژئومکانیک، رفتار سدهای خاکی واقع بر روی بستر سنگی یا محیط خاکی اشباع در برابر خطوط جریان آب در داخل سد، بررسی اثر متقابل خاک-پی در مطالعه عکس العمل دینامیکی پی های صلب واقع بر محیط متخلخل اشباع که از عوامل مهم در طراحی پی های ماشین بوده، تحت پدیده های گذرا نظیر زلزله، بارهای ارتعاشی و ... تماماً مبین اهمیت تحلیل و بررسی دقیق دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع است.

معادلات مربوط به اثر توأم محیط جامد و مایع برای پدیده های شبه استاتیکی توسط بیو [۲] در ۱۹۴۱ ارائه شد. حالت شبه استاتیکی مسأله که در ژئومکانیک تحت عنوان تحکیم^۱ شناخته شده، موضوع مورد بررسی طی سالیان متمادی بوده است. در آنالیزهای شبه استاتیکی با صرف نظر از اثرات اینرسی، فقط پدیده نفوذ^۲ مورد توجه قرار می گرفت. علیرغم آن، اهمیت اثرات اینرسی در هر دو فاز جامد و مایع و کاربردهای ذکر شده، حل مسأله را به صورت دینامیکی ضروری می نمود. پس از آن، تئوری انتشار^۳ بعدی موج در محیط اشباع در سالهای ۱۹۵۶ و ۱۹۶۲ توسط بیو ارائه شد. بیو [۳ و ۴] با فرض یک انرژی پتانسیل برای محیط متخلخل اشباع و استفاده از معادلات لاگرانژ، معادلات دیفرانسیل ممزوج که حاکم بر حرکات فازهای جامد و مایع محیط است را به دست آورد (مدل $u-w$). بر طبق این تئوری، تحت یک اغتشاش دینامیکی، دو موج طولی و یک موج برشی در محیط بوجود می آیند. موج طولی اول که با P_1

محیطهای متخلخل اشباع، برای اولین بار با استفاده از روش المانهای محدود توسط محققینی نظیر زینکوویچ و شیومی [۱۵ و ۱۹] صورت گرفته است. در این مقاله برای حل این معادلات از روش انتگرال مرزی جهت فرموله کردن معادلات انتگرال مرزی و در ادامه برای حل عددی مسأله از روش المان مرزی استفاده می شود. اهمیت روش المان مرزی نسبت به روش المان محدود در بررسی محیطهای بی نهایت ویا نیمه بی نهایت در آن است که، علیرغم کاربردهای متعدد روش المان محدود، عدم قابلیت صحیح در مدل‌هایی از یک محیط خاکی نامحدود تحت انتشار موج در آن، راه‌های تقریبی را برای این دسته از مسائل در بر دارد. اخیراً، بسکوز و همکاران [۹] با استفاده از روش المان مرزی مسأله محیطهای متخلخل اشباع را به صورت عددی مورد بررسی قرار داده اند. در این تئوری فرمول بندی مسأله بر اساس فرضیاتی پایه گذاری شده، در حالیکه روش ارائه شده در این مقاله مبتنی بر تئوری ریاضی با کاربرد تکنیک باقیمانده وزنی بر معادلات دیفرانسیل بیو و استفاده از توابع گرین در حل معادلات انتگرال مرزی می باشد.

معادلات حاکم بر محیطهای متخلخل اشباع

در اینجا معادلات محیطهای متخلخل که ابتدا توسط بیو [۳ و ۴] برای توده جامد الاستیک اشباع شده توسط مایع و سپس توسط زینکوویچ [۱۹] برای محیطهای با فاز جامد غیر خطی به دست آمده است، ارائه می شود. لازم است توجه شود که مسأله فقط برای مواد خطی تحت تغییر شکلهای کوچک فرموله شده است، گرچه این تئوری قابل گسترش به مسائل غیر خطی نیز می باشد.

اگر جابجائی کل میدان توسط جابجائی توده جامد u و جابجائی متوسط مایع نسبت به جامد w تعریف شود و فشار مایع منفذی با p نمایش داده شود، معادلات اساسی حاکم بر محیط عبارتند از:

(الف) معادله بنیادی

$$\sigma = D \cdot e - \alpha \cdot p \cdot I_1 \quad (1)$$

که در آن σ تنش کل^۶، e تغییر شکل نسبی فاز جامد، D ماتریس سختی مواد در حالت زهکشی شده، $I_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ و α از پارامترهای مواد بیو می باشند.

ب) معادلات حرکت مربوط به مخلوط جامد-مایع (معادله ممنتوم)

$$L^T \sigma + f \cdot \delta(x) = \rho \cdot \ddot{u} + \rho_f \cdot \dot{w} \quad (2)$$

که در آن جمله $f \cdot \delta(x)$ معرف یک نیروی متمرکز در مبداء مختصات و عبارات \ddot{u} و \dot{w} به ترتیب معرف شتاب توده جامد و شتاب مایع می باشد. در معادله بالا ρ چگالی مخلوط جامد و مایع بوده و رابطه آن با چگالی مایع ρ_f و چگالی توده جامد ρ_s به صورت $\rho = (1-n) \cdot \rho_s + n \cdot \rho_f$ است که در آن n معرف تخلخل محیط می باشد.

(ج) معادله عمومی داریسی

$$\nabla p = -\frac{\gamma}{k} \dot{w} - \rho_f \cdot \ddot{u} - m \cdot \dot{w} \quad (3)$$

که در آن k ضریب نفوذپذیری محیط و m پارامتر جرم بوده و معادل ρ_f/n می باشد.

(د) معادله پیوستگی

$$\nabla \dot{w} = -\alpha \nabla \cdot \dot{u} - \frac{1}{Q} \dot{p} + q \cdot \delta(x) \quad (4)$$

جمله اول در طرف دوم معادله فوق معرف اثر انبساط توده جامد است. در جمله دوم Q معرف اثر فشارپذیری مرکب دانه های جامد و مایع بوده و جمله سوم نیز معرف تزریق مایع در واحد حجم با سرعت تزریق q به داخل سیستم است. پارامترهای α و Q عبارت است از:

$$\alpha = 1 - K_d/K_s \quad , \quad \frac{1}{Q} = \frac{n}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K_s} \quad (5)$$

که در آن K_f و K_s به ترتیب مدول حجمی مایع و دانه جامد و K_d مدول حجمی توده جامد (مدول حجمی زهکشی شده) می باشد.

معادلات بالا در مسائل محیطهای اشباع معتبر بوده و برای هر دو پدیده رفتار استاتیکی و دینامیکی قابل کاربرد است. به منظور تعیین سیستم معادلاتی که فقط بر حسب جابجائی های u_i و فشار منفذی p باشد (مدل $u-p$)، می توان از تبدیل لاپلاس معادلات فوق استفاده کرده و w_i را بین آنها حذف کرد. با نمایش تبدیل یافته جابجائی و فشار منفذی به ترتیب با u_i و p که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_1^2 - \rho_1 S^2 & (\lambda + \mu) \cdot D_1 D_2 & -\alpha_1 D_1 \\ (\lambda + \mu) \cdot D_2 D_1 & \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_2^2 - \rho_1 S^2 & -\alpha_1 D_2 \\ -\alpha_1 S \cdot D_1 & -\alpha_1 S \cdot D_2 & \xi\Delta - \frac{S}{Q} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{U}_j = \{\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{p}\}^T, \quad \bar{B}_j = \{\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \bar{q}\}^T \quad (12)$$

در عبارت فوق $D_i = \partial/\partial x_i$ و Δ معرف لاپلاسیان می باشد. برای هر معادله دیفرانسیلی همواره می توان فرم انتگرالی (تغییراتی) نوشت. در اینجا با استفاده از تکنیک باقیمانده وزنی "معادله دیفرانسیل (۱۰) به یک معادله انتگرالی تبدیل می شود. بدین ترتیب که با معرفی تانسور وزنی V_{ik}^* ، عبارت باقیمانده وزنی در میدان v برای معادله (۱۰) به فرم زیر نوشته می شود.

$$\int_v (L_{ij} \cdot \bar{U}_j - \bar{B}_i) \cdot V_{ik}^* \cdot dv = 0 \quad (13)$$

با جایگذاری L_{ij} در معادله انتگرالی (۱۳) و سپس با دو بار انتگرال گیری جزء به جزء روی میدان v از این عبارت انتگرالی نتیجه زیر به دست می آید [۲۰]

$$\int_v (l_{ij} \cdot V_{jk}^*) \cdot \bar{U}_i \cdot dv + \int_s (\bar{\tau}_\alpha \cdot V_{\alpha j}^* - \bar{u}_\alpha \cdot \sum_{\alpha j}^*) \cdot ds + \int_s (\xi \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \cdot V_{3j}^* - \xi \cdot \bar{p} \cdot \frac{\partial V_{3i}^*}{\partial n}) \cdot ds - \int_v \bar{B}_i \cdot V_{ij}^* \cdot dv = 0 \quad (14)$$

اندیس های i, j و k مقادیر ۱، ۲، ۳ و اندیس α مقادیر ۱ و ۲ را اختیار می کنند، به طوری که $U_3 = p$ و $U_\alpha = u_\alpha$ ($\alpha=1,2$) بوده، همچنین S در عبارت انتگرالی بالا به معنای انتگرال گیری بر روی مرز سیستم است. در معادله (۱۴) ماتریس دیفرانسیلی l_{ij} به صورت زیر تعریف می شود:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_1^2 - \rho_1 S^2 & (\lambda + \mu) \cdot D_1 D_2 & \alpha_1 S \cdot D_1 \\ (\lambda + \mu) \cdot D_2 D_1 & \mu\Delta + (\lambda + \mu) \cdot D_2^2 - \rho_1 S^2 & \alpha_1 S \cdot D_2 \\ \alpha_1 \cdot D_1 & \alpha_1 \cdot D_2 & \xi\Delta - \frac{S}{Q} \end{bmatrix} \quad (15)$$

و همچنین بردار تنش $\bar{\tau}_\alpha$ و کمیت نظیر آن $\sum_{\alpha j}^*$ به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\bar{u}_i(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot u_i(x,t) \cdot dt \quad \text{و} \quad \bar{p}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot p(x,t) \cdot dt \quad (6)$$

معادلات دیفرانسیل ممزوج سیستم به صورت زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} + \mu \cdot \nabla^2 \bar{u} - \alpha_1 \cdot \nabla \bar{p} - S^2 \rho_1 \cdot \bar{u} = -\bar{f} & (7) \\ \xi \cdot \nabla^2 \bar{p} - \frac{S}{Q} \bar{p} - \alpha_1 S \nabla \cdot \bar{u} = -\bar{q} & (8) \end{cases}$$

که در آن ξ ، α_1 و ρ_1 به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\xi = \left(\frac{\gamma}{k} + m \cdot S \right)^{-1} \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \alpha - \rho_f \cdot S \cdot \xi, \quad \rho_1 = \rho - \rho_f^* \cdot S \cdot \xi$$

جالب توجه است که این معادلات فرم کلی مشابه معادلات ممزوج ترموالاستیسیته را دارند.

روش انتگرالی مرزی

کاربرد روش معادلات انتگرال مرزی در مسائل مهندسی از سالهای ۱۹۶۰ به بعد پایه گذاری شده و این در حالی است که حل معادلات انتگرال مرزی، تاکنون به روشهای مختلفی که شباهتی با سایر روشهای عددی، نظیر تفاوتهای محدود و یا المانهای محدود نداشته، صورت می گیرد. از جمله روشهای ناحیه ای که اخیراً مورد استفاده قرار گرفته و در این مقاله نیز از آن برای حل مسأله محیطهای متخلخل اشباع استفاده خواهد شد، روش "مستقیم" در حل معادلات انتگرال مرزی است. این روش که بر مبنای توابع گرین بنا نهاده شده، معادلات انتگرالی را بر حسب حل منفرد (یا منبع^۱) که معادله دیفرانسیل حاکم را ارضاء می کند، بیان می شوند.

معادلات دیفرانسیل ممزوج محیطهای متخلخل اشباع (۷) و (۸)، در فرم ماتریسی آن به صورت زیر است:

$$L_{ij} \cdot \bar{U}_j = \bar{B}_i \quad (10)$$

که در آن ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی L_{ij} و بردارهای \bar{U}_j و B_i به صورت زیر تعریف می شوند:

است با $C_{kj} = \delta_{kj}/2$

معادله (۲۱) را می توان به فرم ساده زیر بیان کرد.

$$C_i \cdot \bar{U}_i + \int_s \mathbf{P}^* \cdot \bar{\mathbf{U}} \cdot ds = \int_s \mathbf{U}^* \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot ds \quad (22)$$

که در آن اثرات نیروهای بدنه در نظر گرفته نشده است. ماتریسهای \mathbf{U}^* و \mathbf{P}^* و بردارهای $\bar{\mathbf{U}}$ و $\bar{\mathbf{P}}$ در معادله (۲۱) عبارتند از:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} V_{11}^* & V_{21}^* & \xi \cdot V_{31}^* \\ V_{12}^* & V_{22}^* & \xi \cdot V_{32}^* \\ V_{13}^* & V_{23}^* & \xi \cdot V_{33}^* \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \{ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{p} \}^T$$

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^* & \Sigma_{21}^* & \xi \cdot \partial V_{31}^* / \partial n \\ \Sigma_{12}^* & \Sigma_{22}^* & \xi \cdot \partial V_{32}^* / \partial n \\ \Sigma_{13}^* & \Sigma_{23}^* & \xi \cdot \partial V_{33}^* / \partial n \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \{ \bar{\tau}_1 \quad \bar{\tau}_2 \quad \partial \bar{p} / \partial n \}^T$$

لازم به ذکر است که در معادله انتگرال مرزی (۲۲) ماتریسهای \mathbf{U}^* و \mathbf{P}^* با محاسبه توابع V_{ij}^* و Σ_{ij}^* تشکیل می شود. برای تعیین مقادیر مجهول جابجائی ها و فشار منفذی در بردار $\bar{\mathbf{U}}$ ، و بردارهای تنش و دبی خروجی در بردار $\bar{\mathbf{P}}$ ، چون حل معادله انتگرالی (۲۲) به صورت تحلیلی غیر ممکن می باشد، لذا آنرا به روش عددی با اختیار المانهایی بر روی مرز سیستم حل می کنیم.

حل اساسی

برای تعیین حل اساسی (توابع گرین) V_{ij}^* ، که با استفاده از آن بتوان ماتریسهای \mathbf{U}^* و \mathbf{P}^* را تشکیل داده و معادله انتگرالی (۲۲) را حل کرد، می توان از معادله (۱۸) که توابع V_{ij}^* آنرا ارضاء می کند، استفاده کرد. معادله (۱۸) در فرم برداری به صورت زیر نوشته می شود:

$$[L] \cdot \mathbf{V}^* + \mathbf{I} \cdot \Delta_{(x)} = 0 \quad (24)$$

با پیش ضرب معادله (۲۴) در ماتریس معکوس اپراتورهای

$$\bar{\tau}_\alpha = \bar{\tau}_{\alpha\beta} \cdot n_\beta$$

$$= \left\{ \left(\lambda \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} - \alpha_1 \cdot \bar{p} \right) \cdot \delta_{\alpha\beta} + \mu \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right\} \cdot n_\beta \quad (16)$$

$$\Sigma_{\alpha j}^* = \left\{ \left(\nu \cdot \frac{\partial V_{mj}^*}{\partial x_m} + \alpha_1 S \cdot V_{3j}^* \right) \cdot \delta_{\alpha\beta} + \mu \cdot \left(\frac{\partial V_{\alpha j}^*}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_{\beta j}^*}{\partial x_\alpha} \right) \right\} \cdot n_\beta \quad (17)$$

حال لازم است حلی برای V_{jk}^* به دست آید که در $l_{ij} \cdot V_{jk}^*$ صدق کند، در نتیجه با حذف اولین عبارت انتگرالی معادله (۱۴)، معادله انتگرالی حاصل می شود که فقط در مرز سیستم فرموله شده است. لذا با فرض منبعی در نقطه c که در داخل ناحیه v متمرکز شده باشد، می توان نوشت:

$$l_{ij} \cdot V_{jk}^* + \delta_{ik} \cdot \Delta_{(x)}^c = 0 \quad (18)$$

که $\Delta_{(x)}^c$ تابع دلتای دیراک^{۱۲} است و برای آن می توان نوشت:

$$\int_v (l_{ij} \cdot V_{jk}^* + \delta_{ik} \cdot \Delta_{(x)}^c) \cdot \bar{U}_i \cdot dv = \int_v (l_{ij} \cdot V_{jk}^*) \cdot \bar{U}_i \cdot dv + \bar{U}_k^c \quad (19)$$

اگر معادله (۱۸) توسط V_{jk}^* ارضاء شود، می توان نوشت:

$$\int_v (l_{ij} \cdot V_{jk}^*) \cdot \bar{U}_i \cdot dv = -\bar{U}_k^c \quad (20)$$

که با جایگذاری معادله (۲۰) در معادله (۱۴)، معادله انتگرالی حاصل فقط شامل مرز سیستم می باشد. با توجه به آن که معادله حاصل برای نقاط داخل ناحیه v معتبر بوده، و در فرموله کردن مسائلی که با تکنیکهای مرزی حل می شود باید معادله برای حالتی که نقطه در مرز می باشد، تعیین شود، می توان ثابت کرد که معادله حاصل برای نقاط واقع بر مرز سیستم به شکل زیر است.

$$C_{kj} \cdot \bar{U}_k + \int_s \bar{u}_\alpha \cdot \Sigma_{\alpha j}^* \cdot ds + \int_s \xi \cdot \bar{p} \cdot \frac{\partial V_{3j}^*}{\partial n} \cdot ds + \int_v \bar{B}_i \cdot V_{ij}^* \cdot dv \\ = \int_s \bar{\tau}_\alpha \cdot V_{\alpha j}^* \cdot ds + \int_s \xi \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \cdot V_{3j}^* \cdot ds \quad (21)$$

که C_{kj} تانسور ضریب شکل بوده و برای سطوح هموار برابر

دیفرانسیلی $[L]$ ، یعنی $[L]^{-1}$ ، ماتریس توابع گرین به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۲]:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}^* &= \sum_{l=1}^3 \left\{ \Psi_{l(r)} \cdot \delta_{\alpha\beta} - \chi_{l(r)} \cdot r_{l,\alpha} \cdot r_{l,\beta} \right\} \\ V_{\alpha 3}^* &= \sum_{l=1}^3 S \cdot r_{l,\alpha} \cdot \zeta_{l(r)} \\ V_{3\beta}^* &= \sum_{l=1}^3 r_{l,\beta} \cdot \zeta_{l(r)} \\ V_{33}^* &= \sum_{l=1}^3 \varphi_{l(r)} \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن r فاصله بین نقطه اثر بار (یا دبی تزریقی) تا نقطه ای که تغییر مکانها (یا فشار منفذی) اندازه گیری می شود، و $r_{\alpha} = \partial r / \partial x_{\alpha}$ می باشد. توابع $\Psi_{l(r)}$ ، $\chi_{l(r)}$ ، $\zeta_{l(r)}$ و $\varphi_{l(r)}$ در معادله (۲۵) عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Psi_{l(r)} &= \frac{\delta_{3l}}{2\pi \cdot \mu} K_0(\lambda_l r) - \eta_l \cdot \lambda_l \frac{1}{r} K_1(\lambda_l r) \\ \chi_{l(r)} &= -\eta_l \cdot \lambda_l^2 \cdot K_2(\lambda_l r) \\ \zeta_{l(r)} &= \beta_l \cdot \lambda_l \cdot K_1(\lambda_l r) \\ \varphi_{l(r)} &= \gamma_l \cdot K_0(\lambda_l r) \end{aligned} \quad (26)$$

در عبارات فوق K_0 ، K_1 و K_2 توابع اصلاح شده بسل^{۱۳} از نوع دوم می باشند. همچنین در معادلات (۲۶)، $\lambda_3^2 = \rho_1 / \mu \cdot S^2$ ، و λ_1^2 و λ_2^2 ریشه های معادلات زیر می باشند:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = k_1^2 + \frac{S}{\xi} \left(\frac{1}{Q} + \frac{\alpha_1^2}{\lambda + 2\mu} \right) \\ \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{S}{Q \cdot \xi} k_1^2 \end{cases} \quad (27)$$

که در آن $k_1^2 = \rho_1 / (\lambda + 2\mu) \cdot S^2$ است. همچنین پارامترهای η_l ، β_l و γ_l در معادلات (۲۶) عبارتند از:

$$\begin{aligned} \eta_l &= \frac{(-1)^l (1 - \frac{S}{Q} \lambda_l^2) (\delta_{1l} + \delta_{2l})}{2\pi \cdot (\lambda + 2\mu) (\lambda_2^2 - \lambda_l^2)} - \frac{\delta_{3l}}{2\pi \cdot \rho_1 S^2}, \quad \sum_{l=1}^3 \eta_l = 0 \\ \beta_l &= \alpha_1 \frac{(-1)^l (\delta_{1l} + \delta_{2l})}{2\pi \xi \cdot (\lambda + 2\mu) (\lambda_2^2 - \lambda_l^2)}, \quad \sum_{l=1}^3 \beta_l = 0 \\ \gamma_l &= \frac{(-1)^l}{2\pi \cdot \xi} \cdot \frac{(\lambda_l^2 - k_1^2) \cdot (\delta_{1l} + \delta_{2l})}{(\lambda_2^2 - \lambda_l^2)} \end{aligned} \quad (28)$$

پس از تعیین توابع گرین از معادله (۲۵)، با جایگذاری این توابع در معادله (۱۷) توابع تنش Σ_{ij}^* به صورت زیر به دست می‌آیند [۲۰]:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^* &= \sum_{l=1}^3 \left\{ \lambda \cdot r_{l,\beta} \cdot n_{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right) + \alpha_1 \cdot S \cdot r_{l,\beta} \cdot n_{\alpha} \cdot \zeta \right. \\ &\quad \left. + \mu \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial n} \delta_{\alpha\beta} + r_{l,\alpha} \cdot n_{\beta} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \chi \right) - 2\mu \cdot r_{l,\alpha} \cdot r_{l,\beta} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. - 2\mu \cdot (r_{l,\beta} \cdot n_{\alpha} - 2r_{l,\alpha} \cdot r_{l,\beta} \frac{\partial r}{\partial n}) \frac{1}{r} \chi \right\} \\ \Sigma_{\alpha 3}^* &= \sum_{l=1}^3 \left\{ \lambda \cdot S \cdot n_{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r} \zeta \right) + 2\mu \cdot S \cdot n_{\alpha} \frac{1}{r} \zeta \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \cdot S \cdot n_{\alpha} \cdot \varphi + 2\mu \cdot S \cdot r_{l,\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{r} \zeta \right) \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Sigma_{3\beta}^* = \sum_{l=1}^3 \left\{ n_{\beta} \frac{1}{r} \zeta + r_{l,\beta} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{r} \zeta \right) \right\}$$

$$\Sigma_{33}^* = \sum_{l=1}^3 \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\}$$

که در آن $\partial r / \partial n = (\partial r / \partial x_i) (\partial x_i / \partial n) = (x_i / r) \cdot n_i = r_{,i} \cdot n_i$ می باشد.

روش المانهای مرزی

در سالهای اخیر روش المان مرزی به صورت یکی از روشهای عددی مقتدر در بین مسائل مکانیک محیطهای پیوسته ظاهر شده است. خصوصاً کاربرد آن در آنالیزهای استاتیکی یا مسائل دینامیکی در الاستیسیته خطی بسیار رضایت بخش بوده است. در این قسمت روش المان مرزی برای حل معادلات انتگرال مرزی در مسائل الاستیک متخلخل اشباع فرموله می شود. در این روش همان گونه که از اسم آن مشخص است فقط نیاز به مدل کردن مرزهای ناحیه مورد نظر بوده که باعث کاهش ابعاد مسأله می شود. به علاوه، نمایش معادلات انتگرال مرزی، یک فرمول بندی دقیق مسأله است و تقریبات فقط در طی حل عددی معادلات انتگرالی وارد می شود. این روش به خصوص در حل مسائل محیطهای بی نهایت و یا نیمه بی نهایت حائز اهمیت می باشد، زیرا توابع گرین مورد استفاده در فرمولاسیون روش المان مرزی به صورت اتوماتیک شرایط تشعشی نواحی دور (بی نهایت) را ارضاء می کند.

در آنالیز محیطهای متخلخل اشباع مقادیر مرزی شامل

بنابراین از معادله (۳۰) می توان نوشت:

$$\frac{1}{2} \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{S_j} \mathbf{P}^* \cdot d\mathbf{s} \right) \cdot \bar{U}_j = \sum_{j=1}^n \left(\int_{S_j} \mathbf{U}^* \cdot d\mathbf{s} \right) \cdot \bar{P}_j \quad (31)$$

معادله (۳۱) نمایشی از فرم مجزا شده در روی مرز می باشد و ارتباط بین گره i ، که توابع گرین (حل اساسی) در آن به کار برده شده، با تمام المانهای j (شامل $i=j$) را در روی مرز برقرار می کند. (شکل ۲)

عبارات $\int_{S_j} \mathbf{U}^* \cdot d\mathbf{s}$ و $\int_{S_j} \mathbf{P}^* \cdot d\mathbf{s}$ ارتباط گره i را با المان j توسط عمل انتگرال گیری نشان می دهد، که آنها را به ترتیب \hat{H}_{ij} و G_{ij} می نامیم. بنابراین از معادله (۳۱) می توان نوشت:

$$\frac{1}{2} \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} \cdot \bar{U}_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} \cdot \bar{P}_j \quad (32)$$

بنابراین با قرار گرفتن در هر گره i و حرکت بر روی المانهای j ، معادله (۳۲) تشکیل شده، نهایتاً $3 \times n$ معادله به دست می آید. تمام معادلات برای n گره مرزی در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته می شود:

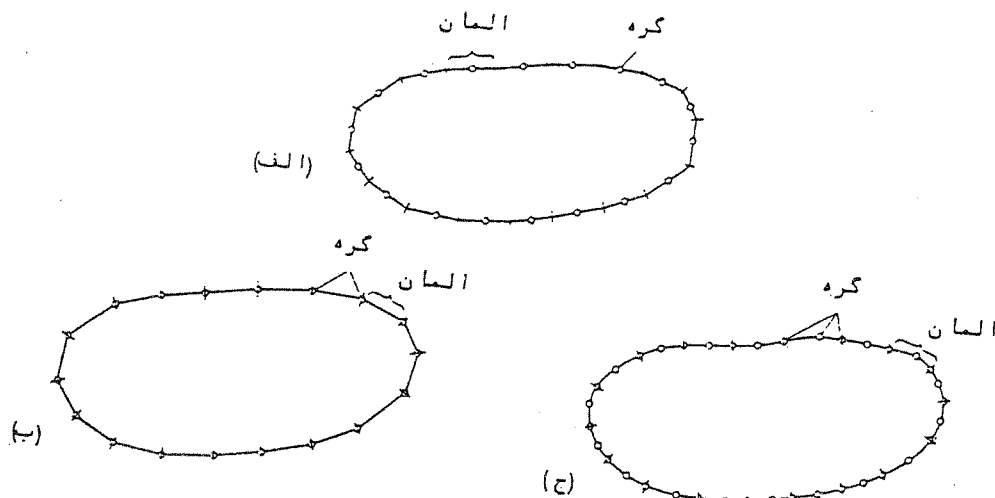
$$\mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (33)$$

در معادله (۳۳) بردارهای $\bar{\mathbf{U}}$ و $\bar{\mathbf{P}}$ متشکل از شرایط مرزی در گره ها بوده، که برای برخی از آنها مقادیر جابجائی ها و فشار منفذی مجهول و برای دسته ای دیگر از گره ها مقادیر بردارهای تنش و دبی خروجی مجهول می باشد. لذا با جابجا کردن کلیه مجهولات به سمت چپ معادله (۳۳)، می توان آن

یک دسته تغییر مکانها و فشار منفذی و دسته دیگر بردارهای تنش و دبی خروجی بوده که همواره یک دسته تعریف شده و دسته دیگر مجهول می باشد. حل معادله انتگرال مرزی (۲۲) به روش تحلیلی غیر ممکن بوده و به آنالیز عددی نیازمند است. برای این منظور مرز به المانهای مجزا تقسیم می شود. چون مطالعه در محیط دو بعدی صورت می گیرد مطابق شکل (۱) مرز به یک سری «قطعه»^{۱۴} یا «المان» تقسیم شده و نقاطی که دارای مقادیر مجهول اند «گره»^{۱۵} نامیده می شوند. برای المان ثابت، گره در وسط المان (شکل ۱-الف) و برای المان خطی هر المان با دو گره در دو انتهای آن (شکل ۱-ب) و در المانهای منحنی (که نمونه ای از آن در شکل ۱-ج نشان داده شده) با اضافه شدن گره در طول المان خطی تعریف می شود. با تقسیم مرز به n المان، معادله انتگرال مرزی (۲۲) به صورت مجموع انتگرالهای المان مرزی به فرم زیر نوشته می شود:

$$C_i \cdot \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \mathbf{P}^* \cdot \bar{\mathbf{U}} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \mathbf{U}^* \cdot \bar{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{s} \quad (30)$$

که S_j طول المان j ام می باشد. مفهوم معادله فوق این است که هر بار با قرار گرفتن بر روی یک گره مرزی (گره i) و حرکت بر روی کلیه المانها، معادله (۳۰) تشکیل می شود. در این صورت برای کلیه گره ها n دسته از این معادلات به دست می آیند. به منظور بررسی مسأله در این مقاله، معادله (۳۰) در شرایط المان ثابت بررسی می شود. برای المانهای ثابت یا سطوح هموار ضریب C_i برابر $1/2$ بوده و مقادیر بردارهای $\bar{\mathbf{U}}$ و $\bar{\mathbf{P}}$ در طول هر المان ثابت می باشد.

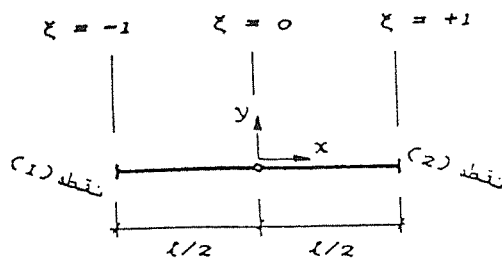
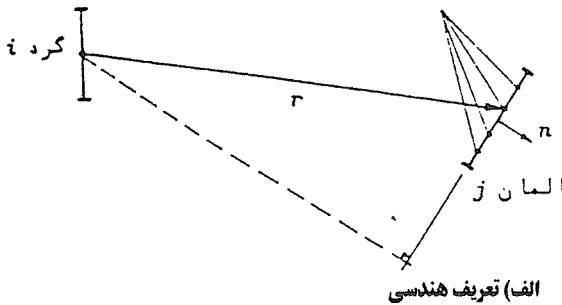


شکل (۱) المانهای مرزی: (الف) ثابت، (ب) خطی، و (ج) درجه دوم

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha\beta}^* &\propto \text{Ln}(r) & V_{3\beta}^* &= \text{غير منفرد} \\
 V_{\alpha 3}^* &= \text{غير منفرد} & V_{33}^* &\propto \text{Ln}(r) \\
 \Sigma_{\alpha\beta}^* &\propto \frac{1}{r} & \Sigma_{3\beta}^* &= \text{غير منفرد} \\
 \Sigma_{\alpha 3}^* &\propto \text{Ln}(r) & \Sigma_{33}^* &\propto \frac{1}{r} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

همانطور که دیده می شود عبارات $V_{3\beta}^*$ و $V_{\alpha 3}^*$ از ماتریس V_{ij}^* غیر منفرد بوده و نوع نقاط منفرد $V_{\alpha\beta}^*$ و V_{33}^* از نوع نقاط منفرد الاستو-استاتیک و در مورد V_{33}^* و Σ_{33}^* از نوع مسأله نفوذ می باشند. محاسبه انتگرالهای منفرد فوق در این مقاله، به روش انتگرال گیری عددی که توسط لاجات^{۱۸} و واتسون^{۱۹} (۱۹۷۶)، جون^{۲۰} (۱۹۸۵) و هیامی^{۲۱} و بری^{۲۲} (۱۹۸۸) ارائه گردید، صورت گرفته است.

نقاط استیصال گیری

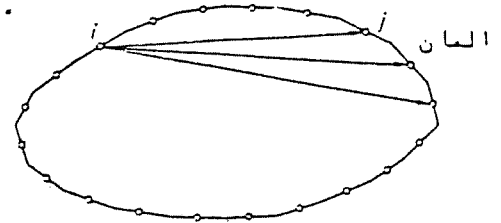


ب) المان ثابت

شکل (۳)

کاربردها

برای نشان دادن کارآئی فرمول بندی فوق، از آن برای تحلیل محیطهای متخلخل اشباع تحت اثر انتشار امواج ناشی



شکل (۲) ارتباط بین حل اساسی در گره مرزی i و المانهای مرزی

را به صورت زیر نوشت:

$$A \cdot X \cong F \tag{34}$$

که در آن X بردار مجهولات شامل \bar{p} و \bar{u}_α و \bar{p} و \bar{u}_α می باشد، سرانجام با حل دستگاه معادلات (۳۴) به یکی از روشهای متداول نظیر روش گوس، مجهولات هر گره به دست می آید.

رفتار انتگرالهای منفرد^{۲۳}

برای تشکیل دستگاه معادلاتی نظیر (۳۴) که با استفاده از آن مجهولات گره های مرزی به دست آیند. نیاز به محاسبه انتگرالهای $\int_{S_j} P^* \cdot ds$ و $\int_{S_j} U^* \cdot ds$ می باشد. که در آنها از توابع V_{ij}^* و Σ_{ij}^* استفاده می شود. هنگامی که در گره مرزی i قرار داشته و بر روی المان مرزی j انتگرال گیری می کنیم (شکل ۳-الف)، برای حالت $j \neq i$ از روشهای انتگرال گیری عددی استاندارد نظیر روش گوس^{۱۷} می توان استفاده کرد. در این صورت این انتگرالها به فرم عددی زیر محاسبه می شوند:

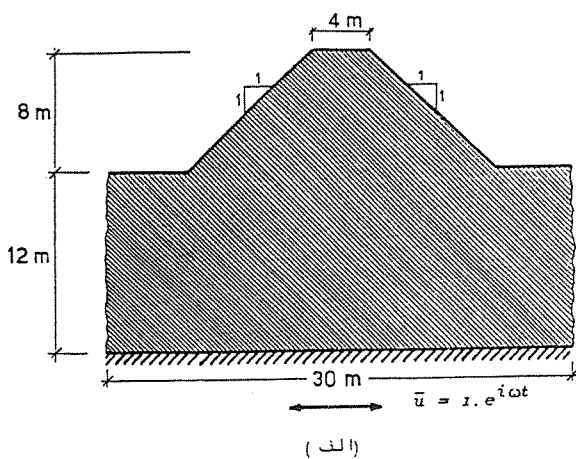
$$\begin{aligned}
 \int_{S_j} \Sigma_{ij}^* \cdot ds &= \int_{(1)}^{(2)} \Sigma_{ij}^*(\xi) \cdot ds = \int_{-1}^{+1} \Sigma_{ij}^*(\xi) \cdot l/2 \cdot d\xi \\
 &\cong \sum_{m=1}^k w_m \cdot \Sigma_{ij}^*(\xi_m) \cdot l/2
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

به طور مشابه برای انتگرالهای $\int_{S_j} V_{ij}^* \cdot ds$ نیز به همین ترتیب عمل می شود.

در حالت $j=i$ ، یعنی وقتی گره i المان z را در بر می گیرد، انتگرال دارای رفتار خاصی بوده زیرا حلهای اساسی شامل نقاط منفرد می باشد. نقاط منفرد حلهای اساسی انتگرالهای ذکر شده از بسط سری های توابع اصلاح شده بسط K_0 ، K_1 و K_2 به دست می آید. رفتار جملات حلهای اساسی در نقاط منفرد به صورت زیر می باشد: [۱۶]

$E = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$	$\lambda = 0.834 \times 10^7 \text{ N/m}^2$
$\rho = 3060 \text{ Kg/m}^3$	$\rho_f/\rho = 0.973$
$n = 0.333$	$\nu = 0.2$
$K_s = 5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	$K_f = 61.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
$\mu = 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}^2$	$\alpha = 0.997$

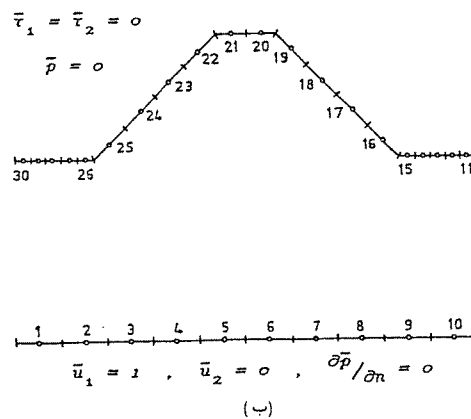
هندس مسأله در شکل (۴-الف) نمایش داده شده، مرزهای سیستم مطابق شکل (۴-ب) به ۳۰ المان که شامل ۱۰ المان در ناحیه بستر سنگی و ۲۰ المان در سطح آزاد سد و سطح زمین مجاور است، تقسیم بندی می شود. شرایط مرزی شامل دبی خروجی صفر، تغییر مکان صفر در راستای قائم و همچنین تغییر مکان واحد در راستای افقی برای گره های مرزی مربوط به بستر سنگی بوده و برای گره های مرزی سطح آزاد سد شامل فشار منفذی صفر و بردارهای تنش صفر در دو راستای افقی و قائم می باشد. بر این اساس قدر مطلق تغییر مکان تاج سد (گره های ۲۰ و ۲۱) در حالات مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل (۵) تغییر مکان تاج سد برای دو حالت، محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری بالا و محیط الاستو-دینامیک مقایسه گردیده، مطابق این نمودارها دو منحنی دارای روند تغییراتی یکسان می باشند.



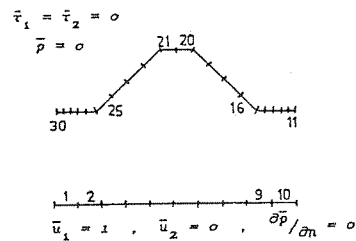
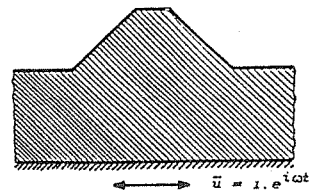
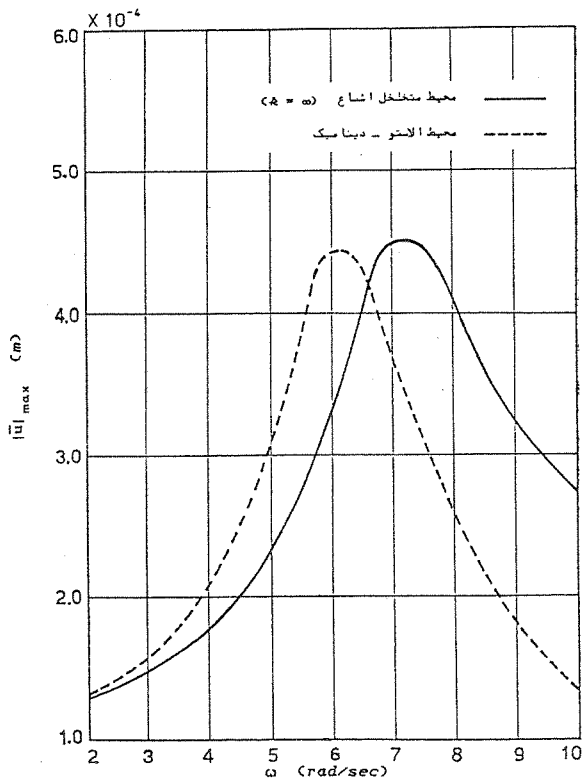
از بارهای دینامیکی یا زلزله استفاده می شود. به عنوان نتایج از روش ارائه شده، به بررسی دو نمونه از کاربردهای مسأله می پردازیم. در اینجا لازم به ذکر است که چون معادلات انتگرال مرزی محیطهای متخلخل اشباع با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس فرموله شده، لذا لازم است پس از تعیین مجهولات گره های مرزی در روش المان مرزی، با تبدیل معکوس لاپلاس مجهولات حقیقی مسأله تعیین گردند، لکن در بسیاری از کاربردهای عملی رفتار دینامیکی یک جسم یا سازه تحت ارتعاشات هارمونیک حائز اهمیت می باشد. در این حالت عکس العمل، تابعی از فرکانس بوده و می توان با عمل تبدیل فوریه در معادلات حاکم بر سیستم آن را به فرم ریاضی نمایش داد. بنابراین با جایگزینی s توسط $i\omega$ ، مسأله را به صورت تابعی از فرکانس حل کرده و در صورت لزوم برای تعیین جابجائی و فشار منفذی در حوزه زمان از تبدیل معکوس عددی فوریه استفاده می شود.

(الف) بررسی رفتار دینامیکی بستر سنگی در تغییر مکان تاج سد

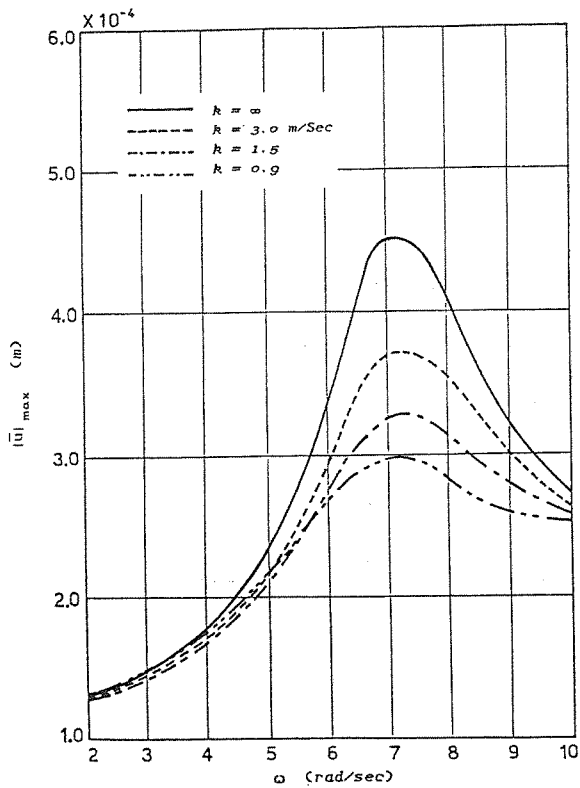
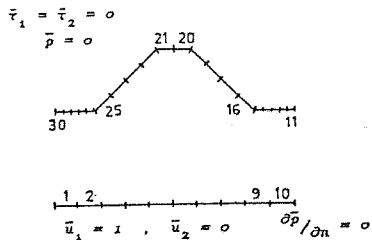
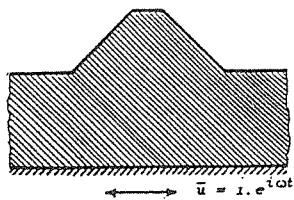
به عنوان کاربردی از روش المان مرزی در مسائل محیطهای لایه ای، رفتار یک سد خاکی که بر روی لایه ای به عمق ۱۲ متر قرار داشته، تحت حرکت دینامیکی بستر سنگی واقع در زیر لایه خاکی بررسی می گردد. مشخصات خواص محیط لایه ای خاک و سد خاکی واقع بر آن عبارتند از:



شکل (۴) (الف) حرکت دینامیکی بستر سنگی سد خاکی، (ب) سیستم مدل شده به روش المان مرزی



شکل (۵) مقایسه محیط متخلخل اشباع (k=∞) بایک محیط الاستودینامیک در تغییر مکان تاج سد



شکل (۶) تأثیر نفوذپذیری در تغییر مکان تاج سد

در شکل (۶) منحنیهای تغییر مکان تاج سد برای مقادیر مختلف نفوذپذیری $k=0.9, 1.5, 3.0$ (m/Sec) و بی نهایت رسم شده است. همانگونه که دیده می شود با کاهش نفوذپذیری محیط، تغییر مکان تاج سد کاهش می یابد. مقایسه این منحنیها با منحنیهای ضریب تقویت دینامیکی^{۳۳} برحسب نسبت فرکانس که در دینامیک سازه ها با آن آشنا هستیم، از آن جهت که اثر افزایش استهلاک سیستم دینامیکی همسو با اثر کاهش نفوذپذیری محیط متخلخل اشباع می باشد، حائز اهمیت است.

(ب) تعیین سختی دینامیکی پی صلب

در آنالیز مسائل اثر متقابل خاک-سازه به روش مدل نمودن خاک به صورت یک محیط نیمه بی نهایت الاستیک خطی که در آن سختی و استهلاک تابعی از فرکانس بوده، نیاز به ارزیابی سختی دینامیکی پی صلب می باشد. بدین منظور از روش المان مرزی برای تعیین سختی دینامیکی پی صلب شکل (۷-الف) استفاده نموده، بار مورد نیاز جهت جابجائی دینامیکی واحد دیسک صفحه ای صلب بدون جرم که بر روی محیط نیمه بی نهایت الاستیک واقع شده را در درجه آزادی قائم آن به صورت تابعی از فرکانس به دست می آوریم. (به طور مشابه سختی های دینامیکی افقی و چرخشی پی صلب نیز تعیین می شوند.) مشخصات خواص محیط خاکی متخلخل اشباع واقع در زیر پی سطحی عبارتند از: [۱۲]

$E = 1.357 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$	$\rho = 2273 \text{ Kg/m}^3$
$n = 0.195$	$K_s = 3.913 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$
$\lambda = 0.274 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$	$\rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$
$K_f = 0.232 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$	$\nu = 0.16$
$\alpha = 0.83$	$\mu = 0.585 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$

المان بندی در محل تماس خاک-پی و میدان-آزاد سطح زمین مجاور پی مطابق شکل (۷-ب) صورت می گیرد. محدوده المان بندی مورد نیاز بر اساس مطالعات همگرایی که صورت گرفته، بیش از 6B در طرفین پی اختیار می شود

(شکل ۷-ب)، که در آن B نصف پهنای پی نواری می باشد. شرایط مرزی شامل فشار منفذی صفر، جابجائی صفر در درجه آزادی افقی و جابجائی دینامیکی واحد در درجه آزادی قائم برای المانهای محل تماس خاک-پی و فشار منفذی صفر و بردارهای تنش صفر در دو راستا برای المانهای میدان-آزاد می باشد. در شکل ۸ توزیع قدم مطلق بردار تنش اعمالی بر روی پی و همچنین تغییر مکان میدان-آزاد را تحت اثر جابجائی هارمونیک پی صلب برای درجه آزادی قائم در یک فرکانس مشخص نمایش می دهد. برای تعیین سختی دینامیکی پی صلب، با تعریف سختی متشکل از دو جزء حقیقی و موهومی به صورت زیر:

$$K_{zz} = \text{Re}(K_{zz}) + i \cdot \text{Im}(K_{zz}) \quad (37)$$

و تقسیم عبارت فوق بر مدول برشی خاک μ و پهنای پی $d=2B$ آن را به صورت پی بعد $K_{zz}/\mu \cdot d$ نمایش داده و به ازاء مقادیر مختلف فرکانس به دست می آوریم. با تعریف فرکانس بدون بعد a_0 به صورت زیر

$$a_0 = \frac{\omega \cdot d}{V_s} \quad (38)$$

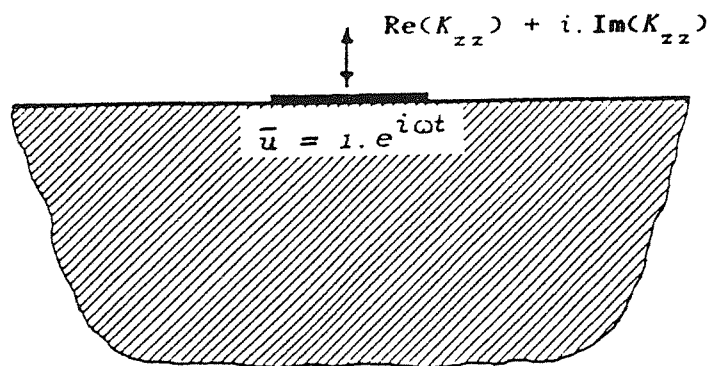
که در آن V_s سرعت موج برشی و برابر $\sqrt{\mu/\rho}$ می باشد. سختی دینامیکی $K_{zz}/\mu \cdot d$ به صورت تابعی از فرکانس بی بعد a_0 به دست آورده می شود. در شکل ۹ سختی قائم دینامیکی پی صلب را برای محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری بالا (محیط زهکشی شده) و محیط خشک الاستو-دینامیک تک فاز مقایسه نموده، مطابق این نمودارها روند تغییرات در منحنیهای جزء حقیقی و موهومی به صورت یکسان می باشند. در شکل ۱۰ منحنیهای جزء حقیقی و موهومی سختی قائم دینامیکی پی صلب برای نفوذپذیری های $k=0.2, 2, 20$ (Cm/Sec) رسم گردیده، بر طبق این منحنیها با کاهش نفوذپذیری محیط، جزء حقیقی سختی قائم دینامیکی افزایش و جزء موهومی آن کاهش می یابد.

برای تعیین سختی دینامیکی افقی پی صلب در این مرحله بار مورد نیاز جهت جابجائی دینامیکی واحد دیسک صفحه ای صلب را در درجه آزادی افقی آن به دست آورده و براساس مقادیر مختلف فرکانس، منحنیهای جزء حقیقی و موهومی سختی افقی دینامیکی $(K_{xx}/\mu \cdot d)$ برحسب فرکانس بی بعد a_0 رسم می شوند. در شکلهای ۱۱ و ۱۲ سختی

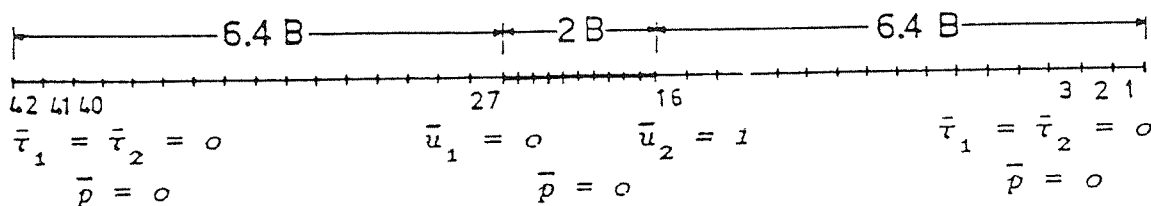
۱۳ منحنیهای جزء حقیقی و موهومی سختی چرخشی دینامیکی $K_{\theta\theta}/\mu.d^2$ برحسب فرکانس پی بعد a_0 برای دو محیط اشباع با نفوذپذیری بالا و محیط خشک تک فاز مقایسه گردیده که حاکی از روند تغییرات یکسان در دو محیط می باشند. همچنین اثر نفوذپذیری های مختلف در سختی دینامیکی چرخشی پی در شکل ۱۴ نمایش داده شده، که نظیر حالات قبل با کاهش نفوذپذیری محیط، جزء حقیقی سختی چرخشی پی افزایش و جزء موهومی آن کاهش می یابد.

دینامیکی افقی جهت مقایسه دو محیط اشباع (بانفوذپذیری بالا) و خشک (تک فاز)، و همچنین اثر نفوذپذیری بر سختی دینامیکی افقی رسم گردیده، نتایج حاصل از این نمودارها مشابه با حالت سختی دینامیکی قائم پی صلب می باشد.

نهایتاً برای تعیین سختی دینامیکی چرخشی پی صلب، بار مورد نیاز جهت چرخش واحد دیسک صفحه ای صلب بر حسب مقادیر مختلف فرکانس به دست می آیند. در شکل

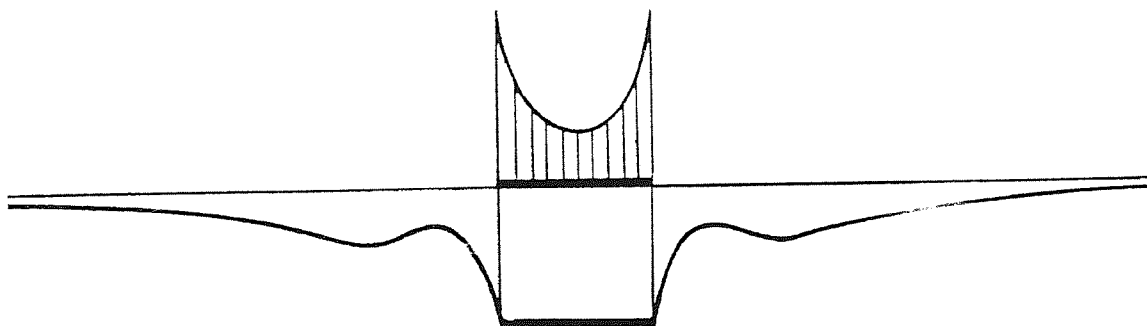


(الف)

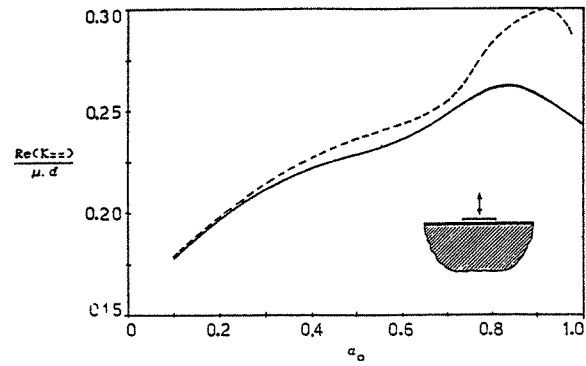
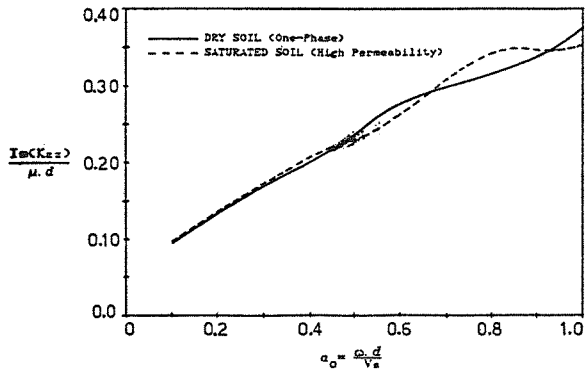


(ب)

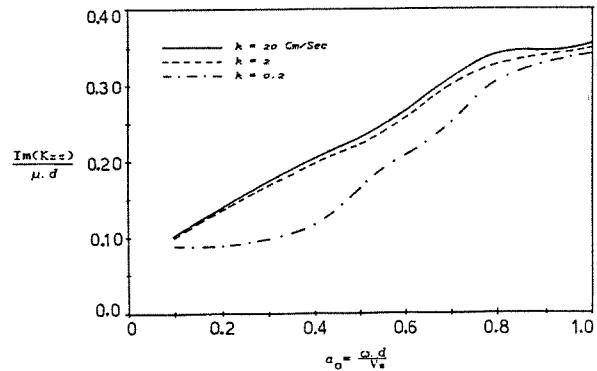
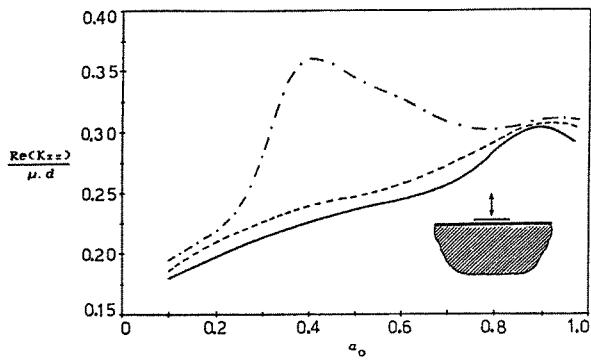
شکل (۷) (الف) سختی دینامیکی پی صلب، (ب) سیستم مدل شده به روش المان مرزی



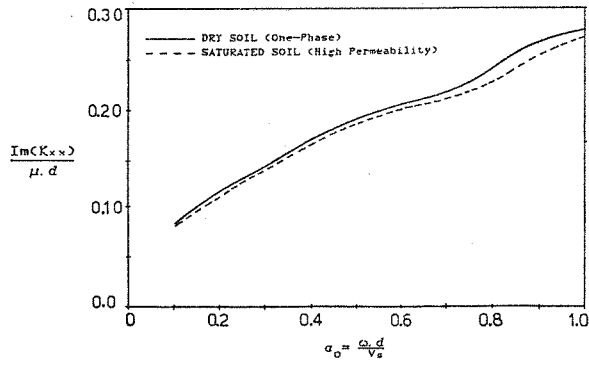
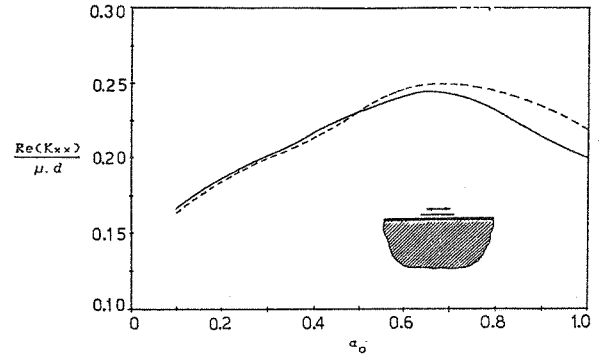
شکل (۸) توزیع قدر مطلق بردار تنش روی پی و تغییر مکان زمین مجاور ناشی از جابجایی هارمونیک در درجه آزادی قائم برای یک فرکانس مشخص



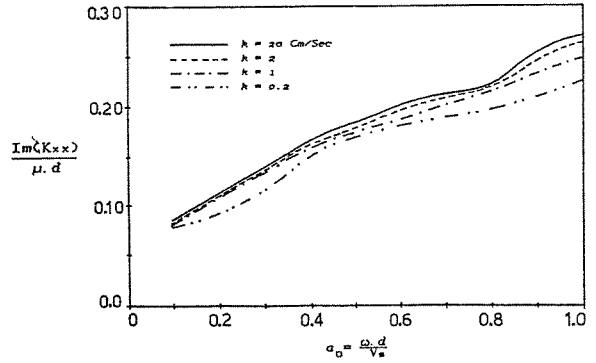
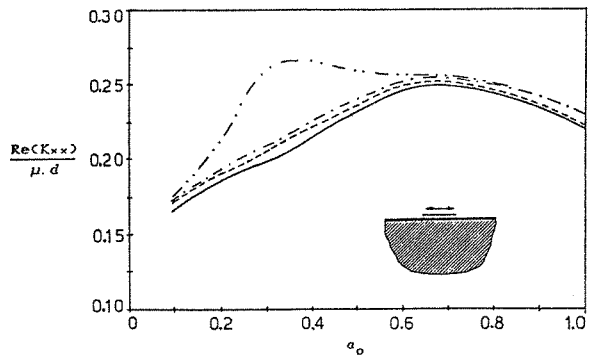
شکل (۹) مقایسه محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری بالا و محیط خشک تک فاز در تعیین سختی دینامیکی قائم پی صلب



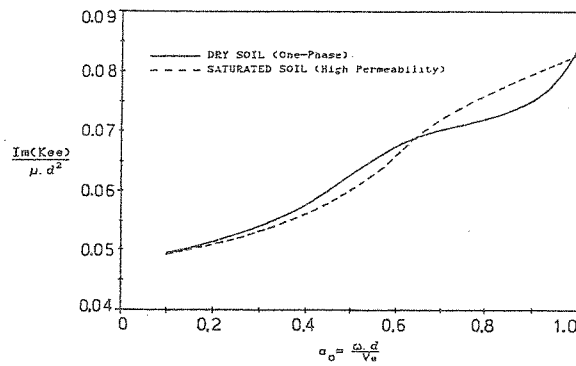
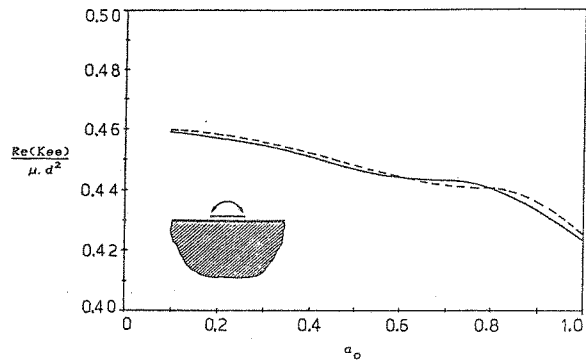
شکل (۱۰) تأثیر نفوذپذیری بر سختی دینامیکی قائم پی صلب



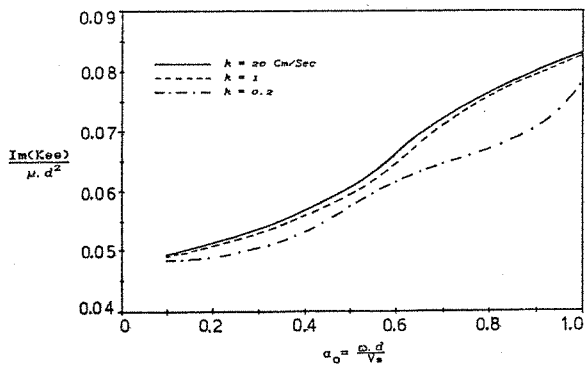
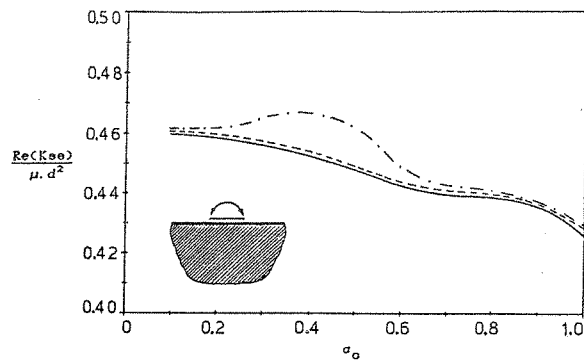
شکل (۱۱) مقایسه محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری بالا و محیط خشک تک فاز در تعیین سختی دینامیکی افقی پی صلب



شکل (۱۲) تأثیر نفوذپذیری بر سختی دینامیکی افقی پی صلب



شکل (۱۳) مقایسه محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری بالا و محیط خشک تک فاز در تعیین سختی چرخشی دینامیکی پی صلب



شکل (۱۴) تأثیر نفوذپذیری بر سختی چرخشی دینامیکی پی صلب

محیطهای متخلخل اشباع به روش المان مرزی، نیاز به مطالعات همگرایی برای تعیین اندازه المانها و همچنین انتخاب اپتیم المان بندی در تعیین محدوده المان بندی در مسائل محیطهای نیمه بی نهایت یا لایه ای می باشد. خصوصاً در محدوده فرکانس های بالا چون با افزایش فرکانس، طول موج کاهش می یابد، نیاز به کوچکتر کردن اندازه المانها می باشد.

از نتایج به دست آمده مشاهده می گردد، رفتار دو محیط متخلخل اشباع زهکشی شده با نفوذپذیری بالا و محیط الاستودینامیک تک فاز دارای روند تغییرات مشابه بوده. به طوری که در فرکانس های ارتعاشی پایین نتایج حاصل از این دو محیط یکسان می باشد. همچنین دیده شد، اثر نفوذپذیری بر محیط متخلخل اشباع با اثر استهلاک در یک سیستم دینامیکی متناظر می باشد. به طوری که روند افزایش استهلاک در یک سیستم دینامیکی همسو با کاهش اثر نفوذپذیری در یک محیط متخلخل اشباع است.

آنالیز دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع، بر اساس فرمول بندی مستقیم انتگرال مرزی برای محیطهای ۲- بعدی ارائه گردید. در این تئوری معادلات انتگرال مرزی، با کاربرد تکنیک باقیمانده وزنی بر کوپل معادلات دیفرانسیل بیو و سپس انتگرال گیری جزء به جزء بر این معادلات و در ادامه تعیین توابع گرین به نحوی که معادلات انتگرالی مربوط به میدان را حذف کند، تعیین گردید. چون حل این معادلات انتگرال مرزی به روش تحلیلی غیر ممکن بوده، لذا به روش المان مرزی با المان بندی سیستم در محلهایی که دارای تغییرات خواص فیزیکی است، معادلات به روش عددی حل شده و کمیت های مورد نظر شامل جابجایی ها، فشار منفذی، تنش ها و دبی خروجی برای هر نقطه از محیط به دست آمد.

به منظور کاربرد روش ارائه شده و چگونگی استفاده از روش المان مرزی در حل مسائل مختلف محیطهای متخلخل اشباع، دو نمونه مثال از محیطهای لایه ای و نیمه بی نهایت مورد بررسی قرار گرفت. لازم به ذکر است که در حل مسائل

1. Consolidation
2. Diffusive
3. Fundamental Solution
4. Half Space
5. Full Space
6. Saddle point
7. Total stress
8. Direct method
9. Green function
10. Source
11. Weighted residual
12. Dirac delta function

13. Modified Bessel functions
14. Segment
15. Node
16. Singular
17. Gaussian quadrature
18. Lachat
19. Watson
20. Jun
21. Hayami
22. Brebbia
23. Dynamic magnification factor

- 1- Banerjee. P.K.: Butterfield.R.: Boundary Element Methods in Engineering Science. Mc Graw-Hill. London. 1981.
- 2- Biot. M.A. "General Theory of Three Dimensional Consolidation". Jou. Appl. Phys., Vol. 12. PP. 155-164, 1941.
- 3- Biot, M.A. "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid- Saturated Porous Solid", Jou. of

the Acous. Soc. of America, Vol. 28, NO. 2. PP. 168-191, 1956.

- 4- Biot, M.A. "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media", Jou. Appl. Phys., Vol. 33, NO. 4, PP. 1482-1498, 1962.
- 5- Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London. 1978.
- 6- Brebbia, C.A.; Walker, S.: Boundary Element

- Techniques in Engineering, Newnes-Butterworth, London, 1980.
- 7- Brebbia, C.A.: Telles, J.C.F.: Wrobel, L.C. Boundary Element Techniques (theory and applications in engineering). Springer-Verlag, Berlin, New York, 1984.
- 8- Burrige, R.: Vargas, C.A. "The Fundamental Solution in Dynamic Poroelasticity", Geophys. Jou. Roy. Astr. Soc., Vol. 58, PP. 61-90, 1979.
- 9- Cheng, A.H.D.: Badmus, T.: Beskos, D.E. "Integral Equation for Dynamic poroelasticity in Frequency Domain with BEM solution", Jou. of Eng. Mechanics. Vol. 117, No. 5, PP. 1136-1157. 1991.
- 10- Cleary, M.P. "Fundamental Solutions for a Fluid-Saturated Porous solid", Int. Jou. of Solids and Structures, Vol. 13. PP. 785-806, 1977.
- 11- Halpern, M.: Christiano. P. "Response of Poroelastic Halfspace to Steady-State Harmonic Surface Traction". Int. Jou. Num. Anal. Meth. Geomechanics. Vol.10. PP. 609-632, 1986.
- 12- Kaynia, A.M. "Green's Functions of Fluid-Saturated Porous Media", Proceedings of the Second World Congress on Computational Mechanics, Stuttgart, Germany, PP. 575-580, 1990.
- 13- Paul, S. "On Disturbance Produced in a Semi-Infinite Poroelastic Medium by a Surface Load, "Pure Appl. Geophys., Vol. 14. PP. 615-627, 1976.
- 14- Rudnicki, J.W. "On Fundamental Solutions for a Fluid-Saturated porous Solid, by M.P.Cleary", Int. Jou. of Solids and Structures, Vol. 17, PP. 855-857, 1981.
- 15- Simon, B.R.: Wu, J.S.S. "Zienkiewicz, O.C.; Paul,D.k. "Evaluation of u-w and u- π Finite Element Methods for the Dynamic Response of Saturated porous Media using One-Dimensional model", Int. Jou. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol. 10, PP. 461-482, 1986.
- 16- Suh, I.G.; Tosaka, N. "Boundary Element Analysis of Linear Coupled Thermoelasticity Problems by Using Laplace Transformation": Boundary Element Methods in Applied Mechanics (Eds. Tanaka, M.; Gruse, T.A.). Pergamon Press, PP. 535-544. 1988.
- 17- Tosaka, N. "Boundary Integral Equation Formulations for Linear Coupled Thermoelasticity", Proc. 3rd Jap Symp. on B.E.M., JASCOME, PP. 207-212, 1986.
- 18- Tosaka, N.: Suh. I.G. "Boundary Integral Equation Formulation for the Generalized Theory of Dynamic Thermoelasticity", Proc. 4th Jap. Symp. on B.E.M. JASCOME, PP. 111-116, 1987.
- 19- Zienkiewicz. O.C.: Shiomi. T. "Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media; The Generalized Biot Formulation and Its Numerical Solution", Int. Jou. for Num. and Anal. Meth. in Geo., Vol. 8, PP. 71-96, 1984.
- ۲۰- خویی، امیررضا؛ مطالعه دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع به روش انتگرالهای مرزی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۰.